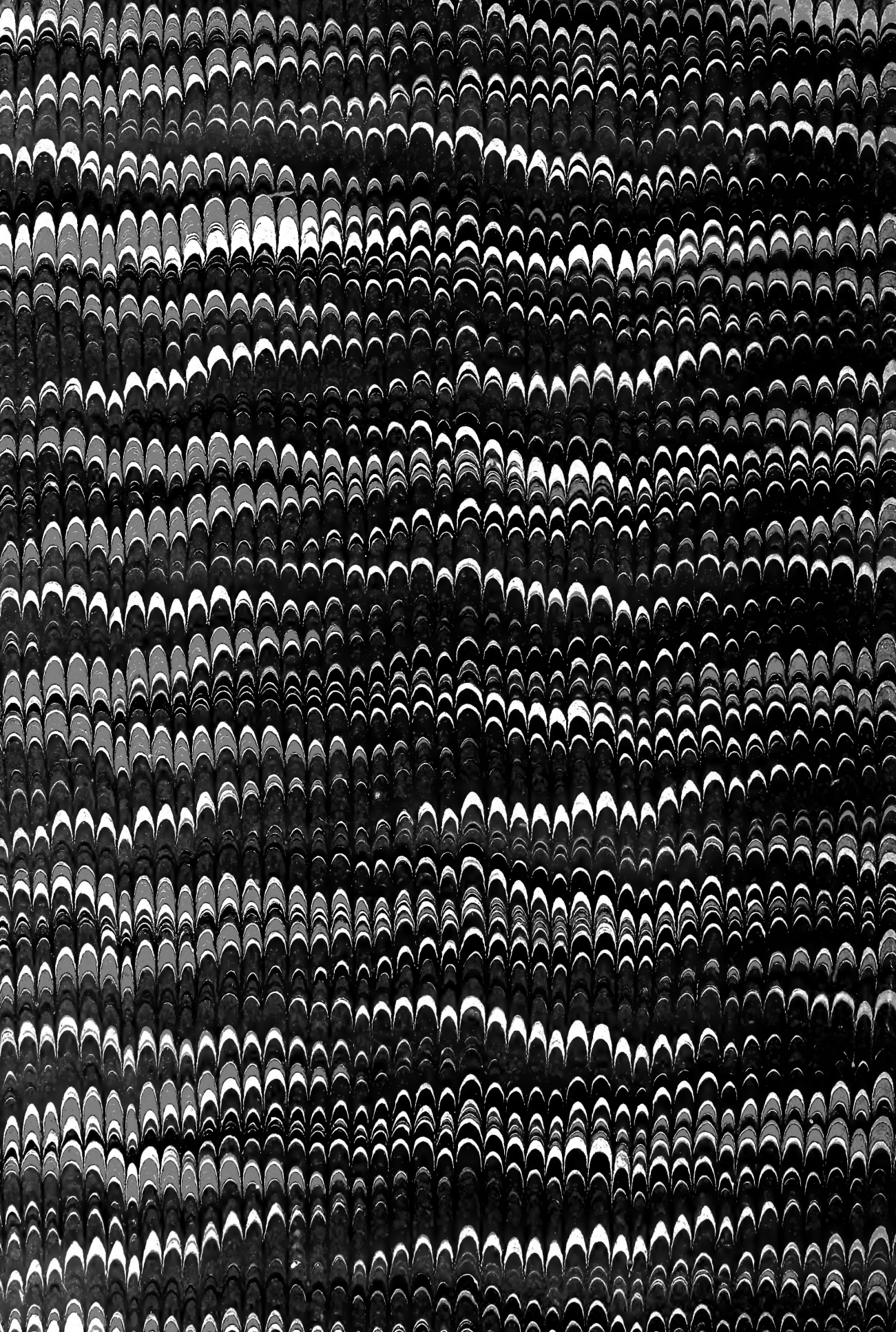


2 1 A215 793 fm

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 gennaio 1902.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

Sono ben note le identità algebriche fra i simboli di Riemann a quattro indici, nella teoria delle forme differenziali quadratiche. Non sembra invece che siano state ancora osservate le identità *differenziali* che li legano ai simboli di Christoffel a tre indici, di cui tratto nella presente Nota (1). Queste formole, per sè notevoli, consentono un'immediata applicazione ad un bel teorema trovato da Schur (2) e da lui dimostrato per altra via.

1.

Indichiamo con

$$f = \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

una forma differenziale quadratica negli n differenziali

$$dx_1\,,\ dx_2 \ldots dx_n$$

delle variabili indipendenti $x_1\,,\ x_2 \ldots x_n$, dove i coefficienti a_{rs} sono funzioni

(1) Ho stabilito queste identità nelle lezioni da me date nello scorso anno presso la Università di Pisa.

(2) *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen.* (Math. Annalen Bd. 27).

finite e continue delle x (nel campo di variabilità che si considera), che ammettono derivate parziali fino al terzo ordine, tutte finite e continue. Si suppone inoltre che il discriminante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Con A_{rs} indichiamo il quoziente della divisione per a del complemento algebrico di a_{rs}. I simboli di Christoffel di prima specie sono definiti dalla formola

$$(1) \qquad \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right);$$

e quelli di seconda specie dall'altra

$$(2) \qquad \left\{\begin{matrix} ik \\ \lambda \end{matrix}\right\} = \sum_{l}^{1\dots n} A_{\lambda l} \left[\begin{matrix} ih \\ l \end{matrix}\right].$$

Un simbolo di Riemann a quattro indici (rk, ih) è definito dalla formola

$$(3) \quad (rk, ih) = \frac{\partial}{\partial x_h}\left[\begin{matrix} ri \\ k \end{matrix}\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\begin{matrix} rh \\ k \end{matrix}\right] + \sum_{\lambda,\mu}^{1\dots n} A_{\lambda\mu}\left\{\left[\begin{matrix} rh \\ \lambda \end{matrix}\right]\cdot\left[\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} ri \\ \lambda \end{matrix}\right]\cdot\left[\begin{matrix} hk \\ \mu \end{matrix}\right]\right\}$$

È ben noto che fra i simboli di Riemann sussistono le identità date dalle formole seguenti:

$$(4) \quad (kr, ih) = -(rk, ih), (ih, rk) = (rk, ih), (rk, ih) + (ri, hk) + (rh, ki) = 0,$$

in virtù delle quali il numero di questi simboli distinti si riduce a

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Indicando ora con rk, ihl cinque indici qualunque presi nella serie 1, 2, ... n, dimostriamo che hanno luogo le seguenti identità differenziali:

$$(A) \qquad \frac{\partial}{\partial x_l}(rk, ih) + \frac{\partial}{\partial x_i}(rk, hl) + \frac{\partial}{\partial x_h}(rk, li) = \sum_{t}^{1\dots n}\left\{\begin{matrix} ri \\ t \end{matrix}\right\}(kt, lh) +$$

$$+ \sum_{t}^{1\dots n}\left\{\begin{matrix} rh \\ t \end{matrix}\right\}(kt, il) + \sum_{t}^{1\dots n}\left\{\begin{matrix} rl \\ t \end{matrix}\right\}(kt, hi) + \sum_{t}^{1\dots n}\left\{\begin{matrix} ki \\ t \end{matrix}\right\}(rt, hl) + \sum_{t}\left\{\begin{matrix} kh \\ t \end{matrix}\right\}(rt, li) +$$

$$+ \sum_{t}\left\{\begin{matrix} kl \\ t \end{matrix}\right\}(rt, ih).$$

Si possono porre le identità precedenti sotto un'altra forma, introducendo con Christoffel (1) simboli *a cinque* indici (rk, ihl) colla formola:

$$(\alpha) \qquad (rk, ihl) = \frac{\partial}{\partial x_l}(rk, ih) - \sum_t^{1\ldots n} \left\{ \begin{matrix} lr \\ t \end{matrix} \right\} (tk, ih) - \sum_t^{1\ldots n} \left\{ \begin{matrix} lk \\ t \end{matrix} \right\} (rt, ih) -$$

$$- \sum_t^{1\ldots n} \left\{ \begin{matrix} li \\ t \end{matrix} \right\} (rk, th) - \sum_t^{1\ldots n} \left\{ \begin{matrix} lh \\ t \end{matrix} \right\} (rk, it),$$

ossia, come si esprime il Ricci, formando le derivate covarianti dei simboli Riemanniani, allora la (A) può scriversi sotto la forma equivalente:

$$(A^*) \qquad (rk, ihl) + (rk, hli) + (rk, lih) = 0.$$

È da osservarsi per altro che le (A), o le equivalenti (A*), si riducono a pure identità formali se $r = k$ ed anche se due dei tre indici i, h, l sono eguali.

2.

Per dimostrare la (A) cominciamo dall'osservare che le derivate delle $A_{\lambda\mu}$ rispetto alle x si esprimono linearmente per le A stesse e pei simboli a tre indici di Christoffel colla formola:

$$(a) \qquad \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_l} = - \sum_t^{1\ldots n} A_{\lambda t} \left\{ \begin{matrix} lt \\ \mu \end{matrix} \right\} - \sum_t^{1\ldots n} A_{\mu t} \left\{ \begin{matrix} lt \\ \lambda \end{matrix} \right\}.$$

E infatti indicando con $\varepsilon_{s\lambda}$ lo zero o l'unità, secondo che $s \neq \lambda$ o $s = \lambda$, si ha

$$\sum_i^{1\ldots n} a_{si} A_{\lambda i} = \varepsilon_{s\lambda},$$

che derivata rapporto ad x_l porge

$$\sum_i^{1\ldots n} a_{si} \frac{\partial A_{\lambda i}}{\partial x_l} = - \sum_i^{1\ldots n} A_{\lambda i} \frac{\partial a_{si}}{\partial x_l}.$$

ossia

$$\sum_i^{1\ldots n} a_{si} \frac{\partial A_{\lambda i}}{\partial x_l} = - \sum_i^{1\ldots n} A_{\lambda i} \left[\begin{matrix} sl \\ i \end{matrix} \right] - \sum_i^{1\ldots n} A_{\lambda i} \left[\begin{matrix} il \\ s \end{matrix} \right].$$

Moltiplicando questa per $A_{s\mu}$ e sommando da $s = 1$ a $s = n$ coll'osservare la (2), risulta appunto la (a). Ciò posto formando dalla (3) la

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk, ih),$$

(1) *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (Crelle's, Journal Bd. 70). V. § 6.

ed applicando la (*a*), troviamo dapprima:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ik)=\frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_l}\begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_l}\begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix}+\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}-\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}-\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\ldots n}A_{\lambda t}\begin{Bmatrix} lt \\ \mu \end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\right)+$$

$$+\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\ldots n}A_{\mu t}\begin{Bmatrix} lt \\ \lambda \end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\right).$$

Trasformiamo ora le due ultime somme triple nel secondo membro col processo seguente, che indichiamo per esteso per uno dei termini, p. e. pel primo. Abbiamo per la (2)

$$\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\ldots n}A_{\lambda t}\begin{Bmatrix} lt \\ \mu \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}=\sum_{\mu t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} lt \\ \mu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}=\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} lt \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix};$$

e similmente procedendo per gli altri termini delle somme triple, vediamo che, cangiando leggermente le notazioni per gli indici, si può scrivere:

$$(4)\quad \frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ih)=\frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_l}\begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_l}\begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix}+\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} ik \\ t \end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} rh \\ t \end{bmatrix}-\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} hk \\ t \end{bmatrix}-\sum_{t}\begin{Bmatrix} hk \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} ri \\ t \end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lt \\ \lambda \end{bmatrix}+\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} hk \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lt \\ \mu \end{bmatrix}-$$

$$-\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lt \\ \lambda \end{bmatrix}-\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lt \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Ora, se in questa permutiamo una prima, poi una seconda volta, circolarmente gli indici i, h, l e le due formole ottenute addizioniamo colla (4) stessa, ne risulta appunto l' enunciata formola (A), *c. d. d.*

3.

Al § 7 della citata memoria del sig. Schur si trova stabilito il teorema: *Se la curvatura Riemanniana dello spazio, definito da*

$$ds^2=\sum_{i,k}^{1\ldots n}a_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

è costante attorno ad ogni singolo punto in qualunque orientazione, essa non può variare nemmeno da punto a punto, cioè lo spazio è a curvatura assolutamente costante.

Per dimostrare questo teorema Schur ha fatto uso di considerazioni geometriche sulle superficie geodetiche. Mi propongo qui di far vedere come si arriva direttamente al teorema stesso, applicando le identità (A).

Nella ipotesi che la curvatura Riemanniana K sia una funzione delle coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ del punto, ma indipendente dall' orientazione attorno al punto, per la formola stessa che dà la curvatura Riemanniana dovremo avere, per ogni quaderna di indici r, k, i, h, le relazioni

$$(5) \qquad (rk, ih) = \mathrm{K}\,(a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik}).$$

Ora partiamo dall' osservazione, d' immediata verifica, che le formole (A) risultano identicamente soddisfatte ponendovi in luogo dei simboli (rk, ih) di Riemann i corrispondenti minori del 2° ordine

$$a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik}$$

del discriminante a. Ed invero, formando, secondo (α), le derivate covarianti di questi minori (che formano un sistema quadruplo covariante secondo le dominazioni del Ricci) si vede che esse sono identicamente nulle. Sostituendo nelle identità (A) pei simboli di Riemann i loro valori supposti (5), queste diventano:

$$(a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} + (a_{rh}\,a_{lk} - a_{rl}\,a_{hk})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_i} + (a_{rl}\,a_{ik} - a_{ri}\,a_{kl})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = 0.$$

Moltiplicando questa per A_{ri} e sommando da $r = 1$ a $r = n$ (col ricordare che i, h, l sono supposti diversi) si ha semplicemente

$$a_{hk}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} - a_{lk}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = 0.$$

Se teniamo fissi h, l e diamo a k tutti i valori da 1 a n, *non* sussistendo le proporzioni:

$$a_{h1} : a_{h2} : \ldots : a_{hn} = a_{l1} : a_{l2} : \ldots a_{ln}$$

(giacchè a non è nullo), se ne trae

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} = 0.$$

E poichè ciò vale per tutti i valori degli indici h, l, se ne deduce appunto

$$\mathrm{K} = \mathrm{cost^{te}},$$

ciò che dà il teorema di Schur.

Botanica. — *Origine e differenziazione degli elementi vascolari primarî nella radice delle Monocotiledoni.* Nota I del Socio R. Pirotta.

Matematica. — *Sugli spazî plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazî.* Nota di Francesco Severi, presentata dal Socio Segre.

Queste due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul tetrajoduro di platino* (1). Nota di Italo Bellucci, presentata dal Socio Cannizzaro.

Da ricerche recenti è noto come il tetracloruro (2) ed il tetrabromuro (3) di platino, in soluzione acquosa si comportino come anidridi, associandosi a due molecole di acqua per dar luogo alla formazione degli acidi bibasici:

$$[Pt\,Cl^4\,(OH)^2]\,H^2 \qquad\qquad [Pt\,Br^4\,(OH)^2]\,H^2$$

Ho creduto di un certo interesse di provare se anche il tetrajoduro di platino si comportasse in modo analogo ai composti clorurato e bromurato, ora menzionati, per quanto, sembrasse ciò, a prima vista, poco probabile, data la nessuna solubilità del tetrajoduro nell'acqua.

Ho potuto tuttavia dimostrare che adoperando una soluzione alcoolica di tetrajoduro di platino, si può ottenere per mezzo dei sali metallici composti analoghi a quelli che si ottengono dalle soluzioni acquose di tetracloruro e di tetrabromuro. I risultati ottenuti formano appunto l'oggetto della presente Nota.

Il tetrajoduro di platino PtI^4 si ottiene nel modo più conveniente seguendo il processo indicato dal Topsoë (4), trattando cioè una soluzione di acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con una di acido jodidrico; salvo che il Topsoë consiglia di agire a freddo, mentre io ho trovato, per ripetuti tentativi, ottenersi un composto più puro e con maggior sollecitudine agendo a caldo. Precisamente ho trattato a bagno-maria una soluzione abbastanza concentrata

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) A. Miolati, Zeitschr. f. anorg. Chemie, XXII, 445.
(3) A. Miolati ed I. Bellucci, Gazz. chim. ital., XXX, 2ª, 580.
(4) Topsoë, Chem. Centralblatt, *1870*, 683.

di acido cloroplatinico con un leggero eccesso di soluzione di acido jodidrico, esente di Jodio libero. In tal modo non tarda a precipitare, in seno al liquido intensamente colorato, il tetrajoduro di platino, come polvere nera e pesante: dopo aver prolungato per una mezz' ora l'azione del bagno-maria, ho decantato il liquido sovrastante e lavato ripetutamente con acqua bollente e per decantazione il tetrajoduro depostosi. Raccoltolo poi su filtro e seccato in stufa a 100°, prima di impiegarlo, ho voluto sottoporlo ad analisi i di cui risultati, concordanti con la formola PtI^4, sono i seguenti:

1° Grammi 0,3821 di sostanza, calcinati in crogiuolo di platino, lasciarono per residuo gr. 0,1056 di platino.

2° Grammi 0,2780 di sostanza, egualmente calcinati, dettero gr. 0,0764 di platino.

Ossia in 100 parti:

	Trovato		Calcolato per PtJ^4
	I	II	
Pt	27,64	27,48	27,74

Accertatomi così della purezza del tetrajoduro, ho preparato una sua soluzione nell' alcool etilico, avendo cura di operare a freddo per evitare qualche possibile decomposizione. Il tetrajoduro di platino lasciato infatti, alla temperatura ordinaria, per una mezza giornata di tempo, a contatto con una sufficiente quantità di alcool etilico a 95°, vi si discioglie completamente, colorando il liquido in bruno marrone intensissimo. Così però si comporta il tetrajoduro preparato da tempo e perfettamente secco, giacchè quello di preparazione recente ed ancora non seccato, cioè umido di acqua, si discioglie con grande rapidità nell' alcool.

La soluzione alcoolica del tetrajoduro conservato alla luce in capo a qualche tempo si decompone, colorandosi in giallo-verde, onde va tenuta all' oscuro e più che altro è bene prepararla volta per volta che può occorrere. Essa non lascia precipitare il tetrajoduro che per aggiunta di almeno tre volumi di acqua. Ha reazione nettamente acida e scompone i carbonati. Trattando questa soluzione alcoolica con soluzioni acquose molto concentrate di sali di argento, piombo, tallio e mercurio, si ottengono dei precipitati che analizzati risultarono essere i sali di un acido tetrajodoplatinico:

$$[PtI^4(OH)^2]H^2$$

perfettamente analogo ai due acidi, clorurato e bromurato, menzionati in principio.

Sale di Argento.

La soluzione alcoolica di tetrajoduro di platino trattata a temperatura ordinaria con leggero eccesso di soluzione acquosa di nitrato di argento al

dieci per cento, fornì un precipitato color marrone-scuro, il quale ben lavato con acqua, nella quale non si scioglie affatto, ed essicato nel vuoto, offrì i seguenti dati analitici:

1° Grammi 0,4874 di sostanza ridotti in crogiuolo di Rose a mezzo di una corrente di idrogeno, lasciarono per residuo gr. 0.2115 di platino ed argento.

2° Grammi 0,4656 di sostanza, identicamente trattati, dettero gr. 0,1994 di platino ed argento.

3° Grammi 0,4414 di sostanza, identicamente trattati, dettero gr. 0,1896 di platino ed argento. Questo residuo staccato con cura dal crogiuolo e trattato ripetute volte con acido solforico concentrato lasciò indisciolti gr. 0,0888 di platino.

4° Grammi 0,3928 di sostanza fusi con idrato sodico dettero gr. 0,3852 di joduro di argento, pari a gr. 0,2081 di Jodio.

Riferendosi a 100 p. di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per $[PtI^4(OH)^2]Ag^2$
	I	II	III	IV	
$Pt + Ag^2$	43,4	42,83	42,96	—	43,13
Pt	—	—	20,12	—	20,46
Ag	—	—	22,84	—	22,67
J	—	—	—	53,0	53,30

Sale di piombo.

È un precipitato grigio marrone che si ottenne trattando la soluzione alcoolica del tetrajoduro, a temperatura ordinaria, con una acquosa concentrata di acetato di piombo neutro. Lavato bene con acqua, ed essicato nel vuoto su acido solforico, si sottopose all'analisi, e fornì i dati seguenti:

1° Grammi 0,3948 di sostanza trattati con acido solforico concentrato, in crogiuolo di platino, dettero gr. 0,2653 di platino e di solfato di piombo.

2° Grammi 0,2166 di sostanza ugualmente trattati dettero gr. 0,1452 di platino e di solfato di piombo.

3° Grammi 0,4705 di sostanza egualmente trattati dettero gr. 0,3177 di platino e solfato di piombo. Questo residuo esaurito con soluzione di acetato di ammonio lasciò indietro gr. 0,0791 di platino.

4° Grammi 0,3716 di sostanza, fusi con idrato sodico, dettero gr. 0,2955 di joduro di argento, pari a gr. 0,1597 di Jodio.

Riportando questi risultati a 100 p. di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per $[PtI^4(OH)^2]Pb$, $Pb(OH)^2$
	I	II	III	IV	
$Pt + PbSO^4$	67,20	67,04	67,52	—	67,63
Pt	—	—	16,81	—	16,45
Pb	—	—	34,63	—	34,95
J	—	—	—	42,97	42,85

Sale di tallio.

È un precipitato color rosso-marrone che si ottenne, a temperatura ordinaria, dalla soluzione alcoolica del tetrajoduro con soluzione acquosa concentrata di acetato talloso. Ben lavato con acqua ed essicato nel vuoto fornì all'analisi i seg. risultati:

1° Grammi 0,4104 di sostanza calcinati in navicella di porcellana ed in corrente di acido cloridrico lasciarono per residuo gr. 0,0710 di platino.

2° Grammi 0,5426 di sostanza, per i quali si adoperò il metodo di separazione, usato nell'analisi del sale di tallio dell'acido tetracloroplatinico (1), dettero gr. 0,0932 di platino e gr. 0,3115 di joduro talloso, pari a gr. 0,1921 di tallio.

3° Grammi 0,3124 di sostanza, fusi con idrato sodico, dettero gr. 0,2570 di joduro di argento, pari a gr. 0,1388 di Jodio.

Questi risultati riferiti a 100 p. di sostanza, dànno:

	Trovato			Calcolato per $[PtI^4(OH)^2]Tl^2$
	I	II	III	
Pt	17,30	17,18	—	17,03
Tl	—	35,41	—	35,68
J	—	—	44,45	44,35

Sale di mercurio.

Trattando la soluzione alcoolica di tetrajoduro, a temperatura ordinaria, con soluzione acquosa concentrata di cloruro mercurico, in presenza di acetato di sodio, si ebbe un precipitato color marrone, il quale lavato con acqua ed essicato nel vuoto su acido solforico, fornì i seguenti dati analitici:

(1) A. Miolati, loc. cit.

1° Grammi 0,3233 di sostanza calcinati lasciaron per residuo gr. 0,0672 di platino.

2° Grammi 0,3199 di sostanza vennero calcinati in corrente d'aria, raccogliendo opportunamente il mercurio distillato e dosando poi questo come solfuro. Si ottennero così gr. 0,0662 di platino e gr. 0,0804 di solfuro di mercurio, pari a gr. 0,0693 di mercurio.

3° Grammi 0,3426 di sostanza fusi con idrato sodico dettero gr. 0,3413 di joduro di argento, pari a gr. 0,1844 di Jodio.

Riferendosi a 100 p. di sostanza, si ha:

	Trovato			Calcolato per $[PtI^4(OH)^2]Hg$
	I	II	III	
Pt	20,78	20,70	—	20,80
J	—	53,83	—	54,18
Hg	—	—	21,67	21,39

Ho fatto anche dei tentativi per ottenere il sale di bario cristallizzato, neutralizzando la soluzione alcoolica del tetrajoduro con una acquosa di barite. Per tale aggiunta, a temperatura ordinaria, la soluzione si scolora fino a diventare giallognola, rimanendo limpida; in capo però a pochi minuti essa si riduce e precipita platino metallico, e non mi fu in tal modo possibile di preparare il sale suddetto.

Dalle ricerche suesposte risulta perciò completa l'analogia fra i tre composti alogenati platinici $PtCl^4$, $PtBr^4$, PtI^4, i quali sono da considerarsi come anidridi acide alogenate.

Chimica. — *Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento dell'iodio* [1]. Nota IV di G. Oddo [2], presentata dal Socio Paternò.

È nota l'interessante relazione ch'esiste tra le pressioni parziali in un miscuglio di due vapori e le concentrazioni di esso e della soluzione che lo fornisce.

[1] Vedi note precedenti: Oddo e Serra, Gazz. chim. ital. 1899, II, 318 e 343; Rendic. Acc. Lincei 1899, 244 e 281; Oddo, Gazz. chim. ital., ibid. 330 e Rend. Acc. Lincei, ibid. 252

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale dell'Università di Cagliari.

Studiata già da molti (1), venne espressa da Planck (2) con la formola:

$$c - c_1 = \frac{p - p_1}{p}$$

e da Nernst (3) con l'altra:

$$c - c^1 = \frac{p - p_1}{p}\left(\frac{1}{1 + \frac{n}{N}}\right)$$

nelle quali c indica la concentrazione molecolare della soluzione, c_1 quella del vapore, p la tensione di vapore del solvente e p_1 quella della soluzione, n il numero delle molecole del corpo disciolto e N quelle del solvente.

Per soluzioni diluite la formola di Nernst acquista quasi il valore di quella di Planck, poichè $\frac{1}{1 + \frac{n}{N}}$ si avvicina all'unità.

Beckmann e Stock (4) se ne avvalsero per determinare il valore della correzione d'apportare ai pesi molecolari ricavati col metodo ebullioscopico, quando la sostanza disciolta è volatile col solvente. Basterà adottare invece della nota espressione:

$$\text{(I)} \qquad M = \frac{g_2 \cdot \Gamma}{\Delta}$$

l'altra

$$\text{(II)} \qquad M = \frac{(g_2 - g_1)\,\Gamma}{\Delta}$$

nelle quali M esprime il peso molecolare che si cerca, g_2 la concentrazione della soluzione, g_1 quella del vapore, Γ la costante d'inalzamento molecolare d'ebollizione e Δ l'inalzamento del punto d'ebollizione.

E poichè

$$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$$

è quasi costante per le diverse concentrazioni, si può fare anche uso di quest'altra formola:

$$\text{(III)} \qquad M = \frac{g_2\,(1 - \alpha)\,\Gamma}{\Delta}$$

(1) Wied. Ann. *14*, 48 (1881).
(2) Zeits. phys. Ch. II, 408 (1888).
(3) Zeits. phys. Ch. VIII, 110 (1891).
(4) Zeits. phys. Ch. XVII, 110 (1895).

Quindi per determinare il peso molecolare col metodo ebullioscopico delle sostanze volatili occorre conoscere, oltre i soliti dati, la concentrazione del vapore.

Per raggiungere questo scopo Beckmann e Stock hanno pensato di distillare separatamente una soluzione di concentrazione conosciuta della sostanza da esaminare e raccoglierne diverse frazioni: determinato il peso della sostanza distillata col solvente, calcolavano la concentrazione di ciascuna frazione (che indicava quella del vapore corrispondente (g_1)), inoltre la concentrazione che aveva la soluzione bollente che le aveva fornite, al principio e alla fine, ne pigliavano la media (g_2), e ottenuti così i valori di g_1 e g_2 ricavavano α. Eseguivano poscia, in una seconda serie d'esperienze, le determinazioni ebullioscopiche col processo ordinario, e nelle grandezze molecolari osservate per le diverse concentrazioni introducevano la correzione indicata da tale rapporto secondo la formola (III).

Questo processo è lungo e costoso, perchè richiede per ogni sostanza due serie diverse d'esperienze; le quali poi, appunto perchè eseguite in serie, possono condurre per un cumulo di piccoli errori a dei risultati del tutto erronei. Ciò difatti credo sia capitato a Beckmann e Stock nell'applicare il loro metodo allo studio delle soluzioni bollenti di iodio, come dimostrerò nel corso di questa Memoria.

Col metodo che io descrivo, invece, una sola esperienza è sufficiente a fornirci tutti i dati necessarî per il calcolo del peso molecolare con le formole (II) o (III), ed in modo così semplice e rapido, che chiunque lo può subito eseguire se, compita la determinazione ebullioscopica, gl' insorga il dubbio, per i risultati ottenuti, che la sostanza disciolta sia volatile col solvente.

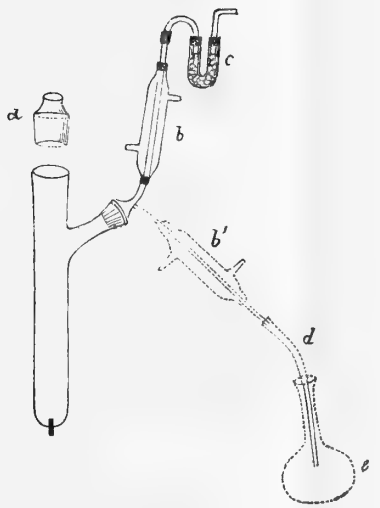
Io ho fatto uso nelle mie ricerche del solito apparecchio Beckmann [1] con refrigerante [2]; ma al tubo ebullioscopico, per la natura delle sostanze da studiare, adattai turaccioli di vetro a smeriglio, anzichè, come si suole, di sughero. Quello destinato al passaggio del termometro aveva la forma a, rappresentata nella figura, affinchè vi si potesse adattare o per mezzo d' un anello di sughero d' un millimetro circa di spessore o a dirittura a smeriglio.

L'altro turacciolo, pure pervio, era saldato ad una canna d'un piccolo refrigerante a corrente d' acqua, e questa canna era piegata ad angolo tale che il refrigerante potesse mettersi o in posizione quasi verticale (b) a ricadere, ovvero, facendola girare di 180°, in posizione inclinata (b_1) per distillare, lasciando tutto il resto dell'apparecchio immutato.

Le determinazioni venivano condotte nel seguente modo: eseguivo anzitutto al solito la lettura del punto d'ebollizione del solvente, aggiungevo la

(1) Zeits. phys. Ch. VIII, 224 (1891).
(2) Ibid. XV, 663 (1894).

sostanza da studiare e, tenendo il refrigerante del tubo ebullioscopico a ricadere (*b*) e chiuso con tubo ad U a cloruro di calcio (*c*), eseguivo la lettura del punto d'ebollizione della soluzione. Quindi, sospendendo per comodità per pochi istanti il riscaldamento, facevo ruotare il refrigerante sino a condurlo alla posizione (b_1), al tubo ad U sostituivo un piccolo allunga (*d*) unito anch'esso a smeriglio alla canna del refrigerante, destinato a portare il li-



quido che distillava nel fondo d'una boccetta (*e*) a turacciolo smerigliato e tarata, circondata di ghiaccio. Raccolta una certa quantità di liquido, leggevo di nuovo la temperatura, staccavo l'allunga e ritornavo a pesare la boccetta. Nel liquido raccolto determinavo la quantità di sostanza distillata col solvente e quindi calcolavo tutti gli altri dati necessarî, come risulta dalle tavole.

Quando la titolazione della sostanza distillata col solvente si può eseguire volumetricamente, come nel caso dell'iodio, tutto il processo dell'operazione non richiede più di due ore e in cinque ore senza disagio se ne possano compire bene tre successive.

La quantità di solvente che impiegavo in ciascuna determinazione era tale da superare di circa un centimetro il bulbo del termometro, e sospendevo la distillazione quando il livello del liquido raggiungeva quasi l'apice del bulbo, evitando sempre che rimanesse in parte scoperto.

Pel bagno esterno impiegavo il medesimo solvente, al quale aggiungevo piccola quantità di altra sostanza non volatile.

Fissato il metodo, ho ripreso lo studio delle soluzioni bollenti di iodio e di alcune cloroanidridi inorganiche, a complemento delle ricerche precedentemente pubblicate da me in collaborazione col dott. E. Serra, citate avanti.

I.

Iodio.

Nel lavoro predetto (1), dopo aver riassunto le divergenze inesplicabili che esistono nei risultati sperimentali, pubblicati da diversi chimici, sulla grandezza molecolare dell'iodio in soluzione, facemmo notare come anche alcuni dei nostri, ricavati col metodo ebullioscopico, differivano di molto da quelli trovati da Beckmann e Stock, e segnatamente le determinazioni eseguite in soluzione in benzolo e in alcool etilico. Difatti, calcolando il peso molecolare con la formola (I), noi abbiamo ottenuto 273-279 nel benzolo e 265-275 nell'alcool; e Beckmann e Stock invece 335-360 nel primo e 330-342 nel secondo solvente; mentre $I_2 = 253{,}70$.

Essi attribuirono le cifre così elevate ottenute alla volatilità dell'iodio; e difatti, determinando α della formola (III), trovarono che raggiungeva un altissimo valore (0,27-0,30 e 0,27-0,33) e, apportata questa correzione, i pesi mole colari osservati si riducevano rispettivamente a 223-235 e 235-241, cioè per la molecola di 2 atomi.

Sicuri delle nostre esperienze più volte ripetute, non esitammo a sollevare dei dubbi anche sul valore della correzione introdotta da questi due chimici; scrivemmo difatti allora (2). « Noi non sappiamo spiegare questa grande divergenza nei risultati sperimentali; siamo però convinti, per ripetute esperienze, che durante le determinazioni la quantità di iodio che si volatizza è piccolissima tanto da colorare talvolta poco o quasi affatto i vapori del solvente, e quindi anche i valori della correzione introdotta dai predetti chimici non si possono ritenere del tutto esatti ».

E non ci eravamo ingannati! Stabilito il metodo sperimentale, che ho descritto, ho voluto ripetere gran parte dell'esperienze ebullioscopiche di Beckmann e Stock, ed ho potuto dimostrare che questi due chimici son caduti in grave errore sia nelle determinazioni ebullioscopiche che in quelle per fissare il valore di α della formola (III).

I risultati, da me ottenuti, sono riportati nelle seguenti tavole, dove con l'espressione « concentrazione iniziale e finale » intendo dire quelle che aveva la soluzione bollente prima d'eseguire la distillazione e alla fine di questa; sotto l'espressione « molecola osservata » riporto i valori che risultano calcolando il peso molecolare con la formola (I), e con « molecola corretta » quelli che risultano calcolando con la formola (II) o (III).

Riporto inoltre brevemente per comodità del lettore, sotto la rubrica « Nostri risultati precedenti » quelli pubblicati da me e Serra per i solventi che allora studiammo, assieme ai risultati di Beckmann e Stock per $\frac{g_1}{g_2} = \alpha$ e per la

(1) Gazz. chim. ital. 1899, II, 343-347 e Rend. Acc. Lincei 1899, 282-284.
(2) Loco citato.

molecola osservata e corretta, affinchè se ne possa constatare la grave divergenza.

In cloroformio.

$\Gamma = 36{,}6$ $\quad I_2 = 253{,}70$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4,0397	5,2865	5,3754
	iodio in essa contenuto	0,0026	0,0047	0,0080
	solvente	4,0371	5,2818	5,3674
	concentrazione (g_1)	0,0644	0,0889	0,1491
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,4148	2,0499	3,5724
	» finale	1,6241	2,4895	4,2906
	media (g_2)	1,51945	2,2697	3,9315
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,04	0,04	0,04
Inalzamento del punto d'eboll.	a concentrazione iniziale	0°,198	0°,246	0°,445
	» finale	0, 216	0, 298	0, 511
	media (Δ)	0, 207	0, 272	0, 478
Molecola	osservata	268	305	301
	corretta	257	292	289

In questo e in tutti i casi consimili, che riscontreremo in questo lavoro, ho tralasciato d' introdurre anche la correzione che deriva dal fatto che il corpo in soluzione è in parte polimerizzato, mentre non lo è forse allo stato di vapore mescolato con quello del solvente. Beckmann e Stock trovarono invece in cloroformio:

$\alpha = 0{,}27$; 0,28 ; 0,26 ; 0,28 ; 0,27

e per le concentrazioni:		0,800	1,670	2,240	3,530	4,220	5,260
molecola	osservata	325	306	301	321	316	316
	corretta	277	233	220	234	231	231

In tetraclorometane.

$\Gamma = 52{,}6$ $\quad I_2 = 253{,}70$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	3,8061	2,6134	3,1974
	iodio in essa contenuto	0,0097	0,0077	0,0101
	solvente	3,7964	2,6057	3,1873
	concentrazione (g_1)	0,2555	0,2955	0,3168
Soluzione bollente	a concentrazione iniziale	1,6566	2,4013	3,8197
	» finale	1,9156	2,6687	4,4047
	media (g_2)	1,7861	2,5350	4,1122
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0.14	0,12	0,08
Inalzamento del punto d'eboll.	a concentrazione iniziale	0°,234	0°,343	0°,545
	» finale	0, 266	0, 385	0, 618
	media (Δ)	0, 250	0, 364	0, 581
Molecola	osservata	376	366	372
	corretta	325	322	342

Nostri risultati precedenti, molecola non corretta: 382-392.

Beckmann e Stock invece ottennero:

$\alpha = 0{,}35$; 0,38 ; 0,38 ; 0,38 ; 0,38 ; 0,34

e per le concentrazioni: 1,040 ; 2,075 ; 3,904 ; 6,001

molecola	osservata	370	365	374	382
	corretta	233	230	236	241.

In alcool etilico.

$\Gamma = 11{,}5$ $\quad I_2 = 253{,}70$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4 1808	5,0630	2,0542
	iodio in essa contenuto	0,0012	0,0024	0,0012
	solvente	4,1796	5,0606	2,0530
	concentrazione (g_1)	0,0287	0,0474	0,0584
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,1652	1,7062	3,1218
	» finale	1,7364	2,8460	3,8095
	media (g_2)	1,4508	2,2761	3,4654
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,02	0,02	0,016
Inalzamento del punto d'eboll.	a concentrazione iniziale	0°,053	0°,075	0°,142
	» finale	0, 077	0, 119	0, 174
	media (Δ)	0, 065	0, 097	0, 158
Molecola	osservata	257	269	252
	corretta	252	264	248

Nostri risultati precedenti per concentrazioni variabili da 1,8 a 6 %: 266-275, molecola non corretta.

Beckmann e Stock invece ottennero:

$\alpha = 0{,}27$; 0,29 ; 0,28 ; 0,33 ; 0,33 ; 0,29

e per le concentrazioni: 3,217 ; 6,650 ; 9,533 ; 11,850

molecola	osservata	342	334	330	334
	corretta	241	235	233	235

In benzolo.

$\Gamma = 26{,}7$ $\quad I_2 = 253{,}70$

		Determinazioni I	Determinazioni II
Frazione distillata	peso	3,2036	2,4310
	iodio in essa contenuto	0,0004	0,0012
	solvente	3,2032	2,4298
	concentrazione (g_1)	0,0124	0,0494
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,0192	3,4818
	» finale	1,3552	4,0320
	media (g_2)	1,1872	3,7569
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,01	0,01
Inalzamento del punto d'eboll.	a concentrazione iniziale	0°,104	0°,340
	» finale	0, 140	0, 400
	media (Δ)	0, 122	0, 370
Molecola	osservata	260	271
	corretta	257,4	268

Nostri risultati precedenti per concentrazioni che variavano da 2,2 a 9,2: 273-279, molecola non corretta.

Beckmann e Stock invece ottennero:

$$\alpha = 0{,}27 \; ; \; 0{,}30 \; ; \; 0{,}30 \; ; \; 0{,}28 \; ; \; 0{,}30 \; ; \; 0{,}30$$

e per le concentrazioni: 2,055 ; 2,918 ; 5,311 ; 8,762 ; 1,804 ; 3,110 ; 5,080

molecola	osservata	354	342	343	344	347	360	335
	corretta	251	242	233	233	246	255	238

Oltre che in questi quattro solventi Beckmann e Stock studiarono le soluzioni in cloruro d'etilene, alcool metilico, metilal e acetone, liquidi dei quali non ho potuto per ora disporre, per ripetere le loro esperienze; che i risultati ottenuti con gli altri quattro studiati mi autorizzano a ritenere anch'esse erronee.

E però concludendo su questa parte del mio lavoro, noi non possiamo affermare in generale, come fanno Beckmann e Stock, che la molecola dell'iodio nelle diverse soluzioni bollenti sia sempre costituita da due atomi: risulta dalle mie esperienze invece che, a molecola corretta, ciò si può asserire per le soluzioni in benzolo (rossa), alcool etilico (rosso bruna) e solfuro di carbonio (violetta) [1]; invece in cloroformio (soluzione violetta) a concentrazioni superiori al 2 % si ottengono valori superiori di circa $^1/_5$ a quelli calcolati per la molecola biatomica, e in tetraclorometane (soluzione violetta) fin da deboli concentrazioni valori ancora superiori, che se non corrispondono

[1] Nel lavoro col dott. Serra.

per la molecola di tre atomi, poco probabile, ora, come nella nota precedente, mi conducono a concludere che le molecole dell'iodio nelle soluzioni bollenti in cloroformio e più ancora in tetracloruro di carbonio risultano d'un miscuglio di I_2 e I_4; e questo stato di polimerizzazione parziale pare non abbia alcuna influenza sul colorito della soluzione, difatti sono violette sia le soluzioni in questi due ultimi solventi, che quelle in solfuro di carbonio, la quale contiene esclusivamente molecole I_2.

Chimica. — *Sulla formula del Triazolo.* Nota II [1] di GUIDO PELLIZZARI [2], presentata dal Socio PATERNÒ.

PARTE SPERIMENTALE.

Ad una parte di feniltriazolo simmetrico sciolto in un miscuglio di 11 p. di acido solforico e 50 p. d'acqua, si aggiunsero poco per volta 11 p. di permanganato potassico sciolto in 175 p. d'acqua. La reazione fu eseguita con 40 gr. di prodotto preso in porzioni di 5 gr. e in bottiglie di circa 3 litri. La temperatura dell'ambiente era di 22-24° e la decolorazione del liquido avvenne in circa sette giorni. Si filtrò per separare gli ossidi di manganese, quindi si saturò il liquido con carbonato sodico fino a reazione alcalina, poi si rese leggermente acido con acido acetico e infine con acetato di rame e si precipitò il composto ramico triazolico in fiocchi azzurri, che furono raccolti, ben lavati e in sospensione nell'acqua, decomposti con idrogeno solforato. Separato il solfuro di rame, il liquido fu fatto bollire fino a scomparsa dell'idrogeno solforato e quindi fu trattato con barite in eccesso per togliere l'acido solforico eppoi con anidride carbonica. La soluzione limpida filtrata fu evaporata a leggero calore a b. m. e si ebbe infine il triazolo sublimato nei suoi caratteristici aghi sottili, bianchi fusibili a 120°.

Gr. 0,1086 di sostanza dettero 55 cc. d'azoto a 12°,2 e 764 mm.

trovato per %	calcolato per $C_2N_3H_3$
N 60,80	60,87

È da notarsi che tanto l'Andreocci che io siamo arrivati alla stessa sostanza con reazioni fatte a temperatura ordinaria ed evaporando poi la soluzione a 60-70° circa. La identificazione del prodotto fu fatta anche coi seguenti sali:

(1) Vedi questi Rendiconti, 1° sem. 1901, pag. 297.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Genova.

Triazolo dal Feniltriazolo asimmetrico:	*Triazolo dal Feniltriazolo simmetrico:*
Aghi bianchi fusibili a 120-121°	Aghi bianchi fusibili a 120-121°
Sublima sotto 100°	Sublima sotto 100°
Nitrato fonde a 138°	Nitrato fonde a 139°
Ossalato fonde 241°	Ossalato fonde a 241-242°
Cloroplatinato cristallizzato fonde a 73-75°	Cloroplatinato cristallizzato fonde a 73-75°
Cloroplatinato anidro si decompone a 167-170° — Bollito con acqua dà il composto Anderson.	Cloroplatinato anidro si decompone a 167-170° — Bollito con acqua dà il composto Anderson.

Nessuna differenza si notò nelle solubilità coi diversi solventi: identici apparivano anche al microscopio i composti ottenuti col nitrato d'argento, cloruro mercurico, solfato ramico, cloruro ramico in presenza di acido cloridrico.

Ecco la descrizione di questi sali che mi servirono alla identificazione:

Cloroplatinato di triazolo $(C_2N_3H_3.HCl)_2\ PtCl_4,\ 6H_2O$. Si forma sciogliendo il triazolo in quanto basta di acido cloridrico concentrato, quindi si aggiunge cloruro platinico molto concentrato. Talvolta si separa subito il prodotto, spesso invece rimane in soluzione soprassatura ed allora si bagna col liquido la punta di una bacchetta, si evapora a leggero calore finchè si veda un po' di sostanza solida e con questa si eccita la cristallizzazione e si ottengono aghi sottilissimi, lunghi, splendenti giallo-aranciati. Furono raccolti e lavati con acido cloridrico di media concentrazione

gr. 0,3282 di sostanza seccata all' aria persero alla stufa, prima a 60-70°, eppoi a 100° fino a peso costante gr. 0,0538 di acqua;

gr. 0,9519 di sostanza cristallizzata dall'acido cloridrico persero alla stufa gr. 0,158 di acqua;

gr. 0,413 di sostanza cristallizzata dall' acido cloridrico persero alla stufa gr. 0,0693 di acqua e per calcinazione lasciarono gr. 0,123 di platino.

	trovato per %	calcolato
H^2O	16,36 — 16,59 — 16,77	16,46
Pt	29,78	29,72

Il cloroplatinato idrato fonde a 73-75° o per meglio dire si scioglie nella sua acqua di cristallizzazione. Quando è anidro comincia a rammollirsi a 167° e si decompone a 170°. All'aria riprende l'acqua di cristallizzazione lentamente: in una prova fatta dopo tre ore era aumentato del 4 % in peso; dopo una notte di 13,26 % e dopo 24 ore aveva ripreso quasi totalmente le molecole d'acqua. È assai solubile anche a freddo nell' acido cloridrico, nell'acqua e un po' meno nell'alcool.

Tetracloroplatotriazolo $(C_2N_3H_3)_2PtCl_4$. Il cloroplatinato normale scaldato a 170° per varie ore perde due molecole di acido cloridrico. La determinazione fu fatta partendo dal sale idrato

gr. 0,3282 di sostanza persero a 100° gr. 0,0538 di acqua, e a 170° fra acqua e acido cloridrico il peso diminuì di gr. 0,0932.

	trovato per %	calcolato
$2HCl + 6H^2O$	28,10	27,59

Scaldato a temperatura superiore perde ancora acido cloridrico. Si può ottenere anche facendo bollire per un paio d'ore la soluzione acquosa e diluita del cloroplatinato normale. Il liquido diventa opalescente e quindi si depone una polvere tenuissima come il magistero di solfo. Questo precipitato di un colore giallo chiaro anche al microscopio non mostra nessuna apparenza cristallina. È pochissimo solubile nell'acqua bollente e insolubile a freddo. Scaldato fino a 270° non fonde.

Gr. 0,3248 di sostanza dettero per calcinazione gr. 0,1323 di platino.

	trovato per %	calcolato
Pt	40,76	41,05

La sostanza, che ha tutte le caratteristiche dei composti Anderson, mostra però un comportamento nuovo coll'acido cloridrico bollente: riprende cioè le due molecole di acido cloridrico riformando il cloroplatinato normale. La reazione è dunque reversibile

$$(C_2N_3H_3 . HCl)_2\ PtCl_4 \rightleftharpoons 2HCl + (C_2N_3H_3)_2PtCl_4$$

Werner ha potuto, è vero, riottenere il cloroplatinato normale di piridina dal composto Anderson (1), ma scaldando in tubo chiuso a 180° per varie ore. Nel nostro caso basta far bollire la sostanza nell'acido cloridrico concentrato per pochi minuti perchè si sciolga, e per concentrazione si ottiene il cloroplatinato normale nei soliti aghi fusibili a 70-75° e decomponibili a 167-170°, se sono anidri.

Nitrato di triazolo $C_2N_3H_3 , NO_3H$. Si forma sciogliendo nell'acido diluito il triazolo e si ottengono dei cristallini bianchi, duri, prismatici assai solubili nell'acqua anche a freddo e discretamente nell'alcool. Fonde a 138° in un liquido incoloro da cui si separano delle bollicine. Questo sale è stato ottenuto anche da Hantzsch e Silberrad dalla tetrazolina coll'acido nitroso (1).

gr. 0,154 di sostanza dettero 55,2 cc. d'azoto a 18° e 765 mm.

	trovato per %	calcolato
N	42,45	42,42

(1) Zeits. anorg. Ch. XV, 123.

Ossalato di triazolo $C_2N_3H_3 . C_2O_4H_2$. Si ottiene aggiungendo del triazolo ad una soluzione satura di acido ossalico. Cristallizzato dall'acqua si ottiene in piccolissimi cristalli bianchi lucenti che si decompongono a 241°. E poco solubile nell'acqua fredda e discretamente a caldo.

Gr. 0,1802 di sostanza dettero 39 cc. d'azoto a 9° e 762 mm.

	trovato per %	calcolato
N	26,44	26,41

Triazolo ramico $(C_2N_3H_2)_2$ Cu. Fu preparato aggiungendo solfato ramico alla soluzione di triazolo. Precipita come polvere azzurra indistintamente cristallina, insolubile nell'acqua e solubile negli acidi.

gr. 0,6965 di sostanza dettero gr. 0,279 di ossido di rame.

	trovato per %	calcolato
Cu	31,77	31,87

Questo triazolo ramico trattato con acido cloridrico piuttosto concentrato si converte in una polvere verde cristallina caratteristica poco solubile. Lo stesso prodotto si produce con una soluzione cloridrica di triazolo e cloruro ramico. Raccolto e lavato con acido cloridrico si mantiene inalterato, mentre lavato con acqua pura si dissocia e si riforma il triazolo ramico.

Nel terminare questa Nota annunzio che facendo agire l'ioduro di metile sul composto sodico del triazolo, ho ottenuto un *n*- metiltriazolo fusibile a 20° e bollente a 183°. Siccome è differente da quello simmetrico di Freund sembra che la sostituzione sia avvenuta in posizione asimmetrica. Questo fatto però nulla toglie alle considerazioni di tautomeria riguardanti la formula del triazolo.

Geologia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei.* I. *Salotrachite nera ad augite ed egirina.* Nota di E. Manasse, presentata dal Corrispondente De Stefani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Berichte, 1900, pag. 85.

Geologia. — *Stato attuale dei ghiacciai del Monte Rosa.* Nota di G. Dainelli, presentata dal Corrisp. C. De Stefani.

Nell'agosto 1901 mi recavo nella valle di Gressoney, onde iniziare una serie di osservazioni regolari intorno ai ghiacciai del versante italiano del Monte Rosa, assegnando a questo, come limite occidentale, il colle del Lys, e non già quello del Teodulo, che segna, secondo me, il limite verso Ovest del più esteso *gruppo* del Monte Rosa. Disgraziatamente una continua avversità del tempo mi impedì di fare osservazioni e rilievi completi ed accurati; ma, siccome ho potuto mettere abbastanza numerosi segnali, e stabilire gli alternati movimenti di progresso e ritiro dei due massimi ghiacciai, del Lys e di Macugnaga, nel secolo decorso, così non reputo privo di interesse presentare adesso un resoconto sommario del mio operato e dei miei studî.

Richter, nelle sue recenti ricerche di morfologia dell'alta montagna, dice: « Nelle Alpi Pennine tutte le proporzioni sono molto grandi, e i tipici circhi, per questo, poco frequenti » (1). Questa affermazione invero mi era parsa strana, e per questo nelle mie numerose escursioni andai osservando se veramente mancassero o fossero assai rare quelle forme d'alta montagna, che Richter descrisse più che altro dalle Alpi Orientali; ed infatti il gruppo del Monte Rosa, alta montagna per eccellenza, per quella piega che il suo crinale presenta circa alla metà della sua estensione, manda radialmente in quasi tutte le direzioni numerose vallate, presentando così quella condizione, che, secondo Richter, facilita appunto la formazione di circhi.

E circhi tipici, dalle forme più o meno spiccate, si trovano sotto al colle delle Cime Bianche (2980 m.), dalle due parti del passo di Bettolina (2896 m.), a Nord del Monte Rosso (2990 m.), e, se si passa ad Oriente della valle di Gressoney, si incontrano pure a Nord del Monte Telcio (2833 m.), ad Ovest del Seehorn (2577 m.), nella parte superiore del vallone di Indren, nella conca di Weissealpe, sotto al col d'Olen (2865 m.), al colle dei Salati, al colle delle Pisse (3162 m.); e gli esempi si potrebbero moltiplicare all'infinito; noterò invece la tipica forma ad U del vallone delle Pisse, e quella simile, assai recente, e veramente bella come esempio di erosione glaciale e meteorica, che si osserva in basso della fronte del ghiacciaio di Bors.

Del resto, per non allontanarmi dallo scopo che mi ero prefisso, ho dovuto limitare le osservazioni morfologiche, ed invece ho posto segnali alle fronti dei ghiacciai di Macugnaga (bocca destra e sinistra), di Bors, di Indren (bocca destra e sinistra), e del Lys; ed ho rilevato la parte terminale degli ultimi

(1) E. Richter, *Geomorphologische Untersuchungen in den Hochalpen.* Petermanns Mittheilungen, 1900, Heft 132, pag. 101.

quattro. Per il ghiacciaio di Macugnaga non ho potuto fare altrettanto, causa la continua e dirotta pioggia che mi perseguitò durante il mio breve soggiorno nella valle Anzasca, e mi posso ben chiamare fortunato se, in tale avversità di tempo, ebbi modo di porre i segnali alle due bocche; ai ghiacciai di val Sesia non ho avuto mezzo di porre segni di riferimento, nè di fai rilievi, a causa della continua caduta di massi, pietre e blocchi di ghiaccio dalle loro fronti, che terminano presso a morene frananti, e su terreno estremamente scosceso, e quasi affatto impraticabile.

Sui ghiacciai del Monte Rosa non abbiamo studî recenti, e solo notizie sparse sporadicamente qua e là negli scritti di scienziati, viaggiatori e alpinisti; solo su quello di Macugnaga si è soffermato più a lungo lo Stoppani (1), per il periodo che va dal 1870 al 1881; riunendo e riassumendo queste varie notizie, e confrontandole con i diversi e successivi rilevamenti topografici, vedremo con abbastanza buona approssimazione le alternative di progresso e di ritiro attraverso alle quali sono passati i ghiacciai di Macugnaga e del Lys nel secolo decorso; per i ghiacciai minori, e intermedî tra questi primi, poco conosciuti e poco visitati quasi fino a pochi anni fa, le notizie o sono affatto nulle, o si riducono a quelle che si possono ricavare da rilievi cartografici non molto esatti, e da poche comunicazioni orali di guide e alpigiani.

Quanto al ghiacciaio di Macugnaga sappiamo dunque, per opera dell'Amoretti (2), che nel 1780 aveva un massimo di espansione; degli anni immediatamente successivi nessuna notizia è rimasta, ma si può supporre, con molta probabilità di coglier nel giusto, che succedesse un ritiro al quale fece poi seguito nei primi anni del secolo 19° un nuovo progresso. Di questo si ha la prova nell'immenso sviluppo del ghiacciaio nel 1820 (3), il quale anno può segnare (4) il principio di un altro ritiro, che, assai sensibile già nel 1824 (5) durò per un periodo assai lungo, perchè solo nel 1845 (6) si può arguire debba esser ricominciato l'avanzamento. Nel 1850 il ghiacciaio era assai accresciuto (7), e nel 1855 proseguiva nel suo progresso (8), tanto

(1) A. Stoppani, *Corso di Geologia. — Il bel Paese. — Sull'attuale regresso dei ghiacciai nelle Alpi* (R. Acc. dei Lincei, 1882, vol. VI, serie 3ª).

(2) Amoretti, *Viaggio da Milano ai tre laghi, Maggiore, di Lugano e di Como, e ne' monti che li circondano.* Milano, 1817.

(3) *Carta topografica degli Stati di S. M. Sarda,* 1 : 50,000. Torino, 1851-1871. Rilievo del 1820-1821.

(4) A. Stoppani, *Il bel Paese.*

(5) Velden, *Der Monte Rosa. Eine topographische und naturhistorische Sckizze,* Wien, 1824.

(6) Forbes, *Travels in the Alps,* 1845.

(7) Oberti, in Stoppani, *Il bel Paese.*

(8) Forbes, *The tour of M. Blanc and of M. Rosa.* Edimbourgh, 1855.

che rilievi topografici del 1859 (1) e del 1862 (2) notano una grande espansione; per quanto fino dal 1860, e forse anche prima (3), debba ritenersi esser principiato un moto retrogrado; che seguitò a manifestarsi con crescente intensità nel 1870 (4), nel 1873 (5), nel 1876 (6), finchè circa nel 1881, nel quale anno il ghiacciaio appariva assai povero, dovette ricominciare un periodo di progresso. Per quanto il Rev. Piana (7) ne segni il principio solo quattro anni dopo, cioè nel 1885, appunto a quest' epoca l' avanzamento era già stato tale, da resultare evidente dai rilievi topografici di quell' anno (8); nel 1891 il periodo di progresso seguitava (9), e solo nel 1893 rimaneva stazionario (10), per dar luogo ad un ultimo ritiro, di cui non si ha per adesso prova se sia terminato o se continui tuttora.

Per questo ghiacciaio di Macugnaga noterò che nel 1881 il signor Pio Calza ne rilevò un disegno, che poi Stoppani inserì in un suo schizzo topografico (11), e che mostra il ghiacciaio stesso ritirato fino al grosso crestone roccioso, il quale limita a Sud-Est il ghiacciaio italiano del Monte Rosa; è vero che nel disegno viene indicata erroneamente a quell' altezza l'Alpe Pedriolo, per cui si potrebbe prendere questa come più sicuro e probabile punto di riferimento. Ma anche in questo secondo caso, più favorevole, il ghiacciaio, per raggiungere la massima estensione che presentò pochi anni dopo, avrebbe dovuto avere una velocità media di circa 350 metri all' anno, mentre la testimonianza del Rev. Piana (12) ci dice che la massima velocità fu di 100 metri, e si verificò durante un solo anno; quindi, secondo me, va ritenuto certamente errato quel limite riferito dallo Stoppani dietro le indicazioni del signor Calza; credo invece che nel 1881, dopo molti anni di un periodo regressivo, il ghiacciaio di Macugnaga, che già nel 1876 si era mostrato allo Stoppani (13) tutto quanto coperto di detriti e di massi, lo dovesse essere ancor più dopo cinque anni, durante i quali doveva avere subìto un' ulteriore e notevole diminuzione nello spessore, e in sì forte misura, da far ritenere al signor Calza, non pra-

(1) *Carte de la Suisse* 1 : 50,000. Eidg. topogr. Bureau, 1881. Rilievo del 1859-1860.

(2) *Carte de la Suisse* (Dufour), 1 : 100,000. Rilievo del 1862.

(3) Stoppani, *Il bel Paese.*

(4) Stoppani, *Il bel Paese. — Sull' attuale regresso dei ghiacciai nelle Alpi,* 1882.

(5) *Monte Rosa* par M. de Dechy, 1 : 100,000, Budapesth, 1873.

(6) Stoppani, *Il bel Paese.*

(7) Piana, in G. Rey, *Il Colle Gnifetti,* Boll. del C. A. I. 1893.

(8) *Carta dell' Istituto Geografico Militare,* 1 : 50,000. Rilievo del 1884.

(9) Tonetti, *Guida della Valsesia e del Monte Rosa.* Varallo, 1891; G. Rey, *Il Colle Gnifetti,* Boll. del C. A. I. 1893.

(10) Piana, in G. Rey, *Il Colle Gnifetti,* Boll. del C. A. I. 1893.

(11) Stoppani, *Sull' attuale regresso dei ghiacciai nelle Alpi,* 1882.

(12) Piana, in G. Rey, *Il Colle Gnifetti,* Boll. del C. A. I. 1893.

(13) Stoppani, *Il bel Paese.*

tico di osservazioni geologiche, di aver presente il letto vuoto e sassoso di un ghiacciaio, anzichè un ghiacciaio mascherato da materiali rocciosi.

Riepilogando per sommi capi le notizie che ho potuto raccogliere intorno al ghiacciaio del Lys, si vede che questo, verso la fine del secolo 18°, si trovava presso ad un massimo di avanzamento (1); un regresso certamente seguì, di cui non si ha pertanto notizie, ed al quale successe una nuova grande espansione, che portò la fronte, nel 1820, fino a circa 250 metri da Cortlis (2); in quell'anno cominciò un ritiro, già sensibile nel 1824 (3), notevole poi nel 1842 (4), e sì intenso, che durò fino a tutto il 1852 (5), portando la fronte al di sotto del crestone occidentale dell' Hoheslicht. Il nuovo progresso durò fin verso il 1859 (6), e fu tale, che nel 1862 (7) la espansione era sempre assai grande, e poco prima del 1865 (8) la bocca si trovava circa 500 metri più in basso del livello attuale; ciò che d'altra parte concorda con le notizie orali raccolte a Gressoney-la-Trinité; il ritiro che seguì era già notevole nel 1873 (9), e maggiore nel 1884 (10), nel quale anno la fronte aveva su per giù i limiti attuali; a quest'epoca, se non forse prima, si rinnuovò l' avanzamento, durato fin verso il 1889 (11) in proporzioni assai mediocri; quindi cominciò un breve periodo stazionario, comprovato da piccole morene frontali, ed al quale in questi ultimi anni seguì una piccola oscillazione regressiva, della quale si ha la misura nella distanza tra le dette morene e la fronte attuale. Osservazioni più complete e successive, riferite al segnale da me posto, diranno in quale periodo ci troviamo precisamente adesso.

Per il ghiacciaio del Lys trovo da modificare una misura data da Forbes, che è certamente esagerata; egli nel 1855 (12) dice che il ritiro fino a quell'anno, a cominciare dal 1820, aveva lasciato scoperta un'area di un miglio quadrato; egli dà con ciò un' idea approssimativa del limite inferiore al quale si arrestava allora la fronte, e che doveva essere assai più indietro

(1) De Saussure, *Voyages dans les Alpes*. Neûchatel, 1803.

(2) Zumstein, *Voyage sur le Mont Rose et première ascension de son sommet méridional confinant avec le Piémont.*

(3) Welden, *Der Monte Rosa. Eine topographische und naturhistorische Sckizze.* Wien, 1824.

(4) Forbes, *Travels in the Alps*, 1845.

(5) King, *Italian Valleys*, 1855.

(6) De Peccoz, in Sella e Vallino, *Gressoney e il Monte Rosa*, 1890.

(7) *Carte de la Suisse* (Dufour), 1 : 100.000. Rilievo del 1862.

(8) *The Valpelline, the Valtournanche, and the Southern Valleys of the Chain of Monte Rosa.* A. Reilly, 1 : 100.000.

(9) *Monte Rosa* par M. de Dechy, 1 : 100.000. Budapesth, 1873.

(10) *Carta dell' Istituto Geografico Militare*, 1 : 50.000. Rilievo del 1884.

(11) Sella e Vallino, *Gressoney e il Monte Rosa*, 1890.

(12) Forbes, *The tour of M. Blanc and of M. Rose.* Edimbourgh, 1855.

del limite attuale, poichè questo dista circa 1200 metri in linea retta dall'Alpe Cortlis, e cioè circa 950 metri dal limite del ghiacciaio nel 1820, e poichè anche la distanza tra la sommità delle due morene laterali è, all'altezza della fronte attuale, di circa 700 metri, e va sempre diminuendo a valle; quindi, pur ammettendo che non debba esser precisa la misura che Forbes cita, in vero, approssimativamente, bisognerebbe però sempre credere che la bocca del ghiacciaio del Lys fosse, poco prima del 1855, ben al di sopra del crestone occidentale dell' Hoheslicht, sotto al quale si trova ora la fronte; mentre da ciò che dice King, citando cifre esatte e punti fissi di riferimento (1), appare estremamente esagerata, e quindi errata, la misura di Forbes.

Per i ghiacciai della val Sesia, di Bors, e di Indren, dei quali nessuno presenta adesso una vera e propria lingua ghiacciata, ho potuto constatare un regresso effettivo, più o meno notevole, senza poter dire però se questo abbia avuto intercalati dei periodi di avanzamento; osserverò che per i ghiacciai della val Sesia, il cui letto è molto ripido, ed interrotto da frequenti salti rocciosi, mentre è facilitato un ritiro della fronte, non solo per una ablazione normale prodotta da fusione, ma anche per valanghe, continue ed incessanti durante l'estate, così viene ostacolato per le stesse ragioni un avanzamento. Per le condizioni sfavorevoli del terreno non ho potuto porre segnali nè far rilievi, ma alcune fotografie da me prese stabiliscono esattamente il limite inferiore del ghiacciaio della Sesia presso a un salto roccioso. Da notizie orali raccolte più che altro dalla guida Giovanni Gilardi di Alagna, persona pratica dei luoghi, 6 o 7 anni addietro (1894-1895) la fronte del Sesia avrebbe oltrepassato questo salto, al quale oggi si arresta, e, per sentito dire da un vecchio alpigiano, circa 60 anni addietro sarebbe scesa in basso fino a coprire il dosso roccioso levigato e striato, che adesso rimane libero; ciò che costituirebbe una espansione di circa 600 metri maggiore dell'attuale.

Pel ghiacciaio di Bors si può già di prima arguire un ritiro, confrontando col suo stato attuale i numerosi rilievi cartografici fatti nel secolo decorso; ho saputo poi che 10 anni addietro, cioè verso il 1891, esso scendeva circa 100 metri più in basso, ricoprendo una piccola cresta rocciosa che si trova a destra, e che adesso è alta 15 metri sopra il nevaio che continua la fronte; per questo ghiacciaio, che è assai inclinato, credo si debba verificare la teoria espressa dal prof. O. Marinelli, che cioè nei ghiacciai minori, privi di una vera e propria lingua, il ritiro orizzontale dipenda in gran parte da una diminuzione di massa in senso verticale.

Intorno alla bocca sinistra del ghiaccio di Indren ho saputo che nel 1876 essa giungeva al salto di roccia che limita in alto il vallone superiore di Indren, cioè che essa era circa 250 metri più avanzata del limite attuale; ciò

(1) King, *Italian Valleys*, 1855.

che concorda con antichi rilievi cartografici, e ciò che darebbe una media annua di circa 10 metri di ritiro, se questo fosse stato da quell'epoca continuo ed uniforme. Chè, se questo fatto non si può ammettere in via assoluta, si pensi che, date le condizioni speciali del letto, cambiamenti nel regime della gran massa del ghiacciaio di Indren devono avere una minima influenza sul suo braccio sinistro; e di conseguenza in questo, data la sua piccola mole, devono essere poco sensibili i progressi. Per cui, anche ammettendo che a periodi di avanzamento del ghiacciaio di Indren sieno corrisposti periodi stazionarî in questo braccio, pure questo può facilmente essersi ritirato dal 1876 ad oggi nella misura indicatami; perchè, sempre in forza della sua piccola mole, e in specie del suo minimo spessore e della sua massima inclinazione, a un dato ritiro del ghiacciaio di Indren, deve corrisponderne qui uno assai maggiore.

Anche il braccio destro del medesimo ghiacciaio in questi ultimi anni, in specie dopo il 1893, si è notevolmente ritirato dal salto roccioso, che limita in alto il vallone superiore di Indren; del resto anche il vicino ghiacciaio del Garstelet, che non presenta nè lingua ghiacciata nè bocca, si mostra molto in regresso: i suoi due ripiani inferiori sono ora affatto liberi dal ghiaccio, mentre non appariscono tali in nessuna carta topografica.

Con le escursioni a questi ghiacciai il mio scopo, per quanto avversato dal mal tempo, era compiuto; però, avendo avuto occasione di fare gite nell'intero gruppo del Monte Rosa, ho messo un segnale presso alla bocca del braccio destro del ghiacciaio di Verra; e nello stesso tempo ho constatato il recente ritiro dei ghiacciai di Val Tournanche, di Ventina, di Verra, di Flua, e delle vedrette a Nord del Monte Rosso; come pure la totale scomparsa di altre vedrette, presso al crinale dal Monte Rosso al passo di Bettolina, ad Est del Monte Telcio, a Sud dell' Hoheslicht, ad Est del colle dei Salati, e al passo del Turlo. Aggiungerò infine, quanto ai ghiacciai di Macugnaga e del Lys, che, nel ricostruire, come ho fatto, la loro storia nel secolo decorso, non credo di essere andato troppo lungi dal vero, perchè le alternative e la durata dei progressi e dei ritiri, che in essi ho riscontrato, concordano con le parole, con le quali, in tesi generale, il prof. Richter chiudeva il rapporto [1] della Commissione internazionale dei Ghiacciai, presentato al Congresso Geologico internazionale di Parigi nella estate del 1900.

[1] Richter, *Rapport de la Commission Internationale des Glaciers*, 1900.

Patologia. — *Sul fenomeno dell' agglutinazione nel sangue dei malarici.* Nota II dei dott. D. Lo Monaco e L. Panichi, presentata dal Socio Luciani.

Nella precedente Nota comunicata all' Accademia dei Lincei nella seduta del 16 dicembre 1900, noi abbiamo descritto le alterazioni che subiscono gli eritrociti di uomo sano quando vengono in contatto con il siero o con il sangue di individui che hanno contratto l' infezione malarica. In queste condizioni i globuli rossi all' osservazione microscopica non si trovano separati l' uno dall' altro, ma riuniti in ammassi più o meno grandi, presentano cioè quel fenomeno che va col nome di agglutinazione.

La costanza del fenomeno che si ritrovò in tutti i sangui malarici da noi presi in esame, e l' assenza di esso quando al sangue di uomo sano si mescolava siero o sangue di altro uomo sano, ci indussero a ritenerlo come una speciale proprietà del sangue dei malarici e a seguirne il decorso in questi ammalati. Osservammo che la capacità agglutinante diminuisce a misura che al malarico viene somministrata la chinina, mentre aumenta appena si sospende l' ingestione del farmaco specifico. Allo scopo poi di ottenere la curva completa di questa proprietà del sangue malarico, iniettammo ad un uomo sano una piccola quantità di sangue preso da un individuo affetto da febbre estivo-autunnale. Col sangue di questo malarico artificiale, abbiamo constatato l' insorgere del fenomeno, il quale per la prima volta si presentò dopo sei giorni dall' iniezione. D' allora in poi la capacità agglutinante non solo fu sempre dimostrabile, ma aumentò gradatamente, raggiungendo una notevole intensità, quando ancora la temperatura era normale, e quando ancora non si trovavano i parassiti nel sangue dell' individuo infettato. Scoppiata la febbre e chinizzato quotidianamente l' ammalato, la curva della capacità agglutinante iniziò la sua discesa, e ritornò all' ascissa dopo sedici giorni di apiressia.

Questi risultati ci permisero di sostenere che il fenomeno dell' agglutinazione si può utilizzare nella diagnosi della malaria latente, quando cioè più non si trovano nel sangue circolante le forme parassitarie, e quando più non si osservano le elevazioni di temperatura. Nella malaria in atto questa nuova proprietà del sangue malarico costituisce un nuovo segno diagnostico sempre importante, ma non tale da indurre il clinico a potere fare a meno dell' esame clinico e della ricerca dei parassiti. Seguendo la curva febbrile, o ricercando i parassiti, il medico è in grado di stabilire la qualità dell' infezione malarica di cui è affetto il paziente, mentre la riscontrata presenza del fenomeno dell' agglutinazione ci autorizza solamente a fare una diagnosi

generica della malaria. Non sono rari però i casi di malaria in cui, mentre da una parte i sintomi clinici sono poco evidenti, dall' altra la ricerca dei parassiti riesce negativa, o non può essere eseguita per mancanza di mezzi. In queste condizioni il fenomeno dell' agglutinazione, noi dicemmo, acquista una grande importanza, e ci permette di diagnosticare o di escludere l' infezione malarica.

Queste prime ricerche descritte nella nota già pubblicata, sono state da noi senza interruzione continuate. Oltre a seguire il decorso del fenomeno dell' agglutinazione nei malarici recidivi, era per noi interessante studiarlo anche nelle altre malattie infettive, nelle quali già avevamo presupposto che dovesse esistere, pur sostenendo che ciò non impediva che la ricerca di questa nuova proprietà del sangue malarico riuscisse sempre di grande utilità nello studio della malaria latente e nella cura razionale di essa.

I risultati ottenuti da queste ricerche saranno da noi pubblicate in una successiva Nota. Per ora ci sembra urgente di riferire altre esperienze eseguite allo scopo di illustrare ancora meglio alcune di quelle già pubblicate, le quali non sono state confermate dagli autori che dopo di noi si sono occupati del medesimo argomento.

Il primo tra questi, per ordine di data, è il dott. Grixoni, il quale nel n. 57 della Gazzetta degli Ospedali e delle Cliniche di questo anno pubblicò una Nota *sull'agglutinazione del sangue malarico*. Il dott. Grixoni, giovandosi del gran materiale messo a sua disposizione nell' ospedale militare di Bologna, potè in breve tempo compiere numerose osservazioni sulla capacità agglutinante del sangue dei malarici, e di altri individui affetti da malattie infettive o discrasiche. Le conclusioni alle quali viene questo autore confermano completamente i nostri risultati. Grixoni infatti al pari di noi dimostra che il sangue dei malarici agglutina i globuli rossi dell' uomo sano o di altro malarico anche se affetto da tipo febbrile diverso, e al pari di noi nega la capacità agglutinante al sangue dell' uomo sano mescolato con sangue di altro uomo sano. Inoltre, avendo trovato sempre negative, ad eccezione della febbre tifoide, le osservazioni eseguite col sangue di tutti gli altri ammalati degenti in quell' ospedale, ritiene il fenomeno dell' agglutinazione specifico della malaria, e non confermata la supposizione da noi fatta che questa proprietà sia comune a tutte o a molte malattie infettive.

A breve intervallo, poche settimane dopo pubblicata la Nota di cui abbiamo brevemente scritto, i dott. Novi e Meruzzi riferiscono nel n. 38 del Policlinico (Supplemento settimanale) le loro ricerche sul potere agglutinante del sangue nei malarici. Essi confermano la presenza del fenomeno nei malarici, e l' assenza di esso nei sani; ma, avendo trovato che nel prolungato digiuno, nell' affaticamento e in molte malattie si ottiene l' agglutinazione degli eritrociti, concludono che questa proprietà non ha un grande valore come segno diagnostico.

Senza mettere in dubbio i risultati ottenuti dagli autori, e presupponendo che essi, prima di assoggettare al digiuno o all'affaticamento gl'individui che si prestarono alle loro ricerche, si sieno assicurati che con il loro sangue non si presentava la reazione agglutinante, noi ci auguriamo che i dott. Novi e Meruzzi in un'ulteriore pubblicazione vorranno ritornare su questa quistione allo scopo di stabilire le leggi che regolano la capacità agglutinante nelle condizioni di esperimento sopra citate. Per ora, non avendo a disposizione simile materiale di esperimento, pur ritenendo che nel digiuno e nell'affaticamento il fenomeno dell'agglutinazione nell'uomo debba essere di breve durata, abbiamo sottoposto alcune cavie all'inanizione, e ci siamo convinti che anche dopo morte, nessuna traccia di agglutinazione dei globuli rossi si osserva quando il sangue o il siero di queste cavie si mescola al sangue di altra cavia digiuna, o di altra cavia che ha ricevuto il suo pasto regolarmente.

Poco prima della comparsa della Nota dei dott. Novi e Meruzzi, una comunicazione sullo stesso argomento venne fatta, nella seduta dell'Accademia medica di Roma del 26 giugno 1901, dal prof. Bignami a nome del suo allievo dott. Capogrossi. Dal resoconto di questa comunicazione pubblicato dalla Riforma Medica e dal Policinico, risulta che il dott. Capogrossi, consigliato dal prof. Bignami, ha ricercato il fenomeno dell'agglutinazione tanto nei sani che nei malarici e in altri ammalati. Egli trova sempre positivo il fenomeno dell'agglutinazione, al quale quindi nega qualsiasi valore diagnostico nella malaria.

Riassumendo complessivamente i risultati ottenuti da questi sperimentatori che si sono occupati del fenomeno dell'agglutinazione globulare nel sangue dei malarici, si deduce che, mentre tutti al pari di noi confermano questa nuova proprietà nel sangue degli ammalati di infezione palustre, Grixoni ne sostiene la specificità, negandone la presenza nelle altre malattie e nel sangue dell'uomo normale; e gli altri autori invece la trovano nei sani e in molti o in tutti gli stati morbosi.

Sorgono quindi due grandi quistioni, della dimostrazione delle quali dipende se il fenomeno dell'agglutinazione debba comprendersi tra i segni diagnostici della malaria. Per risolvere la prima quistione abbiamo intrapreso una lunga serie di esperienze le quali, come abbiamo detto, saranno pubblicate ulteriormente. Esse tendono a dimostrare quale importanza abbia il fenomeno dell'agglutinazione nella malaria, e quali caratteri differenziali esso offra quando si ricerca nelle altre malattie.

Degna di più urgente interesse ci sembra la seconda quistione, la quale riguarda la possibilità che il sangue di uomo normale agglutini i globuli di un altro uomo sano. È ovvio il fare notare che qualora questo fatto venisse chiaramente dimostrato, qualunque ricerca del fenomeno agglutinante nel campo patologico, dovrebbe ritenersi del tutto inutile. L'assenza

del potere agglutinante globulare nel sano è stata constatata non solo da noi, da Grixoni e da Novi e Meruzzi; ma anche da Donath (1), da Camus e Pagniez (2), e da Leotta (3). Prima di tutti questi autori, Landsteiner (4) in una Nota inserita nel suo lavoro, *Sull'azione anlifermentativa, litica e agglutinante del siero di sangue e della linfa* dice di avere osservato il fenomeno dell'agglutinazione nel sangue che proveniva da ammalati gravi. Egli si limita a porre la quistione se questo fenomeno avvenga per qualità inerenti al siero di origine individuale, o per azione susseguente a cause di natura batterica.

Dimodochè, quantunque gli autori, i quali negano la presenza del fenomeno agglutinante nei sani, rappresentino la massima parte di quelli che si sono occupati di questo argomento, pure non bisogna dimenticare che risultati diametralmente opposti furono prima ottenuti da Ascoli (5) e dopo da Bignami e Capogrossi. Dal resoconto però della comunicazione fatta da questi ultimi ricercatori non risulta se oltre le isoagglutinine abbiano anche confermato le autoagglutinine dimostrate da Ascoli. Questi infatti ammette che il siero di un uomo sano può agglutinare i globuli rossi del medesimo individuo: fatto non ancora dimostrato, anzi per meglio dire negato negli animali, ad eccezione del sangue di cane il quale possiede una fragilità globulare del tutto eccezionale, che, secondo gli autori, sarebbe la cagione del fenomeno.

Allo scopo di potere comprendere perchè esperienze così semplici, abbiano dato risultati differenti ai vari autori, non ci sembra inutile qui ricordare la tecnica di cui Ehrlich e Morgenroth (6) si sono serviti per dimostrare le isolisine. Questi due illustri patologi, iniettando nel peritoneo di una capra una discreta quantità di sangue di altra capra diluito in acqua distillata, constatarono che il siero di sangue della prima capra acquistava un'azione litica sui globuli rossi di altre capre, ma non di tutte le capre. Chiamarono quindi isolisine e isoagglutinine quelle sostanze le quali sono capaci di sciogliere o di agglutinare gli eritrociti degli animali della medesima specie, mentre Ehrlich (7), citando il nostro lavoro sulle sostanze agglutinanti nel siero malarico, dà a queste il nome di pan-isoagglutinine dovutole al fatto, prima dimostrato da noi e poi confermato dagli altri ricercatori, che in nessun sangue malarico si trova mai assente il fenomeno dell'agglutinazione. D'altra parte se, invece di iniettare sangue lacca, si tratta un animale con sangue

(1) Wiener klin. Woch. n. 22, 1900.

(2) Compt. Rendus, Soc. Biologie, 1901, p. 242.

(3) Tesi di laurea di Roma, 1901 (in corso di pubblicazione).

(4) Centralbl. f. Bakt. 10 nov. 1900, pag. 357.

(5) La clinica medica italiana, 1901, n. 1 e n. 7.

(6) Berl. klin. Woch. 1900, n. 21.

(7) Erkrankungen des Blutes und der Blutbildenden Organe, vol. VIII, del trattato di Patologia di Nothnagel. Vienna, 1901.

defibrinato di altro animale della medesima specie, allora, come dimostrò Bordet (1), le isolisine non si formano. Senza entrare nel merito della quistione per indagare per quale ragione Ehrlich e Morgenroth hanno ottenuto risultati diversi da quelli descritti da Bordet, vogliamo qui solamente rilevare quanta influenza ha in esperienze di simil genere la tecnica adoperata. Basta che questa venga in qualche piccola parte modificata, perchè i risultati cambino, e non sieno più paragonabili fra loro.

Allorchè noi cominciammo a studiare il fenomeno dell'agglutinazione nei malarici, ci preoccupammo non poco della tecnica, e allo scopo di rendere questa facile, perchè tutti gli studiosi potessero utilizzare la nuova proprietà del sangue malarico, insistemmo perchè il miscuglio tra sangue malarico e sangue normale si facesse goccia a goccia. Questo metodo per noi non solo era il più facile, ma era anche il più idoneo allo scopo. Non tralasciammo però di accennare che medesimi risultati si ottenevano adoperando invece del sangue malarico il siero di esso, ma omettemmo a ragion voluta di descriverne la tecnica. Ripariamo ora a questa omissione, dichiarando che per ottenere il siero ci siamo sempre serviti sia nelle prime ricerche che in quelle che ancora facciamo, della tecnica che comunemente si segue per la siero-diagnosi di Widal; facendo cioè riempire un tubetto capillare di sangue che proviene dalla puntura del dito, e adoperando il siero che dopo più ore si separa dal coagulo. In questo modo tanto il siero che il sangue *in toto*, ottenuti dalla puntura del dito di uomo sano, mescolati a un'altra goccia di sangue di altro uomo sano, danno risultati identici, mostrando che in queste condizioni il fenomeno dell'agglutinazione globulare non si effettua. Risultati opposti si osservano quando, invece di prendere il sangue dalla puntura del dito, si fa all'uomo sano un salasso, e si adopera il siero che si separa dal coagulo o dalla defibrinazione o dalla centrifugazione. Il fenomeno agglutinante allora è sempre evidente anche se al siero si mescolano i globuli rossi del medesimo individuo. Paragonando poi fra loro i sieri dello stesso individuo sano, ottenuti con i diversi trattamenti su ricordati, più agglutinante è quello che si separa dopo la centrifugazione e dopo la difibrinazione, meno agglutina e qualche volta non agglutina affatto quello ottenuto dal coagulo, mai agglutina, come abbiamo detto, il siero del sangue raccolto nel tubetto capillare per mezzo della puntura digitale. La capacità agglutinante in simili sieri normali non si eleva di molto, al più questa proprietà si osserva diluendo il siero due volte con soluzione fisiologica di cloruro sodico, e manca con le diluizioni più forti.

Queste esperienze furono da noi più volte ripetute anche recentemente, e sempre hanno dato risultati costanti. Ciò ci autorizza a sostenere che *in qualsiasi sangue di uomo normale si può fare insorgere la proprietà ag-*

(1) Ann. Pasteur, 1899.

glutinante, assoggettando il campione del sangue preso per l'esame a maltrattamenti più o meno gravi. Ma ciò non basta; possiamo aggiungere altri fatti i quali ancora meglio comprovano i risultati già descritti. È noto infatti ai Chimici e ai Chimici fisiologici quanta influenza esercita in certi miscugli liquidi l'agitazione di essi perchè avvenga una combinazione chimica o perchè si formi un precipitato. Recentemente Ramsden (1) ha dimostrato, lavorando coi liquidi organici, che in alcuni casi non occorre agitarli, ma è sufficiente travasarli più volte per ottenere notevoli precipitati.

Per spiegare poi come si formano le agglutinine nel siero di uomo sano, non si può ammettere che esse sieno dipendenti da cambiamenti molecolari del siero avvenuti a causa dei movimenti impressi al sangue. Crediamo invece più probabile che con la centrifugazione, con la defibrinazione o con altri più lievi maltrattamenti, gli elementi figurati del sangue, certamente i più fragili fra essi, perdano subito le loro condizioni vitali, e permettano a tutte o a parte delle sostanze liquide contenute nei loro stromi che si versino nel siero. Ammessa come verosimile questa ipotesi, con l'aumentare in un sangue di uomo sano, la dissoluzione degli elementi figurati di esso, la capacità agglutinante dovrebbe rendersi sempre più notevole. E così in vero avviene quando al sangue, si aggiunge un egual volume di acqua distillata. Il sangue-lacca che ne risulta, infatti presenta una capacità agglutinante talmente forte, da permettere la dimostrazione del fenomeno anche quando sia stato ancora diluito più volte (4-6) con soluzione fisiologica di cloruro sodico. Per eseguire questa esperienza si prende una siringa sterilizzata contenente p. es. 2 cc. di acqua distillata, e si aspira da una vena un'eguale quantità di sangue. Il liquido di color lacca che si ottiene si adopera per la ricerca tanto prima, che dopo essere stato per alquanto tempo centrifugato.

Dopo quello che abbiamo brevemente esposto, possiamo renderci conto del perchè alcuni autori hanno ottenuto risultati opposti ai nostri. Passando in rassegna la tecnica da loro adoperata, ci sarà facile dimostrare che soltanto quelli che non hanno adoperato i metodi di ricerca da noi descritti, sostengono la possibilità della presenza del fenomeno agglutinante, mescolando il siero del sangue di uomo sano con i globuli rossi di altro uomo sano. Gli altri autori invece che si sono contentati di usufruire della tecnica che avevano descritto, confermano i risultati da noi ottenuti. La lista di questi ultimi comprende: il lavoro di Grixoni, le ricerche del quale sul fenomeno dell'agglutinazione sia nell'uomo sano che negli ammalati in genere, vennero fatte mescolando i due sangui goccia a goccia; quello di Novi e Meruzzi, i quali seguirono la medesima tecnica, non senza notare che il *siero debba ritenersi come un prodotto artificiale;* quello di Leotta le cui ricerche furono anche eseguite col siero separatosi dal coagulo del sangue raccolto nel tubo capil-

(1) Zeits. f. Biologie, 1900.

lare e proveniente dalla puntura del dito e quello di Camus e Pagniez che adoperano quasi la stessa tecnica di Leotta. Degli altri autori Landsteiner, nella sua brevissima Nota, non dice come ottiene il siero di cui si serve per le sue ricerche che si riferiscono più a uomini malati, che ad individui sani. Donath al siero che prende in esame, ottenuto forse dal coagulo del salasso, aggiunge il sangue di uomo sano diluito con soluzione isotonica di cloruro sodico. Da questa tecnica forse dipendono i risultati incostanti da lui descritti. Poichè la capacità agglutinante del siero da salasso tanto di uomo sano che di molti ammalati è sempre bassissima, niente di più facile che l'assenza del fenomeno da lui osservata in quasi tutti i sani e in molti degli ammalati esaminati, sia legata alla diluizione del sangue per mezzo della soluzione isotonica.

Una tecnica molto simile adopera Ascoli nelle sue ricerche, però i risultati suoi differiscono da quelli di Donath, inquantochè mentre per questi il sangue dei sani non è *di regola agglutinante*, per Ascoli invece agglutina, *quantunque debolmente*, gli eritrociti del medesimo individuo e, con qualche eccezione, quelli di altri individui normali. Con molta probabilità il numero dei globuli costituenti gli ammassi adottato da Ascoli per dichiarare un siero agglutinante deve essere molto più piccolo di quello adottato da Donath, e da ciò forse deriva la sconcordanza dei loro risultati. Bignami e Capogrossi descrivono una nuova tecnica, che, come loro dicono, *permette di osservare bene il fenomeno dell'agglutinazione*. Questa tecnica consiste nel *raccogliere il siero del sangue centrifugato in tubetti* (capillari?), *e nel mescolarvi sangue intiero o defibrinato d'individui sani*. È in questo modo che essi hanno ottenuto i risultati, da noi già menzionati, i quali non solo contraddicono quelli da noi pubblicati, ma anche tutti quelli descritti dagli autori che mano mano abbiamo citato. Per loro nessuna differenza esiste tra l'agglutinazione osservabile col siero di individui sani e tra quella osservabile col siero di individui malati; soltanto coi sieri degli anemici essi notano *agglutinazioni più marcate*, ma non dicono se in questi casi hanno dosato la capacità agglutinante, o se, come pare, si siano limitati alla ricerca qualitativa. Dal resoconto poi della comunicazione fatta all'Accademia, del quale noi ci serviamo, avendo per mesi invano atteso la pubblicazione del lavoro, non risulta chiaro se essi hanno in tutti gli esami da loro fatti osservato costantemente il fenomeno dell'agglutinazione, sia sperimentando col siero dei sani, sia sperimentando con quello degli ammalati; ma con la tecnica descritta, non si può ammettere che anche in un solo esame eseguito in quelle condizioni possa essersi reso non evidente il fenomeno dell'agglutinazione. A ciò dobbiamo aggiungere che se Bignami e Capogrossi avessero mescolato i sieri da loro studiati con gli eritrociti dell'individuo dal quale proveniva il siero, avrebbero dovuto registrare il fatto che qualunque siero produce l'agglutinazione dei propri globuli. Per questi autori quindi la divi-

sione delle lisine e delle agglutinine fatta da Ehrlich e Morgenroth in eterolisine, isolisine ed autolisine e corrispondentemente in eteroagglutinine, isoagglutinine ed autoagglutinine non dovrebbe più esistere; e per fenomeno agglutinante d'ora innanzi dovremmo intendere quella proprietà comune ai sieri di tutti gli individui sia normali che patologici, la quale si manifesta, appena uno qualunque di questi sieri si mescola ai globuli rossi dello stesso o di altro individuo. Ma che ciò sia vero, ancora nessuno *è riuscito* a dimostrare!

La tecnica adoperata da Bignami e Capogrossi ha impedito che essi potessero confermare un'altra osservazione da noi fatta. Dosando la capacità agglutinante dei sieri malarici, ci eravamo accorti che se essi venivano diluiti con soluzione fisiologica di cloruro sodico contenente pochi centigrammi di un sale di chinina, il fenomeno scompariva con diluizioni molto più lievi, di quelle che occorrevano per ottenere il medesimo scopo adoperando la pura soluzione fisiologica. Questa osservazione venne confermata da Grixoni, e il risultato contrario che dicono di avere ottenuto Bignami e Capogrossi ci ha costretti a ripetere le esperienze. Da queste risulta che la su descritta azione della chinina si esplica solo con il sangue malarico o con il siero di esso separatosi nel tubetto capillare, mentre manca con il siero normale o malarico ottenuto per centrifugazione o per defibrinazione. Se il sangue o il siero malarico si diluisce con la soluzione sodica contenente 0,10 % di bicloridrato di chinina, può qualche volta, quando la capacità agglutinante del sangue o del siero è molto notevole, rimanere sempre evidente il fenomeno, per quanto attenuato; ma quando si adopera la soluzione isotonica nella quale è stato sciolto 1 gr. % di sale di chinina, il fenomeno non si osserva più. L'emolisi chininica, che in quest'ultimo caso si presenta dopo qualche tempo, non impedisce la comoda osservazione del fatto descritto.

Questa esperienza da una parte ci dimostra che possono esistere contemporaneamente nel medesimo siero, agglutinine di diversa specie, e dall'altra che le agglutinine del siero normale prodotte artificialmente non risentono l'azione della chinina.

Ottenuti questi risultati, era interessante vedere se la chinina agisse egualmente sulle agglutinine globulari del tifo o di altre malattie infettive, e su quelle dei già febbricitanti per malaria sofferenti ora di nuovi processi morbosi batterici. I risultati delle ricerche finora eseguite sono costanti, e mostrano che negli ammalati di altre infezioni, siano essi già stati malarici o no, l'agglutinazione in vitro persiste, anche quando il siero si diluisce con soluzione fisiologica fortemente chininizzata. Di questo fatto quindi possiamo giovarci sia per determinare se in un siero esistono sole agglutinine malariche, sia per risolvere la difficoltà sollevata da Novi e Meruzzi riguardante l'incertezza in cui può trovarsi un clinico il quale, dopo aver visto in un malarico, per mezzo del chinizzamento energico, scomparire il fenomeno

dell'agglutinazione, non ha mezzi per decidere se il ritorno di questo fenomeno provenga sempre dall'infezione malarica o dall'invasione di un'altra malattia. In questo caso la persistenza del fenomeno agglutinante nel siero o nel sangue diluito a parti eguali con soluzione fisiologica contenente l'1 % di sale di chinina, ci avvisa che s'inizia un'altra infezione.

Riservandoci, come già abbiamo detto, di dimostrare nella Nota susseguente per quali caratteri l'agglutinazione nella malaria si distingue da quella osservabile in altre malattie, possiamo conchiudere:

1°. Che il sangue o il siero di uomo sano, mescolato al sangue di altro uomo sano, non è agglutinante.

2°. Che il siero dell'uomo sano acquista la proprietà agglutinante, quando esso è stato ottenuto con trattamenti che ledono i globuli rossi.

3°. Che aggiungendo al sangue o al siero malarico egual volume di soluzione isotonica di cloruro sodico contenente l'1 % di sale di chinina, il fenomeno agglutinante scompare.

4°. Che questa proprietà può servire per diagnosticare se un siero o un sangue è o no malarico.

5°. Che nei sieri malarici così trattati, la non scomparsa del fenomeno indica l'insorgere o la presenza di un altro processo infettivo.

Fisiologia. — *Su alcune alterazioni dei ganglii linfatici nelle dermopatie distrofiche.* Nota del dottor Vincenzo Montesano, presentata dal Socio Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Struever, relatore, a nome anche del Socio Ròiti, legge una Relazione sulla Memoria del dott. Ugo Panichi, intitolata: *Influenza della variazione della temperatura e più specialmente dei forti raffreddamenti, sul comportamento ottico di alcuni minerali*, concludendo col proporre l'inserzione del lavoro nei volumi delle Memorie.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Vicepresidente, sono approvate dalla Classe, salve le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Grassi presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci: Berthelot, Langley, Lockyer, Pflueger; e dai

signori: Bigourdan e Goppelsroedèr. Fa inoltre particolare menzione del vol. XII delle: *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy.*

Il socio Todaro presenta all'Accademia il volume ottavo delle *Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia Normale della R. Università di Roma*, pubblicato durante l'anno 1901. Questo volume consta di 4 fascicoli. Il fascicolo 1° contiene i seguenti lavori:

1. Versari, *Contributo alla conoscenza della morfogenesi degli strati vascolari della coroide nell'occhio dell'uomo e di altri mammiferi.* L'A. ha spiegato in qual modo nella coroide di embrioni di vacca, di pecora, di porco e di uomo il semplice strato di vasi disposti a rete, che si osserva nei primi periodi dello sviluppo venga man mano disponendosi in più strati, traendone osservazioni comparative colla disposizione dei vasi della coroide nella serie dei vertebrati.

2. Dorello, *Sopra parecchie anomalie rinvenute in un occipite umano e specialmente sul così detto « Terzo condilo occipitale »*. L'A. ha descritto un occipite umano che presentava le seguenti anomalie: terzo condilo occipitale, canalicolo basilare inferiore, processi paramastoidei e forami condiloidei anteriori multipli. L'autore si occupa specialmente del terzo condilo e dopo aver fatto la critica delle varie teorie, che sono state emerse sulla sua formazione, ne dà una nuova mediante la quale si possono spiegare anche altre anomalie a carico della stessa regione.

3. Mingazzini Pio, *Cambiamenti morfologici dell'epitelio intestinale durante lo assorbimento delle sostanze alimentari.* L'A. facendo seguito ad una precedente memoria studia i cambiamenti morfologici dell'epitelio intestinale nella gallina tenuta a digiuno. Egli rileva che durante il digiuno gli elementi epiteliali dei villi sono più bassi e non presentano la distinzione del loro corpo in zona chiara interna e zona scura esterna, come si osserva negli stessi animali durante l'assorbimento. Durante lo stato di digiuno, purchè non sia lungamente protratto, c'è un leggiero assorbimento dimostrato dalla presenza del liquido subepitaliale. Durante il digiuno possono passare nel lume intestinale dei leucociti, che formano accumuli nel tratto medio dell'intestino tenue e danno materiale nutritivo assorbito dai villi.

4. Drago, *Cambiamenti di forma e di struttura dell'epitelio intestinale durante lo assorbimento dei grassi.* L'A. osserva durante l'assorbimento dei grassi i cambiamenti dell'epitelio intestinale, mostrando che anche per i grassi il fenomeno si riduce ad un processo di secrezione interna delle cellule dei villi intestinali.

5. Dorello, *Descrizione di un uovo umano anomalo.* L'A. studia un uovo umano anomalo appartenente alle forme atrofiche più basse, descrivendo le alterazioni presentate dalle varie parti che lo costituiscono. A proposito di una formazione cistica l'autore mostra che essa non può farsi derivare da

un' introflessione dell' epitelio del chorion, ma deriva da una cisti formatasi a spese del peduncolo allantoideo.

6. Russo, *Sulla funzione renale dell' organo genitale delle oloturie.* L'A. sostiene che l' organo genitale delle oloturie funziona spiccatamente da organo renale in alcune epoche dell' anno, ma durante la maturità sessuale perde questa funzione.

Il 2° fascicolo contiene i seguenti lavori:

1. Della Valle Claudio, *Contributo alla conoscenza della circolazione sanguigna nella mucosa olfattiva dei mammiferi.* L'A. studiando la circolazione sanguigna nella pituitaria di alcuni mammiferi, ha trovato che i vasi venosi superficiali formano reti caratteristiche, dalle quali è dato riconoscere facilmente la regione olfattoria dalla respiratoria, ed in rapporto, per quanto riguarda la prima, con la distribuzione delle glandule e dei fasci del nervo olfattorio, per quanto riguarda la seconda con la funzione del riscaldamento della colonna d'aria che attraversa le cavità nasali. Ha trovato inoltre che l' epitelio olfattorio dell' uomo è provvisto di capillari sanguigni, confermando così nell' uomo quanto il Bovier Lepierre aveva nel 1888 scoperto nella cavia.

2. Mingazzini Pio, *La secrezione interna nell' assorbimento intestinale.* L'A. riferendosi ai precedenti suoi lavori sullo stesso argomento si è prefisso di vedere: 1° se la funzione della secrezione interna, riscontrata nell' epitelio dei villi di galline, si osserva anche nell' epitelio assorbente di altri vertebrati ed a quali modalità è soggetta; 2° se i leucociti, presenti nell' epitelio stesso, prendono parte attiva nella funzione dell' assorbimento, e quale ufficio principale abbiano in esso.

Per il primo quesito le ricerche eseguite nello *Scyllum stellare* ha dato i seguenti risultati: l' assorbimento avviene principalmente nella valvola spirale; nei singoli elementi vi ha indipendenza nelle varie fasi del processo; l' apice delle pieghe ha un maximum di funzionamento; gli elementi epiteliali durante il processo, soggiacciono a mutamenti nel protoplasma e nel nucleo.

Per il secondo quesito l'A. fece le sue osservazioni nel *Mus documanus*, e potè stabilire che i leucociti, i quali dall' epitelio e dallo stroma del villo immigrano nella sostanza nutritiva secreta internamente dalle cellule epiteliali, si modificano quivi nei caratteri chimici e morfologici del nucleo e del protoplasma, e poscia passano nello stroma connettivale dove presentano una specie di moltiplicazione. Cosicchè la secrezione interna verrebbe in parte riassorbita dai vasi e dalle lacune del villo, in parte assorbita dai leucociti che in gran numero accorrono nella mucosa durante la digestione.

3. Drago, *Sulla genesi di alcune anomalie del sistema nervoso centrale dell' embrione di pollo.* L'A. si è proposto di determinare l' epoca dello sviluppo e la causa efficiente di talune anomalie del sistema nervoso nell' embrione di pollo, ed ha trovato che le anomalie del midollo spinale in tali

embrioni possono esser causate da eccessiva proliferazione dell'ectoderma, che s'insinua nel lume della doccia midollare prima della chiusura di questa.

4. Chigi, *Sul significato morfologico della polidactilia nei Gallinacei.* L'A. con lo studiare lo sviluppo del piede nei polli domestici, si è prefisso di trovare qualche nuovo dato per spiegare morfologicamente la polidattilia degli uccelli, ed ha concluso che il dito soprannumerario dei polli, omologo a quello talora osservato in altri uccelli, non deve essere attribuito a raddoppiamento del primo dito, ma allo sviluppo teratologico di un organo (prealluce) esistente negli antenati allo stato rudimentale.

5. Cialona, *Osservazioni pratiche sull'epoca della comparsa e della variabilità quantitativa delle specie animali più comuni nel Plankton del porto di Messina.* L'A. spiega la causa della presenza del Plankton nel porto di Messina, dovuta alla forma dello stretto ed al punto di esso dal quale la corrente che entra nel porto proviene, dà utili ragguagli circa i vari punti del porto, nei quali si può efficacemente praticare la pesca nei varî mesi dell'anno e nelle diverse ore del giorno, e fa seguire un elenco degli animali trovati.

6. Favaro, *Contributo alla filogenesi ed all'ontogenesi del vestibolo orale.* L'A. divide il lavoro in due capitoli. Nel 1° comprende le ricerche sulla morfologia del vestibolo orale e particolarmente delle pieghe laterali nei Poefagi, Perissodattili, Artiodattili, Roditori, Carnivori, Insettivori, Chirotteri e Primati; Nel 2° espone i risultati delle sue ricerche intorno alla genesi delle pieghe laterali negli embrioni di pecora; conclude che esse rappresentano nell'ontogenesi un processo d'accrescimento mesodermico più attivo di quello che si svolge in corrispondenza dei solchi vestibolari.

7. Della Valle Claudio, *Contributo alla conoscenza delle terminazioni nervose nella mucosa olfattoria dei mammiferi adulti.* L'A. basandosi sopra alcuni reperti conferma l'opinione del Cayal e del Fusari circa la pretesa divisione delle fibrille olfattorie nella mucosa, ed ha trovato inoltre, nella mucosa olfattoria di cani giovani, elementi cellulari speciali a cui dà il significato di cellule embrionali, destinate a svilupparsi man mano che l'organo dell'odorato si perfeziona.

Il 3° e 4° fascicolo contengono:

1. Manzone, *Ricerche sulla circolazione del cuore.* L'A. dopo aver fatto una critica esatta dei vari lavori precedenti sulla circolazione delle valvole atrio-ventricolari, viene, colle proprie ricerche, alla conclusione che esistono vasi dove esistono muscoli; ammettendo una legge unica tanto per l'uomo quanto per tutti gli altri mammiferi. Avendo poi rinvenuto nelle dette valvole dei fasci muscolari in via di regressione, e dei fasci a direzione radiale e circolare, interpreta questo fatto come il residuo di un muscolo sfinteriale esistente al cercine delle valvole atrio-ventricolari.

Nella circolazione dei muscoli papillari ha scoperto un comportamento tutto speciale dei vasi, a forma di anse, nel punto in cui il muscolo termina

nella corda tendinea, il quale differisce da quello che nella terminazione al tendine hanno tutti gli altri muscoli del corpo.

Finalmente nelle fibre del Purkinje ha riscontrato una vascolarizzazione poco abbondante e differente dalle comuni fibre muscolari del cuore.

P. Dorello, *Sopra lo sviluppo dei solchi e delle circonvoluzioni nel cervello del maiale.* L'A. ha studiato lo sviluppo dei solchi e delle circonvoluzioni nel cervello del maiale servendosi di una copiosa serie di embrioni la cui lunghezza da 30 mm. giungeva fino a 26 cm. Egli ha determinato: la cronologia ed il vario meccanismo di formazione dei diversi solchi; i cambiamenti di forma e di posizione cui soggiacciono le varie parti corticali degli emisferi, durante lo sviluppo. Infine ha fatto un saggio critico sulle omologie che si possono stabilire fra i solchi del maiale e quelli degli altri mammiferi compreso l'uomo.

3. Supino, *Ricerche sul cranio del teleostei* (I-*Scopelus*, *Chauliodus*, *Argyropelecus*). L'A. comincia una serie di ricerche sul cranio dei Teleostei abissali per determinare se i caratteri del loro cranio si debbano considerare come primitivamente semplici, ovvero come semplificazioni per effetto dell'ambiente abissale.

Egli tien calcolo specialmente della quantità di cartilagine la cui abbondanza, secondo la scuola di Gegenbaur, rappresenterebbe un carattere primitivo, ma che potrebbe anche dimostrare in certi casi un semplice arresto di sviluppo.

In questo primo capitolo egli tratta dello *Scopelus*, del *Chauliodus* e dell'*Argyropelecus.*

4. Noè, *Sul ciclo evolutivo della Filaria Bancrofti* (Cobbold) *e della Filaria immitis* (Leidy). L'A. riferendosi alle sue note preliminari, la prima delle quali pubblicata insieme al prof. Grassi, descrive estesamente il ciclo evolutivo della *Filaria immitis*, dimostrando come essa venga propagata al cane esclusivamente colla puntura delle zanzare.

Egli dimostra che anche la *Filaria Bancrofti* deve propagarsi all'uomo in modo del tutto uguale a quello della *Filaria immitis.*

CONCORSI A PREMI

Il Vicepresidente Blaserna dà comunicazione degli elenchi dei lavori presentati ai concorsi ai premi Reali e Ministeriali, scaduti col 31 dicembre 1901.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Mineralogia e Geologia.*

(Premio di L. 10,000. Scadenza 31 dicembre 1900).

1. Artini Ettore. — *Ventotto Memorie e Note di mineralogia e geologia* (st.).

2. Bombicci Luigi. — *Ventisei Memorie e Note di mineralogia, cristallografia, geodinamica e meteorologia* (st.)

3. De Gregorio Antonio. — *Novantadue pubblicazioni di geologia e paleontologia* (st.).

4. De Stefani Carlo. — *I Campi Flegrei* (ms.).

5. Vinassa de Regny Paolo. — 1) *Cinque Note di geologia e paleontologia* (st.). — 2) *Sette Memorie sopra fossili vari* (st.). — 3) *Due Memorie sui fossili triassici del Bakony* (st.). — 4) *Quattro Memorie sui Radiolari* (st.) — 5) *Manuale di Paleontologia* (in corso di stampa). — 6) *Memoria sui Molluschi terziari delle Alpi Venete* (st.) — 7) *Rivista italiana di Paleontologia*; anni V, VI, VII (st.)

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Matematica.*

(Premio L. 10,000. Scadenza 31 dicembre 1901).

1. Bongi Cesare. — *Calcolo delle sommazioni; Saggio di un nuovo metodo ausiliario di calcolo* (ms.).

2. Castelnuovo Guido ed Enriques Federigo. — *Trentuna Memoria sulla teoria delle superficie algebriche* (st.).

3. Genna Pietro. — *Calcolo del π col metodo dei triangoli inscritti* (st. e ms.).

4. Lojacono Domenico. — *La trisezione dell'angolo rettilineo in genere e corollari* (ms.).

5. Pascal Ernesto. — *Venti Memorie di Analisi.*

6. Ricci Gregorio. — 1) *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di 2° grado* (st.). — 2) *Lezioni sulla teoria delle superficie* (st.). — 3) *Sui sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque* (st.). — 4) *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque ad* n *dimensioni* (st.). — 5) *Sulla teoria generale della elasticità in una varietà qualunque* (ms.).

7. Ugolini Giulio. — *Inscrizione dell'Ennagono regolare* (ms.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere ai premi del Ministero della P. I. per le *Scienze matematiche.*

(Due premî del valore complessivo di L. 3300. Scadenza 31 dicembre 1901).

1. Bagnera Giuseppe. — 1) *Sopra i gruppi astratti di grado 32* (st.). — 2) *I gruppi finiti reali di sostituzioni lineari quaternarie* (st.). — 3) *I gruppi di collineazioni nel nostro spazio, e le rotazioni dello spazio ellittico a cinque dimensioni* (st.).

2. Caminati Pietro. — 1) *La Polisezione dell'angolo eseguita graficamente mediante un goniografo* (ms.). — 2) *Teoria e pratica dei Logaritmi di somma e di sottrazione, col progetto di una grande Tavola di Logaritmi a sette decimali* (ms.).

3. Ciani Edgardo. — 1) *Le quartiche piane più volte omologico-armoniche* (st.). — 2) *Un teorema sopra il covariante S della quartica piana* (st.). — 3) *Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane* (st.). — 4) *La prospettiva Cavaliera* (st.) — 5) *I gruppi finiti di collineazioni piane dotati di una quartica invariante irriduttibile* (st.). — 6) *Sopra la configurazione di Kummer* (st.).

4. De Franchis Michele. — 1) *Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2* (st.). — 2) *Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2* (st.). — 3) *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane di genere 3 per* $k > 1$ (st.). — 4) *Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico-superficiale nullo* (st.). — 5) *Elementi di geometria* (st.). — 6) *Elementi d'aritmetica* (st.).

5. Padoa Alessandro. — 1) *Note critiche agli « Elementi di geometria » di G. Veronese* (st.). — 2) *Note critiche al libro d'aritmetica e d'algebra elementare di P. Gazzaniga* (st.). — 3) *Note di logica matematica* (st.). — 4) *Algebra elementare logicamente esposta* (st.). — 5) *Collaborazioni al « Formulaire de Mathématiques » di G. Peano* (st.). — 6) *Riassunto di conferenze sull'Algebra e la Geometria quali teorie deduttive* (litog.). — 7) *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque* (st.). — 8) *Un nuevo sistema de definiciones para la geometria euclidea* (st.). — 9) *Numeri interi relativi* (st.). — 10) *Commemorazione del prof. Albino Nagy* (st.). — 11) *Matematica elementare* (st. e litog.).

6. Pirondini Geminiano. — 1) *Sur la spirale logarilhmique* (st.). — 2) *Sur les lignes cylindriques* (st.). — 3) *Sur un cas particulier du théorème de Maclaurin et Braikenridge* (st.). — 4) *Symétrie orthogonale par rapport à un cylindre quelconque* (st.). — 5) *Quelques applications des coordonnées intrinsèques* (st.). — 6) *Sur quelques propriétés remarquables de l'hyperbole* (st.) — 7) *Risoluzione di due questioni geometriche* (st.). — 8) *Sur quelques propriétés des coniques* (st.) — 9) *Sur les cylindres et les cônes passant par une ligne* (st.). — 10) *Une nouvelle démonstration d'un théorème de Lancret et de sa réciproque* (st.). — 11) *Le linee e le superficie sulle quali un agente fisico qualunque ha un'intensità data da una legge arbitraria* (ms.). — 12) *Generalizzazione di alcune proprietà dell'elica cilindro-conica ordinaria* (ms.). — 13) *Di alcune formole che si presentano nello studio delle linee* (ms.). — 14) *Sur les pseudo-spirales* (ms.). — 15) *Sur les normales d'un hélicoïde* (ms.). — 16) *Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution* (ms.).

Il Vicepresidente Blaserna inoltre dà comunicazione del seguente avviso di concorso a premio, trasmesso all'Accademia dall'*Iron and Steel Institute* di Londra.

Borsa di ricerche « Andrew Carnegie ».

Una borsa di ricerche, del valore che potrà sembrare conveniente al Consiglio dell'« Iron and Steel Institute », fondata dal signor Andrew Carnegie, che ha donato all'« Institute » sessantaquattro obbligazioni, cinque per cento, di mille dollari l'una della « Pittsburg, Bessemer and Lake Erie Railroad Company », sarà assegnata annualmente, senza riguardo di sesso e nazionalità, su proposta del Consiglio. I candidati, che debbono avere meno di 35 anni d'età, presenteranno la domanda (su formulario trasmesso su richiesta) prima della fine di marzo al Segretario dell'« Iron and Steel Institute ».

L'oggetto di queste borse non è di facilitare gli ordinari studi collegiali, ma di aiutare gli studenti, che sono passati per un corso di studi o hanno lavorato in stabilimenti industriali, a condurre ricerche sulla metallurgia del ferro e dell'acciaio e soggetti connessi, allo scopo di contribuire al suo progresso ed alla sua applicazione all'industria. Non vi è nessuna restrinzione riguardo al luogo per le ricerche, università, scuole tecniche, od officine, purchè sia convenientemente fornito per le ricerche metallurgiche.

La concessione della borsa sarà per un anno; ma è in facoltà del Consiglio di rinnovarla per un nuovo periodo; nel qual caso non si procederà a nuova attribuzione.

I risultati delle ricerche saranno comunicati all'« Iron and Steel Institute » in forma di una memoria da sottomettersi all'assemblea generale dei membri, e, se il Consiglio giudicherà il lavoro di merito sufficiente, si potrà assegnare all'autore la medaglia d'oro « Andrew Carnegie ».

Il Segretario generale
Bennett H. Brough.

28, Victoria Street,
Londra.

CORRISPONDENZA

Il Vicepresidente Blaserna dà comunicazione di una lettera del Socio Tacchini che ringrazia pel voto di plauso inviatogli dall'Accademia.

Lo stesso Vicepresidente partecipa che la Presidenza dell'« Owens College » di Manchester, ha invitato l'Accademia a prender parte alla celebrazione del 50° anniversario della sua fondazione; e la Classe delibera di farsi rappresentare alla cerimonia, che avrà luogo nel marzo venturo.

Il Segretario Grassi dà quindi conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la Società zoologica di Tokyo; la Società geologica di Washington; la Società geologica di Ottawa; la So-

cietà di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Manchester; il Museo di storia naturale di New York; il Museo Nazionale di Buenos Aires; l' Istituto Smithsoniano di Washington.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

L'Accademia d'agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio di Verona; l'Accademia delle scienze di Vienna; l'Accademia delle scienze di Córdoba; l'Accademia Reale di Dublino; l'Accademia delle scienze di Cracovia; la R. Accademia delle scienze di Stockholm; la Società di scienze naturali di Buffalo; l'Orto botanico di Missouri.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 gennaio 1902.

Berthelot M. — Les carbures d'hydrogène. 1851-1901. T. I-III. Paris, 1901. 8°.

Boucard A. — Les oiseaux utiles et nuisibles. Paris, 1901. 8°.

Cauchy A. — Oeuvres complètes publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences. 1ᵉ Sér. T. XII. Paris, 1900. 4°.

De Angelis G. — Escursione geologica della Miniera Marganai (Iglesias). Torino, 1901. 8°.

De Blasio A. — Delitto e forma geometrica della faccia fra i delinquenti napoletani. Napoli, 1901. 8°.

Goppelsröder F. — Capillaranalyse beruhend auf Capillaritäts- und Adsorptionserscheinungen mit dem Schlusskapitel: das Emporsteigen der Farbstoffe in den Pflanzen. Basel, 1901. 8°.

Kalecsinsky A. v. — Ueber die ungarischen warmen und heissen Kochsalzseen als natürliche Wärme-Accumulatoren, sowie ueber die Herstellung von warmen Salzseen und Wärme-Accumulatoren. Budapest, 1901. 8°

Langley S. P. — The New Spectrum. S. l., 1901. 8°.

Lockyer N. — Further observations on Nova Persei. N. 4. London, 1901. 8°.

Macchiati L. — A proposito di un afide descritto come nuovo sul nerium oleander L. Firenze, 1901. 8°.

Id. — L' assimilazione contemporanea del carbonio, dell' idrogeno e dell' ossigeno è una speciale fermentazione promossa dall' attività vitale di una diastasi, segregata dalle cellule contenenti pigmenti clorofillici. Firenze, 1901. 8°.

Macoun J. — Catalogue of Canadian Birds. P. I. Ottawa, 1901. 4°.

Marson L. — Sui ghiacciai del Bernina. Roma, 1901. 8°.

Minutes of evidence taken by the Indian plague Commission, Report and Indices ecc. Vol. I-V. London, 1900-1901. 4°.

Morin F. — Anatomie comparée et expérimentale de la feuille des Muscinées. Anatomie de la nervure appliquée à la classification. Rennes, 1893. 4°.

Musée Botanique de Leide, par W. F. R. Suringar. Vol. I. II. III. p. 1-12. Leide, 1871-1897. 4°.

Passalsky P. — Anomalies magnétiques dans la région des mines de Krivoï-Rog. Odessa, 1901. 4°.

Pflüger E. — Fortgesetzte Untersuchung ueber die in wasserlöslicher Form sich vollziehende Resorption der Fette. Bonn, 1901. 8°.

Id. — Ueber die Bedeutung der Seifen für die Resorption der Fette. Bonn, 1901. 8°.

Pingré A. G. — Annales célestes du dix-septième siècle. Paris, 1901. 4°.

Semmola E. — Il nuovo cono eruttivo vesuviano nell' aprile 1901. Napoli, 1901. 8°.

Id. — Il Vesuvio nel maggio 1900. Napoli, 1901. 8°.

Id. — La pioggia ed il Vesuvio. Nota. 2ª. Napoli, 1901. 8°.

Id. — Quando ebbe fine la fase esplosiva del Vesuvio nel maggio 1900? Napoli, 1901. 8°.

Salvioni E. — Misura di masse comprese fra gr. 10^{-1} e gr. 10^{-6}. Messina, 1901. 8°.

Id. — Sulla volatilizzazione del muschio. Messina, 1901. 8°.

Id. — Un' esperienza per dimostrare il decrescere della pressione atmosferica con l' altezza. Messina, 1901. 8°.

Id. — Un nuovo igrometro. Messina, 1901. 8°.

Torelli G. — Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato. Napoli, 1901. 4°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 gennaio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Botanica. — *Origine e differenziazione degli elementi vascolari primarî nella radice delle Monocotiledoni.* Nota I preventiva del Socio R. Pirotta.

Già Th. Lestiboudois aveva affermato che nelle radici delle Monocotiledoni i vasi si formano dal di fuori al di dentro. Occorre però giungere a C. Nägeli per avere al riguardo dello sviluppo degli elementi vascolari nelle radici notizie più esatte e sicure. Nägeli stabilisce che già nei primi stadî di sviluppo si manifesta una grande differenza tra il caule e la radice, perchè mentre nel primo la formazione dei vasi è *centrifuga*, cioè procede dal centro verso la periferia, nelle seconde è *centripeta*, cioè comincia alla periferia e procede in linea radiale verso il centro. Aggiunge che la lignificazione degli elementi vascolari procede pure, come già aveva detto Karsten, centripetamente. Rileva soltanto che nelle radici di *Pandanus* la comparsa de' cordoni cambiali (pro-cambiali) comincia nel punto mediano della radice e si muove verso l'esterno.

Tutti gli autori che si sono occupati della struttura e dello sviluppo della radice e dei suoi costituenti anatomici, concordano nell'ammettere che la lignificazione, cioè la differenziazione fino allo sviluppo completo degli elementi vascolari della radice, procede dalla periferia al centro, e cioè centripeta. Non tutti invece sono d'accordo quanto al modo d'origine degli elementi vascolari medesimi.

Nelle radici della grandissima maggioranza delle Monocotiledoni si trovano due sorta di vasi distinti per origine e struttura; gli uni formano i *raggi vascolari* disposti regolarmente dalla periferia verso il centro, dove qualche volta si incontrano; gli altri si trovano all' interno dei raggi vascolari, in quella parte interna del cilindro centrale della radice che possiamo chiamare appunto *centrale*. Questi vasi *centrali* variano di numero da uno a molti, variano di posizione essendo talora disposti in cerchio verso la periferia della porzione centrale, tal' altra quasi addossati ai raggi vascolari, tal' altra sparsi senza ordine dovunque, tal'altra ancora lasciano una parte centrale libera da' vasi. Quando vi è un solo vaso, questo è di regola *assile* e talora avviene che un vaso assile si trovi anche quando vi sia più un vaso centrale o interno.

Ph. Van Tieghem rltiene che i grandi vasi interni della radice di certe Aroidee siano gli ultimi a formarsi, che essi anche quando sono staccati dagli elementi del raggio vascolare, appartengano al raggio medesimo e ne siano precisamente gli elementi più interni. Per lui dunque vi sono soltanto raggi vascolari in queste radici, e il loro sviluppo è centripeto. C. Nägeli e H. Leitgeb, senza preoccuparsi delle due sorte di vasi, affermano pure che gli elementi primi a formarsi sono quelli esterni. Anche E. Russow, che si è con tanta competenza occupato di questo genere di studî, sostiene che nelle radici lo sviluppo degli elementi vascolari, come di quelli cribosi, ha luogo senza eccezione centripetamente e contemporaneamente. Aggiunge però, che il pleroma o tessuto embrionale del cilindro centrale, già istituito da J. Hanstein, dà generalmente origine nelle Monocotiledoni a un tessuto procambiale periferico dal quale proverranno i raggi vascolari ed i cordoni cribosi, e ad un tessuto o parenchima midollare nel centro, che si differenzierà in midollo.

Ammisero l'origine centripeta dei raggi vascolari anche L. Kny, la S. Goldsmith, J. Klinge, J. E. Weiss, C. E. Bertrand, R. Gérard, P. A. Dangeard e altri non pochi.

Come abbiamo veduto Ph. Van Tieghem riteneva i vasi centrali parte integrante del fascio vascolare della radice e in questa opinione lo seguirono, fra gli altri, P. Falkenberg, J. Klinge, almeno per la maggior parte dei casi, R. Gérard, P. A. Dangeard, Kattein. Però lo stesso Van Tieghem, molto più tardi ammise, almeno per le radici di alcune Monocotiledoni, che i vasi centrali siano indipendenti dai raggi vascolari e provengano da differenziazioni dirette di cellule midollari e li chiama *vasi estralegnosi*. Subito dopo il mio scolaro G. Cerulli-Irelli, e più recentemente E. Chauveaud confermarono che i vasi centrali e midollari non hanno nessun rapporto con quelli dei raggi nè per l'origine, nè per il modo di differenziazione, nè per la posizione e la disposizione.

O. Nicolai osservò per il primo in alcune Graminacee, che i primi vasi a comparire sono quelli centrali e midollari, che i piccoli vasi dei raggi

compariscono più tardi, che però i primi elementi formatisi che sono quelli più grandi e centrali lignificano per gli ultimi. Queste osservazioni però furono dimenticate per lungo tempo causa l'autorità di coloro che sostenevano l'opinione contraria. Soltanto più tardi fu accennato appena a ciò da Cerulli-Irelli, e fu ampiamente confermato in questi ultimi anni quasi contemporaneamente da E. Chauveaud, e da me e dal dott. L. Buscalioni (1).

La struttura dell'apice vegetativo della radice delle Monocotiledoni non è eguale per tutte, anzi è considerevolmente differente. In tutte però le radici terrestri ed aeree è ben manifesta quella regione interna di tessuti embrionali, che comunemente è detta pleroma e che darà origine al cilindro centrale della radice. Esso si differenzia normalmente e ben presto in tre regioni o istogeni, una esterna che darà origine al pericambio o periciclo, l'altra mediana immediatamente susseguente, il *parenchima procambiale*, e la terza interna più o meno sviluppata, il *parenchima centrale*.

In ciascuna di queste tre regioni, ma sopratutto nella seconda e nella terza si sviluppano elementi vascolari in modo regolare nel parenchima procambiale, di solito non regolare nel parenchima centrale.

Nel parenchima procambiale infatti hanno origine gli elementi dei *raggi vascolari* caratteristici per la radice in generale, che collocati ad eguale di stanza, in numero di due o più, spesso moltissimi, si veggono, a completo sviluppo, regolarmente disposti in cerchio, alternando coi cordoni cribrosi, dai quali li separano elementi del parenchima fondamentale.

Nel parenchima centrale hanno origine i *vasi centrali*, frequentissimi nelle radici delle Monocotiledoni, differenti di solito per disposizione, forma, dimensioni e struttura da quelli dei raggi vascolari. Talvolta vi è un solo vaso centrale ed occupa allora l'asse del cilindro centrale, cosicchè può dirsi *assile*; tal'altra ve ne sono pochi o molti, con o senza quello assile, isolati o a gruppi in modo variabile come vedremo più innanzi.

I primi elementi vascolari a comparire sono quelli centrali, e se ve ne è uno assile, questo è il primo di tutti a presentarsi. Essi si differenziano già in vicinanza dell'apice del pleroma, dove stanno le sue iniziali, dalle

(1) Insieme col mio assistente dott. Luigi Buscalioni venivano condotte le prime ricerche su questo argomento, i cui risultati furono per sunto fatti conoscere colla nota inserita in questi stessi Rendiconti a pag. 60 del vol. VII, 1° sem., serie V, fascicolo 3° (seduta del 6 febbraio 1898). Il dott. L. Buscalioni stette poi lontano a lungo dal Laboratorio per attendere a viaggi scientifici, quindi lo abbandonò. Egli continuò per suo conto le ricerche sull'argomento che aveva, già nel mio Istituto, estese ad altre questioni che più o meno vi si possono collegare, eseguendo con una attività straordinaria in due anni di lavoro un numero immenso di preparazioni. Mentre egli pubblicherà per suo conto i risultati delle sue investigazioni, io faccio qui noti quelli delle mie, continuate però soltanto allo scopo di completare lo studio dell'origine e della differenziazione degli elementi vascolari, solo argomento da noi iniziato già in comune. Col corredo di opportune tavole il lavoro vedrà ben presto la luce nell'*Annuario del R. Istituto Botanico di Roma.*

quali sembrano talvolta provenire direttamente. Però quando i vasi centrali sono parecchi o molti, quelli che man mano seguono verso l'esterno si differenziano ad una maggiore distanza dalle iniziali medesime. Ad ogni modo, quantunque la loro differenziazione abbia luogo di regola in modo rapido, non compariscono contemporaneamente, ma centrifugamente, cioè dal centro verso la periferia, benchè non in modo perfettamente regolare. Le cellule embrionali del parenchima centrale ricche di contenuto e attivamente in segmentazione nella parte più giovane, cessano, di regola, ben presto di segmentarsi per dar luogo agli elementi dei vasi, nel modo che sarà detto più innanzi.

Gli elementi dei raggi vascolari si differenziano più o meno tardi relativamente a quelli dei vasi centrali, sempre però anche dopo la differenziazione dei cordoni cribrosi. Di essi elementi vascolari i primi a comparire, di regola generalissima, sono quelli che stanno più all'interno del futuro raggio, e si seguono man mano in ordine centrifugo, cioè dall'interno verso l'esterno, dai più grandi ai più piccoli, che sono quelli periferici. Il che è reso palese anche dal fatto che il processo di segmentazione cellulare continua ancora alla periferia, quando è già cessato verso l'interno.

Come regola generalissima, di tutti questi vasi i primi a raggiungere la loro completa differenziazione, il loro stato adulto, reso manifesto dal processo di lignificazione della parete e dalla scomparsa del corpo protoplasmatico, sono quelli dei raggi vascolari, e precisamente in modo centripeto, vale a dire, che la lignificazione procede dall'esterno, dai più piccoli elementi vascolari del raggio verso l'interno cioè verso i più grandi del raggio medesimo, e poi a quelli man mano centrali. Talvolta però si modifica profondamente anche il parenchima fondamentale della porzione centrale del cilindro, lignificandosi più o meno. Allora, di regola il processo di lignificazione procede dal centro alla periferia.

Matematica. — *Sugli spazî plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazî.* Nota di FRANCESCO SEVERI, presentata dal Socio SEGRE.

In una Nota pubblicata in questi medesimi Rendiconti il prof. Segre assegnò l'ordine delle condizioni che s'impongono agli elementi di una matrice volendo ch'essa sia di dato rango (1). Svariatissime sono le applicazioni

(1) *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* (Rend. de' Lincei, (5), t. IX, 1900). La formola alla quale si allude nel testo è stata dall'A. dedotta da una che Schubert aveva enunciato senza dimostrazione, e che trovasi dimostrata, insieme ad una più generale sulle correlazioni, nella dissertazione di laurea, presentata dal dott. Giambelli, or non è molto, alla Facoltà di scienze dell'Università di Torino.

che si possono fare di questo risultato alla geometria; ed io mi propongo di far vedere in questa Nota come da esso si possa dedurre in una maniera semplice ed elegante, il numero degli spazî plurisecanti di una curva razionale (numero già intuito dal Meyer e dal Tanturri) e, più in generale, il numero degli spazî plurisecanti di una ∞^1 razionale di S_h, nello S_r, ossia il numero degli spazî di data dimensione che contengono il massimo numero di spazî generatori della varietà stessa.

1. Per conseguire il nostro scopo è necessario premettere la risoluzione del seguente problema.

Avendosi nello S_d $d-l$ *sistemi lineari projettivi* ∞^p *di iperpiani, quanti sono gli* $[l]$ *comuni a* $d-l$ *iperpiani omologhi dei suddetti sistemi, i quali si appoggiano a un dato* $[\delta]$ *secondo uno spazio* $[\beta]$, *se* $(\beta+1)(d-\delta-l+\beta)=p$?

Siano

$$\sum_0^p \lambda_i f_i' = 0\,,\quad \sum_0^p \lambda_i f_i'' = 0\,,\ \dots\,,\quad \sum_0^p \lambda_i f_i^{(d-l)} = 0\,,$$

le equazioni dei $d-l$ sistemi di iperpiani, e supponiamo di aver scelto le coordinate interne in ciascuno di essi in guisa che gli iperpiani omologhi si ottengano da quelle equazioni dando alle λ gli stessi valori.

Le coordinate dei punti del dato spazio $[\delta]$ si possono esprimer così:

$$x_i = a_{i0}\mu_0 + a_{i1}\mu_1 + \dots + a_{i\delta}\mu_\delta \ (i=0\,,1\,,\dots\,,d)\,,$$

ove le x_i son forme indipendenti delle μ; e quindi i punti appartenenti al dato spazio $[\delta]$ e allo spazio $[l]$ comune agli iperpiani dei sistemi dati corrispondenti a fissati valori delle λ, si otterranno dalle equazioni:

$$\sum_0^p \lambda_i f_i' (a_{j0}\mu_0 + \dots + a_{j\delta}\mu_\delta) = 0\,,\ \dots\,,\quad \sum_0^p \lambda_i f_i^{(d-l)} (a_{j0}\mu_0 + \dots + a_{j\delta}\mu_\delta) = 0\,,$$

le quali, mettendo in evidenza $\mu_0\,,\mu_1\,,..\,,\mu_\delta$, possono scriversi

$$\sum_0^\delta \mu_i \varphi_i^{(1)}(\lambda) = 0\,,\ \dots\,,\quad \sum_0^\delta \mu_i \varphi_i^{(d-l)}(\lambda) = 0\,,$$

ove le φ sono forme lineari di $\lambda_0\,,\lambda_1\,,\dots\,,\lambda_p$.

Volendo che i punti x giacenti nel dato $[\delta]$ e in uno spazio $[l]$ comune agli iperpiani dei dati sistemi corrispondenti a certi valori delle λ, riempiano uno spazio $[\beta]$, bisognerà esprimere che le equazioni precedenti fra le μ si riducono a $\delta-\beta$ distinte, ossia che la matrice $|\varphi_i^{(j)}(\lambda)|$ $(i=0\,,1\,,..\,,\delta\,;\ j=1\,,\dots\,,d-l)$ ha il rango $\delta-\beta$.

Applicando la formola citata del prof. Segre, ove si ponga

$$m = \delta\,,\ n = d - l - 1\,,\ q = \delta - \beta - 1$$

avremo l'espressione

$$(1)\qquad \frac{(d+2\beta+1-\delta-l)_u\,(d+2\beta+2-\delta-l)_u \ldots (d+\beta-l)_u}{(u)_u\,(u+1)_u \ldots (d-l-1)_u}$$

[ove $u = d - \delta + \beta - l$ e il simbolo $(a)_b$ sta invece di $\binom{a}{b}$], come ordine del sistema di condizioni, equivalenti a $(\beta+1)\,(d-\delta-l+\beta)$ indipendenti, che s'impongono alle λ volendo che la matrice delle φ sia di rango $\delta - \beta$. — Siccome per ipotesi

$$(\beta+1)\,(d-\delta-l+\beta) = p$$

il numero che richiedevamo, sarà in generale finito ed espresso dalla formola (1).

2. Se $2\beta + 2 \leq \delta$ la (1) può scriversi:

$$\frac{(d+2\beta+1-\delta-l)_u \ldots (d-l-1)_u\,(d-l)_u \ldots (d-l+\beta)_u}{(u)_u\,(u+1)_u \ldots (d+2\beta+1-\delta-l)_u \ldots (d-l-1)_u}$$

e quindi sopprimendo i fattori comuni al numeratore e al denominatore

$$(2)\qquad \frac{(d-l)_u\,(d-l+1)_u \ldots (d-l+\beta)_u}{(u)_u\,(u+1)_u \ldots (d+2\beta-\delta-l)_u}\,.$$

Se $2\beta + 1 = \delta$ la (1) e la (2) coincidono.

Quando infine $2\beta \geq \delta$ moltiplicando numeratore e denominatore della (1) per $(d-l)_u\,(d-l+1)_u \ldots (d+2\beta-\delta-l)_u$, avremo ancora il numero di cui ci siamo occupati sotto la forma (2).

Se $\delta = \beta$ allora la formola del prof. Segre diventa illusoria e quindi non si può più scriver la (2) come conseguenza di essa. Ma allora è evidente che l'ordine del sistema di condizioni che s'impongono alle λ volendo che la matrice delle φ sia del rango $\delta - \beta = 0$, è 1, perchè le condizioni suddette si ottengono uguagliando a 0 le φ. La (2), nel caso $\delta = \beta$, riducesi proprio all'unità, e dunque scrivendo il numero che ci ha occupato sotto la forma (2), veniamo a rimuovere ogni caso di eccezione.

3. E passiamo adesso al problema che costituisce l'oggetto di questa Nota.

Rifacciamoci dal caso di una curva razionale d'ordine ν dello spazio $[r]$ e sia C la curva d'ordine ν dello S_ν, di cui la data può pensarsi come projezione.

Gli S_k t-secanti della curva data nello S_r, i quali sono generalmente in numero finito e non nullo quando $(r-k-1)\,t = (k+1)\,(r-k)$, corrispondono biunivocamente ai $[t-1]$ t-secanti di C, i quali si appoggiano a un dato $[\nu - r - 1]$ secondo un $[t-k-2]$.

Si assumano $\nu - t + 1$ spazî $[\nu - t - 1]$, $(\nu - t)$ — secanti di C, e siano $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{\nu-t+1}$, come sostegni di altrettanti sistemi lineari $(\Sigma_1), \ldots, (\Sigma_{\nu-t+1})$ di iperpiani; e diciamo che due iperpiani appartenenti rispettivamente a due di quei sistemi sono omologhi, quando, dai rispettivi sostegni, projettano un medesimo $[t - 1]$, t — secante di C. Di qual natura sono le corrispondenze che veniamo così a porre fra i sistemi (Σ)? I coni che projettano C da due spazî Σ, p. e. Σ_1 e Σ_2, dànno come traccia su un generico spazio $[t]$ due curve C_1, C_2 d'ordine t, e quindi normali, le quali risultano riferite biunivocamente, e perciò projettivamente, quando si chiamino omologhi due dei loro punti che provengano da uno stesso di C. — Due iperpiani dei sistemi $(\Sigma_1), (\Sigma_2)$ omologhi nella corrispondenza, che, con la legge detta prima, si pone fra i sistemi suddetti, vengono a projettare due $[t - 1]$ dello spazio di C_1 e C_2, che sono omologhi nella projettività fra C_1 e C_2; ne segue che anche la corrispondenza fra (Σ_1) e (Σ_2) è una projettività; e così per le altre coppie di sistemi (Σ).

Dopo ciò gli spazî $[t - 1]$ t — secanti di C si presentano come spazî d'intersezione di $\nu - t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi projettivi ∞^t (i sistemi (Σ)). Si tratterà dunque di trovare quanti sono i $[t - 1]$ d'intersezione di $\nu - t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi projettivi ∞^t, i quali si appoggiano a un dato $[\nu - r - 1]$ secondo un $[t - k - 2]$. Applicando la formola (2), nella quale si ponga

$$d = \nu\,,\ l = t - 1\,,\ p = t\,,\ \delta = \nu - r - 1\,,\ \beta = t - k - 2\,,$$

avremo il numero degli S_k t — secanti di una curva razionale di ordine ν dello S_r:

$$\frac{(\nu - t + 1)_{r-k}\,(\nu - t + 2)_{r-k} \ldots (\nu - k - 1)_{r-k}}{(r - k)_{r-k}\,(r - k + 1)_{r-k} \ldots (r - 2k + t - 2)_{r-k}}\ (^1)\,.$$

4. Il procedimento precedente si può estendere per la determinazione del numero degli S_k che contengono il massimo numero di spazî generatori di una ∞^1 di S_h, razionale e dell'ordine ν, appartenente allo S_r.

Se

$$t[(h + 1)(r - k) - 1] = (k + 1)(r - k)$$

(1) Come abbiamo accennato questa formola trovasi scritta *per induzione* in Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883, vedi a p. 363), e in Tanturri, *Ricerche sugli spazî plurisecanti di una curva algebrica* (Annali di Matematica, (3), t. IV, 1900); ma non era stata dimostrata in tutta la sua generalità. Il procedimento del Tanturri permette di assegnare il numero degli spazî plurisecanti di una curva razionale in ogni caso numerico; ma poggia, oltrechè sulla conservazione del numero, sopra certi postulati che non sono peranco dimostrati. Nella mia Nota, *I gruppi neutri con elementi multipli in un'involuzione sopra un ente razionale* (Rendiconti de' Lincei, (5), t. IX, 1901) dalla formola del testo si deduce il numero degli spazî che hanno contatti di dati ordini con una curva razionale dello $[r]$.

esisterà in generale un numero finito e non nullo di spazî S_k contenenti t $[h]$ generatori della nostra varietà; e noi, nel seguito, supporremo che la relazione precedente sia soddisfatta.

Sia V la varietà normale, d'ordine ν, dello spazio $[\nu + h]$, di cui la data varietà può riguardarsi come projezione. Gli spazî $[k]$ che ricerchiamo corrispondono biunivocamente agli spazî $[(h+1)\,t - 1]$ che congiungono a t a t gli spazî generatori di V e che si appoggiano a un dato $[\nu + h - r - 1]$ secondo un $[(h+1)\,t - k - 2]$ (1). Assumiamo in V $\nu + h - (h+1)\,t + 1$ direttrici ad h dimensioni di ordine $\nu - t$, e siano $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ gli spazî a $\nu + h - t - 1$ dimensioni in cui esse sono immerse (Bellatalla, loc. cit., n. 2). Fra gli iperpiani dei sistemi linearî (Σ) poniamo delle corrispondenze dicendo omologhi gli iperpiani di quei sistemi quando, dai rispettivi sostegni, projettano le t — ple di spazî generatori di V. Queste corrispondenze saranno projettività come si vede secando tutto con un S_ν e osservando che, per una considerazione svolta al n. 3, le sezioni dei sistemi (Σ) riferiti nel modo detto, sono sistemi lineari projettivi di $S_{\nu-1}$.

Sicchè la nostra questione è ridotta a cercare nello $S_{\nu+h}$, quanti sono gli spazî $[(h+1)\,t - 1]$ comuni a $\nu + h - (h+1)\,t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi lineari projettivi ∞^t, i quali si appoggiano a un dato $[\nu + h - r - 1]$ secondo un $[(h+1)\,t - k - 2]$; e la risposta ad essa l'avremo ponendo nella formola (2)

$$d = \nu + h,\ l = (h+1)\,t - 1,\ p = t,\ \delta = \nu + h - r - 1,\ \beta = (h+1)\,t - k - 2.$$

Verrà allora:

$$\frac{(\nu + h - (h+1)\,t + 1)_{r-k}\,(\nu + h - (h+1)\,t + 2)_{r-k} \ldots (\nu + h - k - 1)_{r-k}}{(r-k)_{r-k}\,(r - k + 1)_{r-k} \ldots (r - 2k + (h+1)\,t - 2)_{r-k}}.$$

Questa è la formola che dà il numero dei $[k]$ che contengono t S_h generatori di una ∞^1 razionale di spazî, appartenente allo S_r, allorchè, beninteso, questo numero è finito (2).

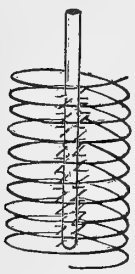
(1) Qui si suppone, implicitamente, che t $[h]$ generatori di V siano *indipendenti*, per il che bisogna e basta che sia $t \leq m' + 1$ ove m' denota l'ordine di una curva direttrice minima tracciata sopra V. Cfr. Bellatalla, *Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazî lineari* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXXVI, 1901) n. 10. Se $t > m' + 1$ il numero di cui ci stiamo occupando nel testo, sarà infinito.

(2) Per $k = r - 1$ si ottiene la formola data dal Tanturri al n. 6 della Nota, *Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di ∞^1 spazî.* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXXV, 1900).

Fisica. — *Ricerche di radioattività indotta.* Nota preliminare di A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

I signori Elster e Geitel hanno osservato recentemente che si può rendere temporariamente radioattivo un corpo esposto all'aria e portato ad un alto potenziale negativo. La radioattività indotta è molto intensa se l'aria in cui è immerso il corpo si trova in uno stato di ionizzazione elevata, come nei luoghi chiusi, grotte, ecc.

Ora io sono riuscito a comunicare una intensa radioattività ad un metallo nel seguente modo. Si prende una spirale di filo di zinco od alluminio (spessore 2 mm.) e del diametro di circa 12 cm.; coassialmente ad essa si dispone un sottile cilindro di carta ricoperto di stagnola, normalmente al quale sono infilati degli aghi. Se ora si mette in comunicazione la spirale e gli aghi rispettivamente coi poli di una macchina elettrostatica ad influenza, e si lascia per qualche tempo la macchina in azione si trova la spirale fortemente attiva.



Questa attivazione si dimostra circondando colla spirale, al suolo, un cilindro metallico carico, in comunicazione con un elettrometro (nel modo più comodo adoperando l'apparecchio Elster e Geitel per la misura della dispersione atmosferica) ed osservando la caduta del potenziale. Con una spirale sottoposta ad un trattamento di due ore, ottenni una scarica completa dell'elettrometro Elster e Geitel in meno di un minuto, là dove erano necessarie almeno due ore operando in identiche condizioni, ma colla spirale non attivata. Così si può, strofinando il filo metallico e raccogliendo la sostanza così tolta, ottenere un'energica impressione della lastra fotografica attraverso spessi strati di carta nera opaca.

Ora questa attivazione si ottiene sia con spirale positiva, sia con spirale negativa. Per essere al coperto da variazioni del segno elettrico (oscillatore) ho posto in derivazione sulla macchina una forte capacità ed inserito nel circuito un'alta resistenza liquida.

Questo risultato è del tutto inaspettato, perchè Rutherford sopra l'ossido di torio, Dorn sopra i sali di radio, Elster e Geitel nell'aria atmosferica non hanno mai ottenuto radioattività indotta sopra un corpo positivo. Data questa indipendenza del fenomeno dal segno, pensai di mettere spirale ed aghi in comunicazione coi poli di un trasformatore Tesla. Ora, con questa disposizione, per quanto i fiocchi sugli aghi e l'effluvio elettrico fossero molto più vivaci che non colla macchina elettrostatica, non ottenni che una attivazione molto debole della spirale.

Elettrochimica. — *Misura della diffusione elettrolitica, dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni* (1). Nota I di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio A. COSSA.

Considerazioni generali. — La teoria della propagazione dell'elettricità attraverso gli elettroliti, quando si voglia tener conto anche solamente dei principali fenomeni che la accompagnano, presenta gravi difficoltà, che non possono attualmente venire superate in causa della nostra incompleta conoscenza di alcuni di questi fenomeni. Essa sarebbe però di grandissima utilità non solo dal lato scientifico, ma anche da quello delle applicazioni. Infatti, come osserva Kohlrausch in un suo interessante lavoro (2), molti sono i casi pratici in cui sarebbe utile di conoscere le successive modificazioni di un elettrolito in riposo percorso da una corrente elettrica. Invece le nostre conoscenze in proposito sono ancora estremamente limitate.

Consideriamo un cilindro contenente una soluzione di un elettrolito e percorso da una corrente elettrica di densità uniforme. Se originariamente lo stato di questo elettrolito in ogni sezione normale all'asse era solo funzione dell'altezza x di essa, il problema della determinazione dello stato dell'elettrolito in tutti i tempi dipenderà da una sola coordinata, l'altezza x. Basandoci sulla teoria delle soluzioni di Van t'Hoff e della migrazione dei ioni di Hittorf, potremo esprimere la quantità di sostanza S che nell'unità di tempo attraversa una sezione q del cilindro colla nota formula:

1) $$S = -Dq\frac{\partial p}{\partial x} + i\{n - (1-n)\}\varepsilon$$

In essa D indica il coefficiente di diffusione dell'elettrolito relativamente alla pressione osmotica, i l'intensità della corrente, ε l'equivalente elettrochimico dell'elettrolito. Finalmente n indica il numero di trasporto del catione e quindi $1 - n$ quello dell'anione.

Per poter trattare il problema generale applicando questa legge, sarebbe necessario esprimere analiticamente i valori del coefficiente D, di n e della variabile p in funzione della concentrazione.

Le ricerche di Hittorf hanno dimostrato in modo certo che per alcuni elettroliti n varia assai colla concentrazione; non si posseggono però ancora attualmente sufficienti misure per poter determinare questa funzione.

(1) Ricerche eseguite nel laboratorio di Elettrochimica del R. Museo Industriale Italiano in Torino nel mese di agosto 1901.

(2) F. Kohlrausch, *Ueber Concentrations-Verschiebungen durch Elektrolyse im Innern von Lösungen und Lösungsgemischen.* Wied. Annalen, Band. 62.

I metodi di misura ordinariamente impiegati si prestano assai poco a questa determinazione, perchè fondati sulla produzione di forti differenze di concentrazioni in vicinanza dei due elettrodi e non possono quindi fornire che dei valori medi del numero di trasporto. Coll'impiego di diaframmi porosi si riesce a misurare producendo limitate variazioni di concentrazioni, ma il valore che si ottiene può in alcuni casi venire notevolmente influenzato dalla presenza del diaframma.

Perchè un metodo di misura possa dare risultati buoni, deve escludere completamente l'impiego di diaframmi e richiedere differenze di concentrazioni molto piccole. Allora solamente si potrà parlare di un coefficiente di diffusione e di un numero di trasporto per quella data concentrazione. Siccome poi queste due quantità sono assai variabili colle condizioni fisiche e collo stato di purezza dell'elettrolito impiegato, sarà bene che il metodo permetta di eseguire la loro determinazione con un solo apparecchio, funzionante sempre in identiche condizioni.

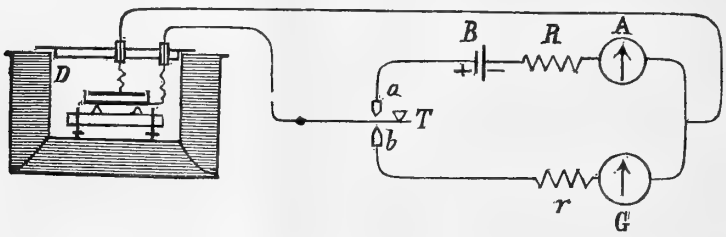
Io mi propongo di esporre un metodo per la misura del coefficiente di diffusione D e del numero di trasporto n, che soddisfaccia alle predette condizioni; esso avrà inoltre sui metodi attualmente impiegati il vantaggio della speditezza, perchè tutta la misura si potrà eseguire in un tempo arbitrariamente piccolo. Esso potrà inoltre servire per la determinazione delle mobilità assolute U e V dei ioni impiegando la relazione esistente, secondo la teoria osmotica delle soluzioni, fra il coefficiente di diffusione e le mobilità.

La teoria della diffusione elettrolitica, dovuta a Nernst, fu sottoposta a molte verifiche sperimentali e confermata in modo sufficiente per poter essere presa a base di un metodo di misura delle mobilità dei ioni. In ogni caso il metodo che esporrò, potrà sempre servire alla misura del coefficiente di diffusione dell'elettrolito e dei numeri di trasporto, indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla natura delle soluzioni. Allora si farà solo uso della legge elementare di Fick per la idrodiffusione; la quantità di sostanza che si diffonderà attraverso la superficie unitaria del cilindro considerato sarà allora, indicando con c la concentrazione dell'elettrolito:

$1^{bis})$
$$S' = -D' \frac{\partial c}{\partial x} + \{n - (1-n)\{ \; i \; \varepsilon.$$

Descrizione del metodo. — Il concetto fondamentale di questo metodo consiste nel porre l'elettrolito da studiarsi fra due elettrodi orizzontali, collocati ad una piccola distanza l'uno dall'altro, nel provocare mediante una corrente elettrica di densità convenientemente scelta, uno spostamento dell'elettrolito dall'alto in basso e nel calcolare dalle variazioni delle concentrazioni in vicinanza degli elettrodi i valori di D ed n. Specialmente semplice si presenta il caso, al quale sono limitate queste prime ricerche, in

cui l'elettrolito è un sale del metallo degli elettrodi. Esso presenta allora una certa analogia con quello impiegato dal prof. H. F. Weber (1) per la verifica della legge di Fick. Le misure necessarie si possono eseguire facilmente mediante la disposizione sperimentale rappresentata dallo schema seguente:



L'apparecchio D in cui avveniva la diffusione era costituíto da due dischi di metallo dello spessore di circa 1 cm, e del diametro di 9 cm., separati l'uno dall'altro da tre pezzetti di vetro, che nelle diverse misure avevano spessori differenti variabili da 1 a 5 mm.

Il disco inferiore era circondato da una striscia di ebanite alta circa 3 cm. che serviva per trattenere il liquido, ed era collocato su un supporto con viti d'orizzonte e livello; il tutto era rinchiuso in una cassa di zinco circondata da acqua per mantenere la temperatura costante. B era un accumulatore, R un reostato per regolare l'intensità della corrente, A un amperometro; G era un galvanometro di grande resistenza (10000 Ω) avente in serie un reostato r pure di grandissima resistenza; T era un commutatore a tasto.

La misura veniva eseguita nel seguente modo: Si stabiliva la comunicazione del tasto T con a, così si chiudeva il circuito B R A D e si mandava attraverso l'elettrolito una corrente opportunamente stabilita e di intensità i mantenuta costante mediante il reostato R e l'amperometro A. Di tempo in tempo, spingendo rapidamente il tasto T in contatto con h, si interrompeva il circuito B R A D e si chiudeva invece il circuito r G D; si poteva così, data la grande resistenza del galvanometro e della resistenza in serie (durante questa misura 50000 Ω) misurare la forza elettromotrice in D e calcolare, come vedremo in seguito, la differenza delle concentrazioni dell'elettrolito in contatto degli elettrodi. Quando questa forza elettromotrice era divenuta stazionaria, si interrompeva il circuito B R A D mandando il tasto T nella sua posizione intermedia e si osservava ogni 15 secondi la forza elettromotrice in D chiudendo per un istante il circuito del galvanometro. Siccome, come vedremo in seguito, non si possono utilizzare che le

(1) H. F. Weber, *Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion.* Wied. Ann. 7.

misure eseguite dopo un certo tempo dall'interruzione della corrente i, bisognava aumentare la sensibilità del galvanometro e ridurre la resistenza del reostato r a 10000 Ω. La quantità di elettricità che passava attraverso il galvanometro durante l'istante di chiusura era così piccola, che non poteva avere alcuna influenza sullo stato degli elettrodi o dell'elettrolito: essa non raggiungeva mai il valore di un milionesimo di coulomb. Dai valori successivi della forza elettromotrice misurata si calcolavano i decrementi logaritmici di due in due minuti primi e se ne faceva il valore medio. Con esso e con quello della forza elettromotrice stazionaria precedentemente misurata si calcolavano D ed n e quindi anche U e V.

Questo calcolo dipenderà dallo stato di purezza dell'elettrolito e dalle sue concentrazioni. Noi considereremo dapprima il caso di una soluzione diluita di un solo elettrolito; in seguito tratteremo il caso di soluzioni concentrate e poi quello di soluzioni di parecchi elettroliti.

Teoria per una soluzione diluita di un solo elettrolito. — Partendo dalla legge espressa dall'equazione 1^{bis}, si stabilisce facilmente che l'equazione che presiede ai fenomeni di diffusione nell'interno di un elettrolito, è la nota equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \mathrm{D}' \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Per le ricerche di Hittorf si sa inoltre, che la quantità di sale che scompare dallo strato infinitesimo in contatto col catodo, nel tempo t, per l'azione di una corrente costante i è eguale a:

$$i\,(1 - n)\,\varepsilon\,t,$$

in cui n è come precedentemente il numero di trasporto del catione, ε l'equivalente elettrochimico dell'elettrolito. Parimenti nello strato infinitesimo in contatto coll'anodo apparirà, nel tempo t, la stessa quantità di sale. Se poniamo l'origine delle coordinate x al catodo ed indichiamo con L la distanza dei due elettrodi, con q la superficie, e supponiamo la concentrazione originariamente uniforme c_0, il nostro problema si ridurrà alla ricerca di una soluzione dell'equazione (2), soddisfacente inoltre alle condizioni:

(3) al catodo $x = 0$ $\quad q\mathrm{D}'\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} = i\,(1 - n)\,\varepsilon$ per ogni tempo

(4) all'anodo $x = \mathrm{L}$ $\quad q\mathrm{D}'\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=\mathrm{L}} = i\,(1 - n)\,\varepsilon$ per ogni tempo

(5) $t = 0$ $\quad c = c_0$ in ogni punto.

Questo problema essendo identico a quelli che si incontrano nella teoria della propagazione del calore, può essere risolto rapidamente. Si vedrebbe

allora, ciò che d'altra parte è fisicamente evidente, che la concentrazione in ogni punto tende verso un valore stazionario, che si può anche semplicemente calcolare supponendo $\frac{dc}{dt} = 0$ e quindi cercando una soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 0,$$

tale che siano soddisfatte le condizioni (3) e (4). Procedendo con notissimi metodi si ottiene:

$$(6) \qquad c_s = c_0 + \frac{i\varepsilon\,(1-n)}{D'q}\left(x - \frac{L}{2}\right).$$

Quest'equazione ci dice che la concentrazione nella sezione intermedia $x = \frac{L}{2}$ non è variata e che le concentrazioni al catodo ed all'anodo sono rispettivamente:

$$(7) \quad (c_s)_{x=0} = c_0 - \frac{i\varepsilon\,(1-n)}{D'q}\,\frac{L}{2} \quad \text{e} \quad (c_s)_{x=L} = c_0 + \frac{i\varepsilon\,(1-n)}{D'q}\,\frac{L}{2}.$$

Avendo supposto la soluzione diluita e quindi l'elettrolito completamente dissociato, potremo calcolare la forza elettromotrice E_s della pila a concentrazione risultante servendoci della nota formula di Nernst:

$$E_s = -\frac{0{,}0000866}{n'}\,\frac{2v}{u+v}\,T \ln \frac{(c_s)_{x=L}}{(c_s)_{x=0}} \text{ volta.}$$

Ma avendosi per la definizione di $1-n$:

$$1 - n = \frac{v}{u+v},$$

l'espressione della forza elettromotrice cercata sarà:

$$(8) \qquad E_s = -\frac{0{,}0000866}{n'}\,2\,(1-n)\,T \ln \frac{(c_s)_{x=L}}{(c_s)_{x=0}} \text{ volta.}$$

Poniamo per brevità $\frac{i\,\varepsilon\,(1-n)}{D'q}\,\frac{L}{2} = h$; allora sarà:

$$\log.\frac{(c_s)_{x=L}}{(c_s)_{x=0}} = \log.\frac{1+\frac{h}{c_0}}{1-\frac{h}{c_0}} = 2\left\{\frac{h}{c_0} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{c_0}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{c_0}\right)^5 + \cdots\right\}$$

Se h è sufficientemente piccolo si potranno trascurare tutti i termini della serie eccetto il primo; praticamente, per ridurre l'errore che si com-

mette, a meno di un centesimo, basterà che h sia minore di $0{,}52 \times c_o$. Nelle esperienze eseguite ciò è sempre verificato. Ne segue che la forza elettromotrice stazionaria fra i due elettrodi sarà:

$$(9) \qquad E_s = 2\,\frac{0{,}0000866}{n'}\,\frac{T\,(1-n)^2}{D'}\,\frac{i}{q}\,L\,\frac{\varepsilon}{c_0}\ \text{Volta}.$$

Abbiamo così una prima relazione fra n e D'. Nel caso che la concentrazione iniziale fosse troppo piccola o l'intensità della corrente troppo grande perchè sia rigorosa la semplificazione introdotta, si potrà calcolare una correzione, tenendo conto del secondo termine della serie $\frac{1}{3}\left(\frac{h}{c_0}\right)^3$.

Per dedurre la seconda relazione che ci è necessaria fra n e D', consideriamo lo stato variabile della concentrazione quando si interrompe la corrente i. Cominciando a contare il tempo da quell'istante, si dovrà cercare una soluzione dell'equazione differenziale (2) soddisfacente alle condizioni:

$$(10) \qquad \left(\frac{dc}{dx}\right)_{x=0} = 0\,, \quad \text{e} \quad \left(\frac{dc}{dx}\right)_{x=L} = 0 \quad \text{per ogni tempo}$$

e $c = c_s$ per $t = 0$ (vedi eq. 6).

Procedendo con noti metodi analitici, si ottiene la seguente soluzione del problema:

$$(11) \quad c = c_o - \frac{L}{\pi^2}\,i\,\frac{\varepsilon\,(1-n)}{D'}\,\frac{L}{q}\left\{e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't}\cos\frac{\pi}{L}x + \frac{1}{9}\,e^{-9\frac{\pi^2}{L^2}D't}\cos\frac{3\pi}{L}x + \cdots\right\}$$

Osserviamo ora che i termini successivi della serie vanno rapidamente decrescendo e che basterà un tempo non molto lungo, perchè tutti i termini siano trascurabili innanzi al primo. Allora la concentrazione si potrà rappresentare con un'equazione della forma:

$$c = c_0 \quad \text{Cost.}\ e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't}\cos\frac{\pi}{L}x\,.$$

Ai due elettrodi la concentrazione sarà quindi:

$$(c)_{x=0} = c_0 - \text{Cost.}\ e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't} \quad \text{e} \quad (c)_{x=L} = c_0 + \text{Cost.}\ e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't}$$

Procedendo come per il caso della concentrazione stazionaria, si dimostra che la forza elettromotrice fra i due elettrodi sarà data dalla formula:

$$(12) \qquad E = \text{cost.}\ e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't}\,.$$

Formando il decremento logaritmico per l'intervallo di tempo Δt si deduce:

$$\ln \frac{(E)_t}{(E)_{t+\Delta t}} = \frac{\pi^2}{L^2} D' \Delta t . \tag{13}$$

Quest'equazione ci permette di calcolare il valore del coefficiente D' ed in seguito mediante la (9) il valore di n.

Nel caso poi dell'elettrolito completamente dissociato, si ha per la definizione stessa dei numeri di trasporto:

$$n = \frac{U}{U+V} ; \tag{14}$$

ed anche secondo Nernst (Theoretische Chemie, pag. 258):

$$D' = \frac{2UV}{U+V} RT. \tag{15}$$

Si possono quindi calcolare le mobilità U e V dei ioni. Naturalmente tutte le quantità che si incontrano in queste formule si devono esprimere nello stesso sistema di unità.

Esempio sperimentale. — Una serie sistematica di misure intraprese con questo metodo non potrà essere pubblicata che fra breve tempo. Possiamo intanto come esempio considerare una determinazione eseguita su solfato di zinco fra elettrodi di zinco amalgamati. La superficie di ognuno dei dischi in contatto coll'elettrolito era di 63,5 cm^2; lo spessore dello strato liquido era di 0,2 cm. La concentrazione iniziale della soluzione di solfato di zinco era $\frac{1}{10000}$ della normale. La forza elettromotrice stazionaria ottenuta facendo attraversare l'elettrolito dal basso in alto da una corrente di intensità di 4,94 10^{-5} amp. era di 0,024 volta. La temperatura era di 23° cent., quindi T = 296. Si deduceva quindi dalla formula (9):

$$\frac{(1-n)^2}{D'} = \frac{0{,}024 \cdot 63{,}5 \cdot 10^3 \cdot 2}{0{,}0000866 \cdot 294 \cdot 4{,}94 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}036} = 1{,}175 \cdot 10^5.$$

Il valore medio del decremento logaritmico era 0,0710, quindi il valore del coefficiente D' era secondo la formula (13):

$$D' = 0{,}0710 \frac{0{,}04}{9{,}87} \frac{1}{60} = 4{,}8 \ 10^{-6}.$$

Si deduce quindi:

$$n = 0{,}252 \qquad 1 - n = 0{,}748.$$

I valori delle mobilità U e V dedotti dalle equazioni (14) e (15), esprimendo tutte le diverse quantità nello stesso sistema di unità, in modo da avere le mobilità assolute secondo Kohlrausch (vedi Nernst, Theoretische Chemie, pag. 359) sono:

$$U = 25{,}4 \cdot 10^{-13} \qquad V = 75{,}3 \cdot 10^{-13}$$

Per passare dai valori di queste mobilità assolute ai valori delle mobilità relative u e v, ordinariamente impiegati, basterà ricordare le relazioni:

$$U = u \cdot 1{,}036\ 10^{-13} \qquad V = v \cdot 1{,}036\ 10^{-13}.$$

Si ricaverà così:

$$u = 24{,}6 \qquad v = 72{,}9$$

Questi valori concordano sufficientemente con quelli dedotti dalle misure, eseguite separatamente, della conducibilità molecolare e dei numeri di trasporto. Mi riservo di dare prossimamente i risultati sperimentali di molte misure intraprese per diversi sali e diversi metalli.

Fisica. — *Determinazione del potenziale elettro-statico mediante la deformazione d'una superficie liquida* (1). Nota del dott. Camillo Carpini, presentata dal Socio Blaserna.

Una superficie liquida conduttrice si deforma quando, dal di sopra, si avvicini ad essa un corpo elettrizzato. È nota la natura di tale deformazione quando la superficie del liquido conduttore ed in comunicazione col suolo è indefinita, il corpo elettrizzato una sfera, ed il sollevamento del liquido al disotto della sfera è tale da potersi ritenere non alterata la distribuzione elettrica che si avrebbe se il liquido fosse impedito di muoversi. Se indichiamo un a il raggio della sfera, con E il suo potenziale, con c la distanza del centro della sfera dalla sua immagine rispetto alla superficie del liquido, la cui densità è d, con g il valore della gravità, e con ϱ il raggio di curvatura della superficie liquida deformata nel suo punto ombelicale, si ha la seguente relazione (2):

$$(1) \qquad E^2 = \frac{\pi g d}{3c^2} \frac{a^6}{A^2_1 HK} \frac{1}{\varrho}$$

essendo:

$$H = 4 \frac{a^3}{c^3} \sum_0^\infty \frac{A_{n+1} + A_n}{(A_{n+1} - A_n)^2} + \sum_0^\infty \frac{A_{n+1}}{\left(A_{n+1} \frac{c^2}{2a^2} - (A_{n+1} + A_n)\right)^2},$$

$$K = 16 \frac{a^5}{c^5} \sum_0^\infty \frac{(A_{n+1} + A_n)^3}{(A_{n+1} - A_n)^4} + \frac{c^2}{a^2} \sum_0^\infty \frac{A^3_{n+1}}{\left(A_{n+1} \frac{c^2}{2a^2} - (A_{n+1} + A_n)\right)^4},$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.

(2) A. Sella, R. Accademia Lincei. Luglio 1900.

ove:

$$A_n = i_1^n - i^n$$

$$i_1 = \frac{g}{2} + \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1} \qquad i = \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1}$$

$$g = \frac{c^2 - 2a^2}{a^2}$$

Il Sella ha proposto di utilizzare la formula precedente per la determinazione del potenziale elettro-statico d'un corpo elettrizzato, ed io ho cercato di stabilire entro quali limiti, adoperando i mezzi comuni da laboratorio, si potesse praticamente applicare questo metodo di misura di potenziali elevati.

Le grandezze da determinarsi sperimentalmente sono: il raggio della sfera, la distanza del bordo inferiore della sfera dalla superficie libera del liquido, la densità di questo, ed il raggio di curvatura; quest'ultima è certamente la più importante, e la determinai mediante il *metodo ottico dell'Astigmatismo* di un fascio omocentrico riflesso. Per vedere con quale approssimazione determinavo tale raggio, e dentro quali limiti il metodo potesse essere applicabile, mi sono servito di superficie a curvatura nota, cioè della curvatura dei menischi mercuriali in tubi cilindrici di diverso diametro. Le formule della capillarità danno il raggio di curvatura della superficie del menisco in funzione di grandezze misurabili, cioè il diametro del tubo, la costante di capillarità del mercurio, e l'angolo di raccordamento della superficie del mercurio colle pareti del vetro in presenza di aria. Indicando con l il diametro del tubo, con a la costante di capillarità, e con φ l'angolo di raccordamento, si ha [1]:

$$(2) \qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{2}\ a^{-\frac{3}{2}}\ \sqrt{\pi l}\ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{-\frac{l}{a} - 4\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right)}$$

Il metodo dell'Astigmatismo consiste in questo: si fa cadere un fascetto elementare luminoso nel punto ombelicale della superficie riflettente, e si accoglie il fascetto riflesso in un cannocchiale, che permette misurare le distanze s' e t' delle due linee astigmatiche dalla superficie riflettente; misurando l'angolo i d'incidenza del raggio principale del fascetto sulla superficie riflettente, si determina ϱ mediante la formula [2]:

$$\varrho = 2\,\frac{s't'}{s' - t'}\,\operatorname{sen} i\ \operatorname{tang} i$$

Mi sono servito d'un cannocchiale a scala da laboratorio, ed ho veduto che il metodo può essere utilizzabile (con i mezzi da me adoperati) fino al limite massimo di m. 8; oltre il quale non mi fu possibile sperimentare, perchè le linee di astigmatismo diventano incerte. Da diverse serie di espe-

[1] Mathieu, *Théorie de la capillarité*, pag. 160.

[2] Winkelmann, Handbuch der Physik, vol. 2.

rienze eseguite in condizione di migliore quiete, e con mercurio purificato ogni volta di recente, ho avuto i seguenti risultati:

Diametro tub.	Raggio osservato	Raggio calcolato
mm. 23,22	cm. 45,41	cm. 45,80
26,62	109,55	109,48
31,48	355,19	386,40
34,47	839,30	842,60

Nel calcolo del raggio con la (2), ho preso per le costanti i seguenti valori:

$$a^2 = 3{,}263 \qquad \varphi = 36° 28'$$

Il liquido conduttore era l'olio di olivo, di densità eguale a 0,917, il quale sebbene coibente per fenomeni elettro-dinamici, si comporta alla superficie come un conduttore per fenomeni elettrostatici (1); era contenuto in un vetro orizzontale di cm. 40 per 40, avente i bordi di paraffina spalmata di silicato di potassa e dell'altezza d'un centimetro. L'olio si manteneva in assoluta quiete perchè riposava sopra una colonna di granito, e lavoravo in una delle stanze buie della cantina dell'Istituto Fisico.

Per caricare la sfera mi servii d'una macchina elettrostatica a caduta di acqua, di Lord Kelvin; una delle sue armature comunicava con un piccolo condensatore, l'altra con un elettrometro del Righi, il cui ago di alluminio era posto molto vicino alla coppia superiore di quadranti, per renderlo sensibile a piccole variazioni del potenziale; il filino di argento che lo sosteneva era della lunghezza di cm. 12 e del diametro di mm. 0,03.

La natura della ricerca esigeva la costanza del potenziale durante il tempo necessario per l'esatta misura delle due grandezze s' e t', cioè per lo spazio di circa cinque minuti. Trovai utile, dopo varî tentativi, intercalare tra il polo della macchina e l'elettrometro un filo di cotone di cm. 80 di lunghezza, e di porre in comunicazione con l'elettrometro le armature interne di due condensatori; talvolta aggiunsi una punta in comunicazione con l'elettrometro, affacciata ad un'altra in comunicazione col suolo. Mediante queste cautele, e sorvegliando sopra tutto il getto liquido che caricava il polo utilizzato della macchina, riuscivo a tener relativamente fermo l'elettrometro per circa cinque minuti, ed in ogni caso a dargli un andamento lento e regolare.

La sfera, che comunicava direttamente con l'elettrometro mediante un filo di rame spoglio, era di ottone; fu costruita con ogni cura dal sig. Squarzanti, meccanico dell'Istituto fisico. Le misure del diametro fatte con un catetometro, il cui nonio da il cinquantesimo di millimetro, hanno dato il valore mm. 59,64, con uno scartamento massimo di mm. 0,04. Era sostenuta sopra al liquido dà un anello di filo di rame poco più piccolo dell'equatore della sfera, che era collegato a tre fili dello stesso diametro raccomandati

(1) Vedi per es. Bouty, Compt. Rend. t. 129, pag. 152, 1889.

ad un robusto isolante di zolfo fuso, collegato con un solido sostegno masticiato ai piedi. In tal modo la distribuzione dell' elettricità sulla sfera nella parte affacciata al liquido, la quale maggiormente influisce nel fenomeno, subisce delle leggerissime alterazioni dalla distribuzione che si avrebbe se la sfera fosse isolata, e quindi trascurabili.

Per determinare il valore di c, misuravo la distanza tra il liquido conduttore ed il bordo inferiore della sfera, conoscendosi già il raggio di questa. Disponevo sopra al liquido una vite micrometrica, terminata in punte bene affilate, in posizione verticale, guardandone l'immagine riflessa nella superficie del liquido in due posizioni ad angolo retto; facevo poscia affiorare la punta inferiore con la superficie dell' olio, e puntavo con il cannocchiale del catetometro la punta superiore; poscia puntavo il bordo inferiore della sfera, e togliendo dalla lunghezza della vite la differenza delle due letture precedentemente fatte al catetometro, ottenevo la distanza tra il bordo inferiore della sfera ed il liquido. Il massimo scartamento ottenuto da ripetute letture della medesima distanza è stato di mm. 0,04. Siccome nella (1) tale distanza comparisce alla sesta potenza, così era estremamente importante di vedere se essa si mantenesse costante durante il corso dell'esperienza. Le piccole variazioni di temperatura (4° al massimo) e la stabilità del sostegno hanno reso tali variazioni trascurabili, come ho potuto rilevare da una serie di misure fatte nella spazio di due giorni in condizioni differenti.

Per vedere con quale approssimazione restasse così determinato il potenziale ho seguito il seguente criterio: determinavo il valore del raggio di curvatura quando l' elettrometro segnava sopra una scala graduata cinque determinate divisioni. Poscia variavo la distanza tra la sfera ed il piano e determinavo di nuovo il raggio di curvatura quando l' elettrometro segnava le stesse divisioni, cioè quando i potenziali erano quelli di dianzi. I valori del potenziale dedotti dalla (1) in entrambi i casi dovrebbero essere gli stessi. Tale operazione fu ripetuta per sette diverse distanze della sfera dalla superficie liquida; i risultati ottenuti, spingendo l'approssimazione delle serie H e K fino alla quarta cifra decimale, sono i seguenti:

Deviazione elettrometro	Distanza bordo inf. sfera mm.	3.98	4.23	4.26	4.86	5.13	5.19	5.56	Media
cm. 37	ϱ = cm.	78.7	97.3	100.0	154.0	185.0	190.0	234.5	
	E = Volt	1652.0	1654.0	1642.0	1623.0	1615.0	1629.0	1634.0	1635 6
32	ϱ =	92.7	111.0	119.8	181.0	209.4	212.0	284.0	
	E =	1532.0	1539.0	1500.0	1500.0	1512.0	1542.0	1482.0	1515.3
27	ϱ =	112.0	141.7	142.2	220.0	256.0	260.4	334.0	
	E =	1393.0	1362.0	1376.0	1333.0	1373.0	1392.0	1367.0	1370.9
22	ϱ =	140.5	172.3	176.0	285.0	310.9	311.0	402.0	
	E =	1244.0	1235.0	1238.0	1246.0	1245.0	1273.0	1247.0	1246.8
17	ϱ =	192.0	223.0	226.0	384.0	428.5	418.5	512.0	
	E =	1064.0	1086.0	1092.0	1083.0	1062.0	1098.0	1105.0	1084.3

Gli scartamenti massimi dal valore medio sono compresi tra 30 e 19 Volt, e rientrano nel limite dell' errore calcolato con la (1), ove si suppongano c, φ determinate con l' approssimazione che abbiamo stabilita.

La (1) vale nel caso che la distribuzione elettrica non venga alterata dalla deformazione; ho calcolato che il massimo sollevamento, avutosi quando la distanza tra la sfera ed il liquido era di mm. 3,98, va da un massimo di mm. 0,0785 ad un minimo di mm. 0,0322; mentre il minimo sollevamento, avutosi per la distanza di mm. 5,56, va da un massimo di mm. 0,0375 ad un minimo di mm. 0,0171. Volendosi render conto di questo errore, si potrebbe diminuire il valore della distanza tra sfera e liquido della metà del sollevamento, e determinare il raggio di curvatura a questa nuova distanza; questa diminuzione varierebbe da un massimo di mm. 0,0392 ad un minimo di mm. 0,0085; si vede adunque che al potenziale massimo di 1635 Volt, ed alla minima distanza tra sfera e liquido da me adoperata, il sollevamento diventa già comparabile con l' errore di osservazione della suddetta distanza, e quindi siamo al limite inferiore delle distanze adoperabili ed al massimo potenziale, ove si voglia trascurare il sollevamento del liquido perchè di ordine inferiore all' approssimazione con cui si determina la precedente distanza.

La deformazione della superficie libera del liquido dovuta all' attrazione newtoniana fra sfera e liquido, è trascurabile [1]; infatti nel caso più favorevole della minima distanza della sfera dal liquido si avrebbe un raggio di curvatura di km. 3107 ed un sollevamento del liquido dell' ordine del millesimo del micron.

Risulta adunque dalla presente ricerca che la formula (1) applicata alla determinazione del potenziale elettro-statico dei corpi elettrizzati, con i mezzi da me adoperati, garantisce una approssimazione del 2 % circa.

Il metodo può applicarsi a potenziali più elevati con vantaggio, perchè l' errore relativo di osservazione della distanza tra sfera e liquido va diminuendo, potendosi allontanare la sfera dalla superficie del liquido pur mantenendo il raggio di curvatura nei limiti da me assegnati, e quindi restando costante l' errore relativo di esso; non si presta a più bassi potenziali, perchè l' errore relativo della suddetta distanza va aumentando rapidamente, e per di più le serie H e K non sono più molto convergenti.

Risultati migliori si potranno avere quando si abbia cura di migliorare il metodo dell' Astigmatismo, servendosi d' un cannocchiale a lungo foco, e del quale si conoscono le costanti ottiche; e quando la distanza tra sfera e liquido venga determinata con approssimazione maggiore.

Ringrazio vivamente il prof. Alfonso Sella, che mi iniziò e diresse nella presente ricerca.

[1] Gerschun, Journal de Physique, 1901; Sella, Archives des Sciences de Genève, 1900.

Fisica. — *Sulla misura delle variazioni e del valore assoluto della pressione atmosferica mediante il ludione.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

I metodi che sono stati proposti per dedurre le variazioni della pressione atmosferica da quelle del volume d'una certa quantità d'aria sottoposta a questa pressione, credo che possano ridursi ai tre seguenti:

1°. Osservazione diretta di questa variazione di volume, l'aria essendo contenuta in una bolla comunicante con un tubo quasi capillare, nel quale si trova una colonnetta liquida che separa quest'aria dall'aria esterna e che coi suoi spostamenti indica e misura le variazioni di volume.

2°. Osservazione della variazione della spinta che subisce quest'aria, essendo la medesima contenuta in un ludione, o campanella, il quale è immerso in un liquido ed è foggiato e galleggia a guisa d'areometro, oppure va a fondo ed è appeso al braccio d'una bilancia di qualsiasi specie.

3°. Misura con un manometro ad aria libera, p. es. ad acqua, della pressione positiva o negativa che bisogna aggiungere alla pressione atmosferica, perchè la pressione risultante riconduca il volume o la spinta suddetta a un valore costante, corrispondente p. es. alla pressione media locale. In tal modo le indicazioni del manometro danno direttamente le deviazioni della pressione atmosferica dalla pressione media suddetta; non occorre nessun calcolo, nessuna determinazione preliminare, nessun confronto con un altro barometro.

Questi metodi danno solo le variazioni della pressione atmosferica, i primi due in misura relativa, prendendo come unità la pressione stessa, il terzo in misura assoluta; dividendo il valore $H' - H$ ottenuto col 3° metodo per quello ottenuto simultaneamente con uno dei primi due metodi cioè $(H' - H) : H$, si avrebbe il valore assoluto della pressione stessa.

Un'altra categoria di metodi si propone di determinare questo valore assoluto, deducendolo dalla variazione di volume che produce nella suddetta quantità d'aria una conveniente e nota variazione di pressione prodotta artificialmente; se V, V', sono i volumi dell'aria alle pressioni H, H' si ha: $H = \frac{H' - H}{V - V'} V$.

Questa misura si può effettuare in tre modi che corrispondono ai tre precedenti, cioè:

4°. Osservazione diretta della variazione di volume dell'aria.

5°. Osservazione della variazione che subisce la spinta che il liquido esercita su di essa aria.

6°. Misura con un manometro della pressione che bisogna aggiungere o togliere alla pressione atmosferica per produrre una nota e conveniente variazione del volume e della spinta, o viceversa.

Il 1° ed il 2° metodo sono stati applicati, certo in condizioni di poca esattezza, fino dal secolo XVIII; inoltre sul 1° metodo è fondato il così detto « barometro svizzero » formato da un bulbo munito di un tubo quasi capillare con indice liquido e circondato di ghiaccio. Recentemente l'uso del 2° metodo è stato proposto quasi contemporaneamente da Barus (American Journal of Science, 1900), da Fischer (Drude, Annalen der Physik, 1900), e da me (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1900), che avevo accennato a tale uso ed alle mie esperienze in proposito alla fine del 1899 in una annotazione nella Nota sugli areometri ad inclinazione variabile.

Nelle due precedenti Note sull'uso del ludione ecc., ho descritto i metodi 3°, 5° e 6° che credo affatto nuovi, ed alcune modificazioni del 2° metodo che credo pure nuove ed utili. Ho continuato in seguito lo studio di questi metodi, ed ho semplificato l'apparecchio occorrente per il 3° e 6° metodo in modo da renderlo facile a costruire e ad usare, autonomo ed esatto; esso verrà descritto in una prossima Nota.

Nella presente Nota descrivo alcune serie di esperienze relative ai modi di evitare le variazioni della quantità d'aria del ludione. Quando la temperatura cresce, la solubilità dell'aria nel liquido nel quale è immerso il ludione diminuisce, ed una parte dell'aria disciolta si sviluppa lentamente, mentre l'opposto avviene se la temperatura decresce. Inoltre, siccome il livello del liquido nel ludione è più basso di quello esterno, l'aria del ludione trovandosi ad una pressione alquanto maggiore di quella esterna, si scioglie in maggior proporzione e per diffusione lentamente sfugge verso l'esterno.

Ne risulterebbero così variazioni del volume dell'aria, che erroneamente si attribuirebbero a variazioni della pressione, che sarebbero difficili da calcolare e che perciò bisogna evitare o render minime.

Il mantenere l'apparecchio indefinitamente nel ghiaccio, senza interruzione, eviterebbe questa causa d'errore; invece il portare l'apparecchio a 0° ogniqualvolta lo si vuol usare, che non sarebbe neppure comodo, e potrebbe aumentare l'errore suddetto per causa della grande variazione della solubilità dell'aria che ne risulta.

Nella 1ª Nota sull'uso del ludione ecc., ho indicato due modi per evitare o ridurre questa causa d'errore. Il primo, la cui efficacia è evidente ed è inoltre dimostrata dall'esperienze descritte più oltre, consiste nel separare l'aria dal liquido nel quale è immerso il ludione mediante uno strato o colonna di mercurio. L'altro modo, la cui efficacia in pratica non risultò così grande come era presumibile, consiste nell'usare una campanella terminata inferiormente con un lungo tubo capillare ripiegato ad elica o a spirale per economia di spazio, e nel diminuire tanto quanto è possibile il volume del liquido con-

tenuto nella campanella, evitando però che il suo livello possa giungere fino al tubo capillare quando, per l'azione combinata d'una temperatura elevata e d'una bassa pressione, l'aria avesse il volume massimo possibile.

In tal modo l'aria disciolta non può dall'esterno pervenire nell'interno del ludione o viceversa, che molto lentamente, per diffusione lungo il tubo capillare ed il poco liquido contenuto nel ludione non può nè sviluppare, nè assorbire che un volume proporzionatamente minimo di aria. Se V e v sono i volumi dell'aria e del liquido, s il coefficiente di solubilità, $\frac{ds}{dt}$ la variazione media per grado di questo coefficiente, se la temperatura cresce o decresce di $t°$, verrà svolto o assorbito un volume relativo di aria $\frac{v}{V}\frac{ds}{dt}t$. Se $\frac{v}{V}$ è piccolo, siccome s è di solito molto piccolo, $\frac{ds}{dt}$ sarà notevolmente minore e si può ritenere che per le piccole e passeggiere variazioni di temperatura, il volume suddetto sia trascurabile, e per le variazioni di temperatura maggiori e più persistenti, quali si verificano nel passaggio dall'inverno all'estate, si potrebbe calcolare la piccola correzione relativa. Tuttavia le esperienze che ho eseguito finora con ludioni immersi nell'acqua, nella chinolina e nella nitrobenzina non confermano che imperfettamente queste previsioni favorevoli.

Esperienze sul ludione con mercurio, senza compensazione termica, immerso nella nitrobenzina. Questo ludione aveva la forma di un piccolo barometro Gay-Lussac, alto solamente 10 cm. ma con tubi molto larghi, di 1,90 cm. di diametro. Il ramo chiuso era quasi completamente pieno d'aria, una colonna di mercurio occupava il tubo capillare di comunicazione fra i due rami e la parte inferiore di questi, e la quantità di mercurio era così scelta che il suo livello non abbandonasse mai la parte cilindrica dei medesimi; inoltre esso era sormontato da un piccolo uncino, era immerso completamente in una bottiglia a collo largo (o in una provetta) piena di nitrobenzina ed immersa a sua volta in un grosso bicchiere da pile pieno d'acqua; all'uncino era fissato un filo d'argento di 0,1 mm. di diametro di lunghezza invariabile, che poteva esser appeso al braccio d'una bilancia.

Il modo più semplice e più diretto (e che ritengo per molti rispetti preferibile) per graduare questo strumento, è quello di determinare il peso apparente del ludione a due o più profondità diverse e note, facilmente ottenibili sia col sollevare o abbassare il recipiente mentre il ludione è appeso a distanza invariabile dal braccio della bilancia, sia aggiungendo o togliendo liquido dal recipiente stesso. Così pure si potrebbero determinare direttamente le variazioni del peso suddetto causate da note variazioni di temperatura.

Mi parve però più persuasivo e perciò più conveniente per lo scopo di queste esperienze, di dedurre queste variazioni col calcolo, determinando prima

il peso ed il volume del vetro e del mercurio, la densità della nitrobenzina, ottenendo dalle Tavole o con apposite esperienze i relativi coefficienti di dilatazione termica. Si può così calcolare il peso apparente del vetro e del mercurio nella nitrobenzina a qualsiasi temperatura e quindi determinato coll'esperienza il peso apparente del ludione, si può per differenza ricavare il peso apparente dell'aria e quindi il suo volume. Si potrebbe quindi colle note leggi calcolare le variazioni di questo volume per date variazioni della pressione della temperatura o viceversa; nel caso attuale ho creduto preferibile e altresì più comodo ricondurre il volume suddetto a una pressione ed una temperatura costante, e dimostrare che il volume ridotto risulta costante.

Come si vede e come apparirà meglio in seguito, le operazioni ed il calcolo preliminari sono senza confronto più lunghe e più minute che non nel metodo empirico suddetto, la maggior parte delle determinazioni preliminari non può essere verificata senza distruggere o scomporre lo strumento, ed un errore in qualcuna di esse renderebbe inutile il resto del lavoro. Nel calcolo del volume ridotto, tuttavia, un simile errore influisce quasi ugualmente in tutte le determinazioni e la sua importanza è grandemente diminuita.

Siano p e v_t il peso ed il volume del vetro, p' ed u_t il peso ed il volume del mercurio, δ_t la densità della nitrobenzina, e π_t il peso apparente del vetro col mercurio nella nitrobenzina, il tutto a t^0, sarà evidentemente:

$$\pi_t = p + p' - (v_t + u_t)\,\delta_t$$

Se A ed α sono i coefficienti di dilatazione veri a t^0 del complesso vetro-mercurio e del liquido, il peso apparente a θ^0 sarà:

$$\begin{aligned}\pi_\theta &= p + p' - (v_\theta + u_\theta)\delta_\theta \\ &= \pi_t + (v_t + u_t)\delta_t\ (\alpha - \mathrm{A})\ (\theta - t).\end{aligned}$$

Questa relazione dà il modo di calcolare, mediante una piccola correzione, il peso apparente del vetro e mercurio a θ quando è noto, sia dalla formula precedente, sia per una determinazione diretta il peso apparente a t^0.

Inoltre se q è il peso apparente del ludione a θ, V_θ il volume dell'aria, ε il suo peso, δ_θ la densità della nitrobenzina, α il coefficiente di dilatazione vero a θ di quest'aria sarà:

$$q = \pi_\theta + \varepsilon - V_\theta\,\delta_\theta \quad , \quad V_\theta = \frac{\pi_\theta + \varepsilon - q}{\delta_\theta}$$

$$V_t = \frac{\pi_\theta + \varepsilon - q}{d_t[1 + (\alpha - a)(\theta - t)]}$$

Può esser utile conoscere il coefficiente di dilatazione a pressione variabile dell'aria del ludione; se V, H, T sono il suo volume, la sua pressione, la sua temperatura assoluta, se v è l'aumento di volume dell'aria quando la temperatura diviene $T + 1^0$, se $x = v : \sigma$ è l'abbassamento del livello del

mercurio in un ramo e l'innalzamento nell'altro ramo, essendo σ la sezione interna per entrambi i rami, si avrà:

$$\frac{VH}{T} = \frac{(V + v)(H + 2v : \sigma)}{T + 1}$$

ossia, trascurando il quadrato di v:

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{T} \frac{H}{H + 2V : \sigma} = \frac{1}{T} \frac{H}{H + 2H_1}$$

donde risulta che il coefficiente di dilatazione dell'aria del ludione $\frac{v}{V}$, e uguale al coefficiente a pressione costante $\frac{1}{T}$ moltiplicato per il fattore $H/(H + 2H_1)$, essendo H_1 l'altezza dell'aria in un cilindro retto di sezione σ.

Così pure la variazione di volume che subisce l'aria del ludione per una piccola variazione della pressione esterna, è uguale a quella che subirebbe l'aria libera moltiplicata per il fattore $H/(H + 2H_1)$. In altre parole le piccole variazioni della pressione trasmesse all'aria attraverso ad un tubo ad U contenente mercurio, vengono diminuite nel rapporto di $H + 2H_1$ ad H.

Tuttavia per avere la pressione dell'aria del ludione non ho fatto uso di questa proprietà; la pressione suddetta è certamente uguale alla pressione atmosferica aumentata della pressione dello strato di nitrobenzina che trovasi al disopra del livello esterno del mercurio diminuita dalla differenza di livello del mercurio stesso e corretta per la variazione di questa differenza; se V e V′ sono i volumi dell'aria (dati direttamente dall'esperienza) $2(V - V')/\sigma$ sarà il valore corrispondente di questa variazione.

Ho preferito ridurre i pesi apparenti del ludione ed i volumi dell'aria a t^0, una temperatura media, anzichè a 0° per diminuire i termini di correzione pei quali basta così anche un valore approssimativo di A, α ed α.

Per la stessa ragione non ho fatto uso del metodo di compensazione termica descritto nella Nota citata, facendo uso cioè di un volume di vetro conveniente, all'incirca triplo di quello dell'aria. In tal caso avrei dovuto o ricorrere alla graduazione empirica che non credevo conveniente di usare, oppure eseguire una determinazione preliminare accuratissima dei coefficienti di dilatazione del vetro e della nitrobenzina adoperati, ed inoltre i possibili errori dovuti a ciascun metodo o alla sua imperfetta applicazione si sarebbero sovrapposti e sarebbe stato impossibili separarli. Perciò cercai invece di ridurre il più possibile i volumi del vetro e del mercurio.

Nel primo ludione da me adoperato, il peso del vetro era di 13,8220 gr. quello del mercurio gr. 72,7030, i rispettivi volumi erano a 26°,6 cm^3 5,5220 e cm^3 5,3725, e la densità della nitrobenzina era 1,1963. Quindi la spinta

subìta dal vetro col mercurio era di gr. 13,0310 a 26°,6 e variava di — 9,71 mgr. per una variazione di + 1° nella temperatura. Inoltre la profondità del livello esterno del mercurio durante la pesata era di mm. 118,5 equivalenti a mm. 10,46 di mercurio. Il dislivello del mercurio nel ludione era di mm. 39,6 nell'aria, ma nella nitrobenzina alla profondità suddetta cresceva secondo la formula suddetta di mm. 1,2, e deducendo la pressione esercitata dalla nitrobenzina, risulta che l'aria del ludione inizialmente era ad una pressione di 30,3 mm. inferiore a quella atmosferica; aumentando il volume dell'aria di v, il dislivello suddetto decresceva di $2v : 3{,}8$ cm. essendo 3,8 cm² la sezione interna dei rami del ludione. I coefficienti di dilatazione del vetro e della nitrobenzina determinati appositamente alla temperatura dell'esperienza, erano 0,000027 e 0,000848, e come coefficiente di dilatazione dell'aria nel ludione presi 0,003350, intendendo per coefficiente di dilatazione il rapporto $(v_{t+1} - v_t) : v_t$ e facendo largo uso di approssimazioni.

Nella seguente tabella trovasi nella 1ª colonna la pressione atmosferica H, nella 2ª la temperatura t della nitrobenzina e dell'aria, nella 3ª la pressione H′ dell'aria del ludione (ossia $H - 30{,}8 \pm \frac{v}{3{,}8}$ cm.), nella 4ª la spinta q subita dall'intero ludione, nella 5ª colonna il volume V dell'aria ridotto a 26°,6 e a 760 mm., ma moltiplicato per il fattore costante 1,1963.

H	t	H′	q	Vd
754,2	25,70	724,08	31,5818	17,706
753,8	26,00	723,76	31,5973	17,703
754,0	26,37	724,1	31,6030	17,703
755,1	25,13	724,75	31,5340	17,696
755,8	24,51	725,27	31,4987	17,702
754,6	25,87	724,46	31,5727	17,700
756,3	23,98	756,61	31,4683	17,695
753,6	23,40	723,32	31,5055	17,695
753,5	25,23	723,33	31,5733	17,696
754,3	23,38	723,68	31,4948	17,704

Non essendo molto contento del modo di funzionare di questo ludione, che essendo molto pesante spesso si rovesciava e nel quale il mercurio aderiva molto al vetro e la sua superficie cambiava evidentemente di forma, ne costruii un altro più leggero, ed ebbi cura di pulire con acido nitrico bollente il suo interno, e di riempirlo d'aria secca, collocandolo sotto una piccola campana pneumatica, facendo ripetutamente il vuoto e lasciando rientrare aria attraverso l'acido solforico.

In questo ludione alto circa 8 cm., il peso del vetro e del mercurio era di gr. 8,0128 e gr. 50,4316 ed il volume rispettivo a 26°,6 era di cm^3 3,2013 e cm^3 3,6950; il coefficiente di dilatazione medio era 0,0001094, la spinta nella nitrobenzina gr. 8,2510 a 26°,6 e variava di — 6,0 mgr. per una variazione di + 1° nella temperatura.

Inoltre la profondità del livello esterno del mercurio era di 86,0 mm. pari a 7,6 mm. di mercurio, ed il dislivello del mercurio a tale profondità era di 34,2 mm. da cui vanno dedotti i suddetti 7,6 mm.

H	*t*	H′	*q*	V*d*
754,6	25,8	728,38	20,8423	12,087
756,2	24,15	729,65	7772	086
754,28	26,02	728,11	8522	087
753,4	25,20	727,19	8482	0875
754,24	23,3	727,72	7887	086
755,0	25,25	726,68	8239	088
755,95	23,02	729,28	7565	088
755,67	25,61	729,35	8207	0875
756,5	23,5	729,85	7577	086
755,54	26,12	729,28	8322	084
756,75	24,73	730,23	7812	085
755,73	26,37	729,5	8360	086

Il modo di procedere in queste determinazioni era il seguente. Alcuni minuti prima della determinazione agitavo l'acqua del bagno e la nitrobenzina, poi agitavo nuovamente, osservavo la temperatura della nitrobenzina con un termometro Baudin diviso in decimi di grado, portavo il bicchiere dentro la bilancia, vi appendevo il ludione ed eseguivo la pesata. Quindi andavo ad osservare la pressione atmosferica nel barometro Fortin del contiguo Osservatorio meteorico, ripetevo la pesata, toglievo il bicchiere, osservavo la temperatura. Prendevo la media dei due pesi e delle due temperature pochissimo differenti. Le determinazioni venivano eseguite due volte al giorno, al mattino verso le dieci e nel pomeriggio verso le diciotto, affinchè le temperature fossero per quanto era possibile diverse e costanti. Entrambe le serie vennero eseguite nella 1ª metà dell'agosto del 1901.

Apparisce da queste tabelle e specialmente dalla seconda che l'aria del ludione conserva un volume sensibilmente costante, a parità di condizioni, e che si dilata e contrae secondo le note leggi, senza che appaia l'influenza di errori qualsiasi.

Si sarebbe potuto eseguire il calcolo inverso e determinare le variazioni della pressione, a partire da quella iniziale e s'otterrebbe una corrispondente concordanza coi valori dati col barometro Fortin. La massima differenza dal valor medio, che si osserva raramente nella 2ª tabella, per V ↄ salisce appena 1,5 diecimillesimi di questo valore e corrisponderebbe a un errore di circa 0,1 mm. nella pressione. È probabile che queste differenze siano dovute al ludione e causate probabilmente da un errore di capillarità, perchè nè gli errori nell'apprezzamento della temperatura, nè quelli della pesata sarebbero sufficienti a produrle; tuttavia è altrettanto probabile che esse siano dovute ad inesattezza del barometro a mercurio. Difatti l'errore di capillarità era sensibile anche in questo barometro, ed un'altro possibile errore può derivare da una differenza di temperatura fra il mercurio e il termometro applicato; la differenza di 1° sarebbe sufficiente a causare l'errore suddetto di 0,1 mm.

Il ludione che ha servito per la 2ª serie di esperienze è stato conservato intatto, nella nitrobenzina, e sarà ripesato fra pochi mesi per verificare se le sue indicazioni saranno comparabili a quelle antecedenti.

Ritengo che sia utile e pressochè indispensabile che il ludione sia formato con tubi più larghi di quelli da me usati, p. es. con tubi di 3 cm. di diametro, ma i miei tentativi per costruirli riuscirono vani, poichè a causa del fondo piatto, che ritenevo utile, essi poco dopo costruiti si ruppero. Sarebbe altresì utile far uso di ludioni larghi e bassi formati p. es. con un cristallizzatore di vetro sottile contenente uno strato di mercurio, ed un cristallizzatore di diametro minore e capovolto che funzionasse da campana; facendo comunicare per un istante l'aria interna coll'esterna mediante un tubo ricurvo, si eviterebbe il dislivello notevole del mercurio e le relative correzioni.

Fisica. — *Misure pireliometriche fatte a Sestola nell'estate del 1901.* Nota di Ciro Chistoni (1), presentata dal Socio Tacchini.

Fino dal 1899 ho intrapreso una serie di misure pireliometriche all'Osservatorio Geofisico di Modena, all'Osservatorio di Sestola ed a quello del Monte Cimone. Negli anni 1899 e 1900 ho fatto uso dell'attinometro di Violle; e nel 1901 avendo potuto ottenere un pireliometro a compensazione elettrica di K. Ångström, installai questo a Sestola, mentre a Modena ed al Monte Cimone si continuò ad usare dell'attinometro di Violle.

L'apparecchio su citato dell'Ångström e da esso proposto fino dal 1893, ha portato, a mio credere, una vera rivoluzione nel campo delle ricerche

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Geofisico di Modena, 15 gennaio 1902.

pireliometriche, poichè oltre che garantire l'esattezza delle misure è di maneggio facile, ed il calcolo per ottenere il risultato definitivo è, relativamente agli altri istrumenti di tal genere, di una grande semplicità.

Quantunque abbia già eseguiti i calcoli delle osservazioni fatte coll'attinometro di Violle, mi sono deciso a sospenderne la pubblicazione, fino a che, per mezzo di adatti confronti fra il pireliometro dell'Ångström e l'attinometro di Violle non abbia trovati i coefficienti necessari per ridurre i risultati di quest'ultimo a quelli ottenuti col pireliometro a compensazione elettrica, che si può giustamente chiamare pireliometro campione.

Per ora, rendo di pubblica ragione i risultati delle osservazioni fatte a Sestola nell'estate del 1901.

Il principio del pireliometro a compensazione elettrica è semplicissimo. Due striscie metalliche sottilissime e perfettamente uguali sono applicate parallelamente, ed alla distanza di alcuni millimetri ad una cornice di ebanite o di altra materia isolante. Le strisce sono annerite dalla parte che deve essere esposta al sole (1); e dalla parte opposta stanno applicate le estremità saldate di un doppio elemento termoelettrico (diretto in opposto senso dall'una all'altra striscia) per mezzo del quale, valendosi di un sensibile galvanoscopio si può accertare se la temperatura delle due striscie è uguale, poichè in tal caso il galvanoscopio dovrà segnare *zero*.

Se una delle due striscie è esposta alla radiazione di una sorgente di calore, mentre, l'altra sta ombreggiata da un adatto schermaglio, il galvanoscopio mostrerà che la prima ha temperatura più elevata della seconda; e facendo passare lungo questa una corrente elettrica di intensità conveniente, si potrà ridurla ad avere la stessa temperatura della prima. In tale caso il galvanoscopio dovrà di nuovo segnare *zero*.

Se i è l'intensità della corrente in Ampères; r la resistenza per ogni centimetro in lunghezza delle due striscie, b la loro larghezza, a il potere assorbente della superficie delle striscie rivolta al sole, si avrà l'intensità della radiazione espressa da

$$q = \frac{ri^2}{4,19.b.a} \text{ gr.-cal. per secondo e cm}^2.$$

oppure da

$$Q = \frac{60\,ri^2}{4,19.b.a} \text{ gr.-cal. per minuto è cm}^2$$

I vantaggi del metodo dell'Ångström sono evidenti.

La temperatura delle due striscie, essendo la stessa, la radiazione di

(1) La descrizione completa dell'apparecchio ed il modo di preparazione e di annerimento delle striscie si trova in una memoria dell'Ångström pubblicata a pag. 633 e segg. del vol. 67 dei *Wied. Ann.* e a pag. 334 del vol. 9 dell'*Astrophysical Journal* (1899).

esse, la convezione e la conduttività sono anche le stesse e quindi a questo riguardo non fa di bisogno di correzione alcuna.

L'apparecchio che usai a Sestola porta il n. 19; ed è stato costruito dal meccanico sig. J. L. Rose di Upsala, sotto la direzione del sig. prof. Ångström, il quale con esemplare sentimento di colleganza volle gentilmente determinare anche i coefficienti del pireliometro.

Le striscie pireliometriche del n. 19 sono di manganina ed hanno la larghezza media di 0,1486 cm. — A 20° di temperatura la resistenza elettrica delle striscie è di 0,0682 Ohm per ogni centimetro di lunghezza ed il potere assorbente della loro superficie annerita, che deve essere esposta al sole, è 0,98. Il coefficiente termico relativo alla resistenza elettrica è 0,00045.

Posto adunque che la temperatura delle striscie sia 20°, la quantità di calore proveniente per irradiazione è

$$Q = \frac{0{,}0682 \times 60}{4{,}19 \times 0{,}98 \times 0{,}1486}\ i^2 = 6{,}71\ i^2.$$

Ponendo k funzione della temperatura θ, Q sarà espresso dalla

$$Q = k i^2 \text{ gr-cal. per minuto e cm}^2.$$

I valori di k per le diverse temperature delle striscie all'atto dell'osservazione sono i seguenti:

θ	k	θ	k
0°	6,65	20°	6,71
10°	6,68	30°	6,74
20°	6,71	40°	6,77

Non è necessario applicare la correzione dovuta al riscaldamento proveniente dal passaggio della corrente per le striscie pireliometriche. La temperatura θ, della quale è funzione k, è data da un termometro convenientemente collocato in prossimità delle striscie.

A Sestola (Lat. bor. 44°. 14′; long. E da Gr. 10°, 46′; 1020 metri sul mare) il pireliometro stava collocato nella casa comunale, sopra una mensola sporgente da una finestra esposta a mezzodì. Il galvanometro (fissato al muro maestro), la coppia elettrica necessaria per la corrente che deve passare per le striscie ed il milliamperimetro stavano nell'interno della stanza. Il milliamperimetro (n. 53352) è della Casa Siemens et Halske e venne opportunamente suntato, così da dare con precisione i decimi e frazioni di decimo di Ampères.

Le striscie assorbenti ed anche i termoelementi essendo piccolissimi, hanno piccolissima capacità calorifica e l'apparecchio raggiunge in breve tempo la temperatura stazionaria. Qualora avvenga che il galvanometro accenni a successive variazioni nella temperatura della striscia esposta al Sole, ciò significa che tra l'apparecchio ed il disco solare passano veli nuvolosi impercettibili, che rendono impossibile la misura.

In generale ogni valore dell'intensità i di corrente riportato nella unita tavola, è la media di quattro osservazioni successive, fatte esponendo per due volte al Sole ognuna delle due strisce. A rendere semplice l'operazione serve un commutatore elettrico applicato alla parte posteriore del pireliometro.

Lo stato del cielo in prossimità del disco solare si osservò mediante adatti vetri colorati.

Nelle unite tavole; l'ora è data in tempo medio dell'Europa centrale ed h esprime l'altezza del Sole al momento dell'osservazione. L'approssimazione in h è di circa due decimi di grado sessagesimale (1).

La colonna intestata B dà la pressione atmosferica in millimetri di mercurio a 0°; t esprime la temperatura dell'aria; f la forza elastica del vapore acqueo ed u l'umidità relativa dell'atmosfera.

Spero di poter fra poco riferire i risultati pireliometrici ottenuti nel 1901 a Modena ed al Monte Cimone, i quali potranno servire per la discussione dalle osservazioni contemporanee fatte nelle tre stazioni.

(1) Dato che a qualcuno necessitasse avere h con maggiore precisione, potrà calcolarla valendosi dell'ora che sta controsegnata e deducendo dalle effemeridi il valore della declinazione del Sole corrispondente al momento dell'osservazione. La latitudine di Sestola è, come dissi, 44°, 14′.

Sestola 1901.

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Note*
	h m	°								
12 luglio . . .	10.15	56,8	23,5	0,4365	1,2808	676,9	17,0	6,5	45	⊙ libero; cielo bianchiccio
»	11.24	64,4	29,5	0,4370	1,2868	676,9	18,0	6,9	45	id.
15 » . . .	9.21	46,7	26,0	0,4555	1,3950	676,5	18,3	9,6	63	qualche Cu; ⊙ chiaro
»	9.30	48,8	28,0	0,4640	1,4498	676,5	18,7	10,4	65	id.
»	10. 0	52,7	28,0	0,4425	1,3185	676,5	19,0	10,6	65	id.
»	10.15	55,2	32,0	0 4440	1,3298	676,5	19,5	11,3	63	molti Cu; ⊙ chiaro
»	10.22	56,5	33,0	0,4640	1,4531	676,5	19,6	10,5	62	id.
»	12.21	67,4	32,5	0,4840	1,5807	676,5	20,0	11,0	61	qualche Cu; ⊙ bellissimo
17 » . . .	9.22	46,5	26,0	0,4450	1,3323	678,4	18,8	12,0	75	⊙ libero; cielo bianchiccio
»	10.22	56,3	29,0	0,4585	1,4163	678,5	18,8	11,8	74	id. qualche Cu
»	11.22	63,9	29,0	0,4600	1,4256	678,4	19,5	12,0	73	⊙ chiaro
»	12.22	67,0	30,0	0,4940	1,6448	678,3	22,0	13,7	70	id. qualche Cu
»	14.30	56,0	30,0	0,4475	1,3497	678,2	19,6	12,0	71	id.
»	15.22	46.5	32,0	0,4237	1,2111	678,4	19,6	11,6	67	⊙ con aureola bianca
18 » . . .	9.22	46,4	28,5	0,4430	1,3218	680,7	19,2	8,7	53	cielo bianchiccio
»	10.22	56,1	30,0	0,4187	1,1817	680,6	20,2	9,2	52	id.
»	11.22	63,8	30,5	0,4713	1,4974	680,4	21,0	9,7	52	id.
»	12.22	66,9	32,0	0,4192	1,1854	680,3	22,0	9,8	50	cielo sereno
»	15.22	46,4	30,0	0,4317	1,2561	679,9	23,0	9,5	46	id.
20 » . . .	9.22	46,2	30,0	0 4080	1,1220	677,1	21,0	11,2	61	cielo bianchiccio
»	10.22	55,9	30,0	0,4158	1,1651	677,0	22,8	12,4	59	id.
22 » . . .	9.25	45,9	26,5	0,4470	1,3446	676,0	20,8	11,8	67	molti Cu; ⊙ chiaro
23 » . . .	12.22	65,9	28,5	0,4418	1,3147	671,6	23,3	14,1	67	⊙ con aureola bianca
24 » . . .	9.22	45,6	29,0	0,4300	1,2457	671,3	17,4	8,8	58	⊙ chiaro
25 » . . .	9.22	45,5	24,0	0,4440	1,3251	673,6	18,8	8,1	50	⊙ bello
»	10.22	55,1	29,5	0,4375	1,2898	673,7	19,8	9,8	57	qualche Cu; ⊙ bello
»	14.22	55,1	31,0	0,4425	1,3202	673,7	19,2	9,9	60	grossi Cu
27 » . . .	9.22	45,2	23,5	0,4450	1,3308	674,6	18,0	5,1	33	cielo lucido
»	10.22	54,7	28,5	0,4485	1,3549	674,7	18,3	5,4	35	id.
»	11.22	62,1	30,0	0,4490	1,3588	674,9	19,3	5,4	33	id.
»	12.22	65.1	32,0	0,4540	1,3905	675,1	19,5	5,0	30	id.
»	13.22	62,1	32,5	0,4507	1,3706	675,2	19,7	5,1	30	id.
»	1422	54,7	34,0	0,4468	1,3479	675,2	20,0	5,4	32	id.
»	15.22	45,2	30,0	0,4410	1,3108	675,3	20,3	6,2	35	qualche Cu; ⊙ bello
»	16.22	34,7	29,0	0,4270	1,2283	675,3	20,8	5,5	31	⊙ bello
»	17.22	23,9	27,5	0,4140	1,1539	675,3	21,0	5.7	31	⊙ chiaro; cielo sereno
28 » . . .	9.22	45,0	25,0	0,4310	1,2493	676,2	19,5	8,6	52	Cu sparsi
»	10.22	54,5	32,0	0,4365	1,2853	676,3	20,7	10,2	57	cielo limpido
»	11.22	61,9	32,5	0,4378	1,2932	676,2	21,2	10,3	55	id.
»	12.22	64,9	33,0	0,4392	1,3018	676,3	22,7	10,8	53	Cu; cielo bianchiccio

Sestola 1901.

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Note*
	h m	o								
28 luglio . . .	15.22	45,0	31,0	0,4330	1,2642	676,6	24,0	7,5	34	Cu; cielo bianchiccio e veli
1 agosto . .	9.22	44,3	25,4	0,4417	1,3122	674,9	17,4	7,3	50	Cu sparsi
»	10.22	53,8	31,0	0,4457	1,3395	675,0	18,4	7,8	48	id.
2 » . . .	9.22	44,2	25,0	0,4270	1,2262	672,6	18,0	10,0	66	id.
3 » . . .	9.22	44,0	28,9	0,4342	1,2700	675,6	18,4	8,9	57	cielo ser.; orizz. nebbioso
»	10.22	5 ',4	33,0	0,4412	1,3138	676,1	19,4	9,1	55	Cu all'orizzonte
»	11.22	60,6	34,0	0,4452	1,3380	676,1	20,5	9,0	50	qualche velo e strato
»	14.22	53,4	33,0	0,4380	1,2947	676,2	21,8	8,9	46	Cu e veli
»	15 22	44,0	32,8	0,4568	1,4082	676,2	22,7	5,1	42	id.
4 »	9.22	43,8	26,5	0,4272	1,2281	676,6	20,1	8,3	48	sereno
»	10.22	53,2	34,1	0,4352	1,2789	676,5	21,0	9,1	49	Cu sparsi
»	11.22	60,3	36,1	0,4340	1,2730	676,4	21,6	8,7	45	Cu all'orizzonte
5 » . . .	9.22	43,6	28,3	0,4265	1,2251	676,2	19,8	9,8	57	Cu sparsi
»	10.22	53,0	32,6	0,4370	1,2886	676,3	20,5	9,7	54	id.
»	11.22	60,1	35,0	0,4360	1,2841	676,4	20,7	9,0	50	id.
»	12.22	62,9	34,1	0,4385	1,2983	976,2	21,2	8,9	48	id.
»	13.22	60,1	36,1	0,4355	1,2818	676,4	21,4	9,3	48	id.
»	15.22	43,6	32,1	0,4205	1,1929	676,5	23,2	10,0	47	id.
»	16.22	33,2	31,0	0,4155	1,1641	676,6	24,7	10,4	46	id.
»	17.22	22,5	28,0	0,3808	0,9765	676,6	23,2	9,9	48	id.
7 » . . .	9.22	43,2	28,5	0,4172	1,1724	674,0	19,2	9,1	55	veli leggerissimi e Cu
»	10.22	52,6	33,0	0,4252	1,2202	674,0	19,8	8,5	50	id. aumentano i Cu
»	12.22	62,3	34,0	0,4452	1,3383	674,1	20,0	8,1	47	id. id. ⊙ chiaro
»	13.22	59,6	34,0	0,4450	1,3371	674,2	20,7	9,0	49	Cu sparsi
»	15.22	43,2	31,5	0,4310	1,2529	674,5	22,0	7,3	38	id.
»	16.22	32,8	30,0	0,4242	1,2128	674,7	21,5	6,7	35	id.
»	17.22	22,1	27,0	0,4105	1,1342	675,0	20,3	5,3	30	Cu solo all'orizzonte
8 » . . .	9.22	43,0	30,2	0,4227	1,2044	679,3	18,7	6,4	40	leggerissimi veli
»	10.22	52,3	30,0	0,4345	1,2724	679,4	19,7	7,2	42	id.
»	11.22	59,3	33,0	0,4405	1,3096	679,4	20,2	7,0	41	id.
»	12.22	62,0	35,1	0,4393	1,3037	679,5	20,4	6,3	40	Cu sparsi
9 » . . .	9.22	42,8	25,2	0,4282	1,2331	681,3	19,6	7,2	43	cielo lucido
»	10.22	52,1	30,0	0,4368	1,2859	681,4	20,6	7,6	43	id.
»	11.22	59,0	32,0	0,4392	1,3013	681,4	21,8	7,8	41	id.
»	12.22	61,8	33,2	0,4398	1,3055	681,2	22,4	8,0	39	id.
»	13.22	59,0	34,3	0,4378	1,2943	680,9	23,0	8,3	40	id.
»	14.22	52,1	34,5	0,4385	1,2986	680,8	23,5	9,0	43	qualche Cu sparsi
»	15.22	42,8	33,0	0,4265	1,2277	680,7	22,0	8,3	42	Cu sparsi
»	16.22	32,5	29,0	0,4078	1,1203	680,6	23,0	9,1	44	Cu vicini all'orizzonte
»	17.22	21,7	27,0	0,3910	1,0290	660,6	22,0	9,8	50	id.

Sestola 1901.

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Note*
	h m	°								
10 agosto . .	9.21	42,6	27,0	0,4200	1,1873	680,4	19,6	8,4	50	veli verso l'orizzonte
»	10.21	51,8	29,0	0,4335	1.2660	680,4	20,5	8,5	48	id.
»	11.21	58,8	31,0	0,4362	1,2830	680,4	21,5	8,6	45	piccoli Cu verso l'orizz.
»	12.21	61,5	31,5	0,4377	1,2921	680,3	22,2	8,7	44	id.
»	13.21	58,8	31,0	0,4385	1,2966	680,1	22,1	8,7	44	Cu sparsi
»	14.21	51,8	31,0	0,4322	1,2595	679,9	22,7	8,7	43	id.
11 » . . .	9.21	42,4	30,0	0,4200	1,1890	679,5	20,2	9,7	55	cielo lucido
»	10.21	51,6	30,5	0,4298	1,2454	679,3	21,0	9,2	50	Cu sparsi
»	11.21	58,5	32,0	0,4310	1,2532	679,0	22,0	8,8	45	Cu sparsi
»	12.21	61,2	33,5	0,4325	1,2627	678,6	22,2	8,5	43	Cu e veli sparsi
12 » . . .	15.21	42,2	33,5	0,4135	1.1542	677,2	24,0	9,3	42	nubi sparse ⊙ libero
13 » . . .	9.21	41.9	28,2	0,4170	1,1711	676.2	19,0	10,5	64	Cu e veli sparsi
17 » . . .	8.20	30,8	23,0	0,4258	1,2182	676,7	15.0	6,4	51	veli
»	9.20	41,0	24,0	0,4382	1,2907	676,9	15,5	6,6	51	Cu e veli
»	10.20	50,1	29,0	0,4398	1,3030	677,0	16,7	6,1	44	id.
»	11.20	56.8	31,5	0,4452	1,3368	677,2	17,2	6,4	44	id.
»	12.20	59,3	32,5	0,4450	1,3362	677,3	18,0	6,2	41	id.
18 » . . .	8.20	30,6	25,0	0,4225	1,2004	678 6	16,8	8,2	58	cielo bellissimo
»	9.20	40,8	27,5	0,4340	1,2681	678,7	16,6	8,0	53	Cu all'orizzonte SE
»	10.20	49,8	33,5	0,4372	1,2903	678,9	17,6	7,8	53	Cu sparsi
»	12 20	59,0	32,5	0,4407	1,3105	679,0	18,5	8,0	51	id.
20 » . . .	8.20	30,1	26,3	0,3997	1,0750	678,9	19,1	9,0	56	nebbia all'orizzonte
»	9.20	40,3	29,0	0,4115	1,1408	679,0	19,1	8,6	52	cielo limpido
»	10.20	49,3	32,0	0,4168	1,1719	679,1	20,0	8,8	52	id.
»	11.20	55.8	33,0	0,4255	1,2219	679,0	20,2	8,9	52	qualche Cu
»	12.20	58,3	33,5	0,4268	1,2297	678,8	20,7	9,0	50	Cu sparsi
»	13.20	55,8	33,0	0,4220	1,2019	678,6	21,8	9,6	49	id.
»	14.20	49,3	33,0	0,4180	1,1792	678,4	22,9	10,4	50	id.
»	15.20	40,3	32,7	0,4105	1,1371	678.4	23,5	10,5	49	id.
»	16.20	30,1	30,5	0,3847	0,9977	678,4	24,0	11,5	52	Cu sparsi; veli intorno al ⊙
21 » . . .	8.19	29,9	27,0	0,3955	1,0529	678.7	20,0	10,4	60	veli
»	9.19	40,0	31,0	0,4095	1,1307	678,6	20,6	11,7	65	veli; aureola intorno ⊙
»	10.19	49,0	32,0	0,4200	1,1900	678,5	20,7	11,8	63	Cu; aureola intorno ⊙
»	11.19	55,5	34,0	0,4173	1,1758	678,5	21,5	12,8	67	aureola intorno ⊙
»	12.19	58,0	32,0	0,4132	1,1518	678,3	22,3	13,0	65	⊙ fra Cu
23 » . . .	8.19	29,4	23,0	0,3920	1,0325	680,7	18,0	9,5	62	cielo bianchiccio
»	9.19	39,5	27,5	0,4108	1,1361	681,1	17,4	7,8	52	caligine bassa; qualche Cu
»	10.19	48,4	29,0	0,4240	1,2112	681,2	18,2	7,8	50	qualche Cu
»	11.19	54,9	31,0	0,4293	1,2427	681,3	18,5	7,8	49	⊙ lucido; Cu bassi
»	12.19	57,3	30,0	0,4308	1,2509	681,3	18,0	7,3	48	⊙ lucido; qualche Cu

Sestola 1901.

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Note*
	h m	o								
23 agosto. . .	13.19	54,9	30,5	0,4252	1,2189	681,2	19,0	7,7	47	Cu bassi
24 » . . .	8.19	29,2	24,4	0,3810	0,9759	679,3	18,1	10,3	67	caligine bassa
»	9.19	39,3	29,0	0,4012	1,0844	679,4	18,2	10,2	67	id.
25 » . . .	9.18	39,0	27,5	0,3865	1,0057	677,2	19,2	11,5	70	cielo bianchiccio; Cu bassi
27 » . . .	9.18	38,5	23,0	0,4238	1,2068	670,5	15,0	6,7	53	grossi Cu; ⊙ lucido
»	10.18	47,3	24,1	0,4380	1,2896	670,7	16,0	6,8	50	⊙ lucido; Cu bassi
»	11.18	53,6	28,0	0,4350	1,2742	671,2	15,5	6,1	47	Cu e veli
28 » . . .	8.17	28,2	21,1	0,4168	1,1663	675,0	14,0	7,7	65	cielo lucido; Cu bassi
»	9.17	38,2	27,0	0,4312	1,2515	675,2	14,2	8,4	70	qualche Cu
»	12.17	55,6	27.1	0,4472	1,3462	675,1	16,3	6,7	49	Cu vaganti
»	14.17	47,0	29,0	0,4425	1,3191	675,0	16,9	7,8	57	Cu e veli
»	15.17	38,2	27,0	0,4355	1,2766	674,4	18,5	7,5	47	cielo limp. Cu all'orizz. S
29 » . . .	10.17	46,7	28,5	0,4442	1,3290	675,5	15,5	8,4	64	grossi Cu a SE ed W
»	14.17	46,7	28,0	0,4390	1,2978	676,4	18,5	7,9	50	Cu vicini al ⊙
30 » . . .	8.17	27,7	22,0	0,4198	1,1835	678,8	15,0	8,2	65	cielo lucido
»	9.17	37,7	27,5	0,4368	1,2845	679,0	15,5	7,7	58	id.
»	10.17	46,4	29,0	0,4415	1,3132	679,1	16,0	7,4	55	id.
»	11.17	52,6	30,1	0,4430	1,3228	679,3	16,7	7,1	50	id.; Cu bassi
»	12.17	54,9	31,0	0,4418	1,3161	679,6	17,5	7,2	48	Cu e veli all'orizzonte
31 » . . .	8.17	27,4	23,1	0,4152	1,1583	679,5	15,8	9,3	68	cielo bianchiccio
»	9.17	37,4	30,5	0,4257	1,2217	679,6	16,7	9,9	71	⊙ limpido
»	10.17	46,0	30,5	0,4360	1,2816	679,6	17,9	9,9	65	⊙ limpido; pochi Cu
»	11.17	52,2	32,0	0,4368	1,2870	679,5	18,4	10,1	63	Cu sparsi
»	17.17	16,8	22,0	0,3848	0,9944	678,7	20,1	8,5	52	Cu sparsi; veli bassi
1 settembre	8.16	27,2	23,1	0,4090	1,1240	677,1	16,8	7,8	55	leggeris. veli intorno ⊙
»	9.16	37,1	27,0	0,4298	1,2434	677,0	16,5	6,8	51	⊙ limpido
»	10.16	45,7	30,0	0,4335	1,2666	677,2	17.0	7,2	50	id.
»	11.16	51,9	31,5	0,4360	1,2821	677,1	17,3	6,9	48	id.
»	12.16	54,2	32,0	0,4355	1,2795	676,9	18,3	7,8	50	id.
»	14.16	45,7	34,0	0,4157	1,1668	676,4	20,4	9,7	55	id.
»	15.16	37,1	31,5	0,3980	1,0683	676,3	20,9	10,4	58	cielo bianchiccio
2 » . . .	8.16	26,9	23,5	0,4042	1,0980	675,3	16,8	8,8	63	cielo bianch. con veli legg.
»	9.16	36,8	27,1	0,4170	1,1705	675,3	17,3	9,8	67	veli intorno ⊙
»	10.16	45,4	29,5	0,4255	1,2200	675,4	18,0	10,7	69	⊙ libero; Cu vaganti
»	11.16	51,6	33,0	0,4275	1,2334	675,3	19,2	11.5	71	id.

Chimica. — *Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento dell' iodio* Nota IV di G. Oddo, presentata dal Socio Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei.* I. *Jalotrachite nera ad augite ed egirina.* Nota di E. Manasse [1], presentata dal Corrispondente De Stefani.

Il professor Carlo De Stefani m' inviava per studio alcune rocce raccolte in varî punti (Concola, Moscaglione, ecc.) del cratere scoriaceo, profondamente sventrato, del Fondo Riccio nei Campi Flegrei, della cui esistenza si trova fatto appena cenno in un recente lavoro di De Lorenzo e Riva sul cratere di Vivara [2].

Ad un esame macroscopico sommario possono distinguersi fra queste rocce delle scorie trachitiche di vario colore, nere, rosse, cinereo-rossigne, dei tufi trachitici giallastri ed infine delle trachiti non scoriacee, a struttura ipocristallina, che il professore De Stefani trovò incluse sia nelle scorie, sia nei tufi.

Di questi tipi diversi di rocce ho intrapreso lo studio riducendole in sezioni sottili per l' esame microscopico, sebbene non per tutte ciò sia possibile, e ricorrendo alle analisi e ai saggi chimici.

Jalotrachite nera ad augite ed egirina della Concola.

È una roccia di color nero, eminentemente scoriacea, porosissima e quasi sfilacciata, le cavità sue essendo attraversate da esili filamenti di vetro. Ad occhio nudo, o coll' aiuto di una lente, vi si riconoscono dei cristalli porfirici biancastri o incolori e vetrosi di feldispato, delle lamine esagonali di biotite e dei prismetti verdi pirossenici. Tutti però questi minerali di prima segregazione sono rarissimi.

Al microscopio la roccia risulta costituita da un vetro molto bolloso grigio-nero, che in sezioni sottilissime si riduce di color tabacco chiaro. Insieme al vetro non mancano degli esili microliti, non superanti in lunghezza i $^{20}/_{100}$ di millimetro e generalmente di dimensioni assai inferiori, isolati

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

[2] Il cratere di Vivara nelle isole Flegree. Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli. Ser. 2ª. vol. X, n. 8, 1901.

quasi sempre, o raggruppati in fascetti di solo due o tre individui. Quasi tutti i microliti pel colore loro verdognolo, per l'estinzione che avviene sempre intorno a 40° rispetto all'allungamento, per gli alti colori d'interferenza sono riferibili all'augite. I pochi rimanenti sono feldispatici e fra questi si riconoscono facilmente dei microliti di sanidino, incolori ed estinguentisi a 40°. Ma della presenza di microliti di altri feldispati non posso con sicurezza affermare. Certo che alcuni cristalletti di plagioclasio vi sono, ma non so se riferire al primo o al secondo tempo di formazione. Assai più rari dei microliti sono i trichiti di svariate forme.

I cristalli porfirici anche al microscopio appariscono assai rari e di dimensioni variabili. Il sanidino è fra i minerali del primo tempo di formazione quello che insieme all'augite presenta le maggiori dimensioni, sebbene non sia certo il più diffuso. Esaminando, sia le polveri, sia le sezioni sottili della roccia, s'incontrano dei cristalli di sanidino che raggiungono circa tre millimetri in lunghezza e un millimetro in larghezza; ma se ne hanno anche, e più abbondantemente, di quelli così piccoli che non si sa bene se considerare di prima o di seconda formazione. Alcuni cristalli di sanidino sono rettangolari, ma la maggior parte sono corrosi e avvolti dalla massa fondamentale vetrosa; ed in tutti sono frequenti delle linee irregolari di frattura. Rarissimi ne sono i geminati. L'estinzione, rispetto allo spigolo (010) : (001), avviene a 0° su (001) e raggiunge fino 12° su (010). Nel sanidino sono abbondantissime le inclusioni, dovute principalmente a minutissimi irregolari frammenti di un vetro che sembra del tutto uguale a quello della massa fondamentale, ad aghetti di apatite ed augite, a granuli di magnetite e a qualche laminetta di biotite e di anfibolo e, forse anche, di plagioclasio basico. Il sanidino è quindi il più giovane fra i minerali porfirici.

Alcuni cristalli che a prima vista sembrano di sanidino sono forse da riportarsi all'anortose, sia perchè hanno estinzione ondulata e a forte ingrandimento manifestano una finissima striatura di geminazione, sia perchè nelle sezioni parallele a (001) l'estinzione sembra non avvenire perfettamente a 0°.

Corroso e riassorbito dalla massa fondamentale, come il sanidino, ma più abbondante e un poco più torbo è, fra i cristalli porfirici, il plagioclasio. La geminazione dell'albite non è sempre ben palese e i colori d'interferenza sono sempre, assai elevati. Giudicando dalle estinzioni, sembra il plagioclasio doversi riferire a più specie, le quali da un termine molto basico (anortite) passano fino ad una andesina acida, se non addirittura all'oligoclasio. Hanno la prevalenza però i termini piuttosto basici. I cristalli zonati son rari, e mal visibili ne sono le zone. Il plagioclasio è spesso associato all'augite e all'egirina, che sono i due pirosseni che si hanno in questa jalotrachite della Concola; ed è ricco di inclusioni dello stesso vetro che si trova incluso nel sanidino.

L'augite è verde, non pleocroica, in prismi lunghi fin tre millimetri, circondati sempre da un grosso orlo nero di magnetite, e con netta sfaldatura prismatica. Qualche volta essa è spezzettata e ridotta in brandelli. I più grossi cristalli talora presentano colorazione più intensa nelle parti periferiche che nelle parti centrali e i colori d'interferenza, che sono sempre alti, in tal caso decrescono in vivacità dalla periferia al centro. L'estinzione massima misurata, riferita all'asse verticale, è di 43°. I geminati sono rarissimi. L'augite è riassorbita dal vetro della massa fondamentale ed ha inclusioni del solito vetro, di magnetite e rarissime di apatite.

Essa è avvolta spesso da una fascia assai estesa di egirina, la quale si trova anche in cristalli isolati. L'egirina è pleocroica dal verde al giallo-verdastro, ha angolo di estinzione di pochi gradi dalla striatura ed è avvolta e framezzata da magnetite, come l'augite. È associata oltre che a quest'ultima specie al plagioclasio spesso, talora anche alla biotite. La presenza dell'egirina fu avvertita dal Rosenbusch (1), e in queste stesse condizioni, nelle scorie trachitiche degli Astroni pure nei Campi Flegrei; le quali scorie sono del tutto simili a questa della Concola.

Fra i minerali di prima consolidazione l'anfibolo (orneblenda) è scarsissimo in sezioni ottogonali. Ha pleocroismo dal verde al giallo-grigiastro ed è, come l'augite e l'egirina, circondato e attraversato da magnetite.

La biotite è abbondante invece quasi quanto i pirosseni. È listiforme o in tavolette esagonali ed ha colore bruno-giallognolo o bruno-rossastro; è alterata tanto, che non sempre bene si scorgono la striatura, il pleocroismo e l'assorbimento.

S'incontrano nelle sezioni della roccia alcuni cristalletti a contorno irregolare, o meglio alcuni granuli azzurrognoli, circondati da un orlo nero, e non completamente estinti a nicols incrociati. Basandomi anche sui saggi chimici, che diedero per questa jalotrachite tracce di anidride solforica, li riferisco all'hauina; e spiego la non completa estinzione fra nicols incrociati coll'ammettere in essi quelle stesse anomalie ottiche che il Rosenbusch dice presentare talora la hauina (2).

Non mai potei notare nelle sezioni la sodalite, per quanto la roccia, lavata ripetutamente con acqua distillata e trattata con acido nitrico, diede evidente reazione di cloro (0,22 %). Grossi grani invece si scorgono di magnetite; di questa specie si hanno anche sezioni quadrate oltre dei minuti granuli che ricoprono e rendono scuro il vetro della roccia. Infine si riconoscono qualche laminetta e qualche granulo di ematite.

(1) *Mikrosk. Physiogr. d. Massigen Gesteine.* Stuttgart, 1896, pag. 750.

(2) *Mikrosk. Phisiogr. d. petrographisch. wichtigen Mineralien.* Stuttgart, 1892, pag. 324.

L'analisi chimica, da me eseguita, di questa scoria nera della Concola diede:

H^2O a 110°	0,14
H^2O sopra 110°	0,30
SiO^2	56,74
Al^2O^3	18,74
Fe^2O^3	3,84
FeO	2,87
MnO	tracce
CaO	4,63
MgO	2,00
K^2O	7,18
Na^2O.	4,36
Cl.	0,22
Ph^2O^5	tracce
SO^3	tracce
	101,02
— O = 2Cl	0,05
	100,97

L'analisi ridotta a 100, con esclusione dell'acqua, del cloro e delle tracce di anidride fosforica e anidride solforica, è riportata qui appresso insieme alle quantità molecolari dei singoli componenti che se ne deducono. Da tali quantità, seguendo il metodo del Loewinson-Lessing (1), si ricavano: la formula magmatica, il coefficiente di acidità α (dato dal rapporto fra il numero degli atomi di ossigeno ritenuti dalla silice e quello degli atomi di ossigeno ritenuti dagli altri ossidi), e β (numero delle molecole basiche che si hanno per 100 molecole di silice):

SiO^2	56,54	0,9360	0,9360	0,9360
Al^2O^3	18,67	0,1826	0,2065	0,2065
Fe^2O^3	3,83	0,0239		
FeO	2,87	0,0398	0,1716	0,3171
CaO	4,61	0,0823		
MgO	2,00	0,0495		
K^2O	7,15	0,0758	0,1455	
Na^2O	4,33	0,0697		
	100,00			

$$9{,}4\,SiO^2 ; 2{,}1\,R^2O^3 ; 3{,}2\,\bar{R}0 \text{ ovvero } 4{,}5\,SiO^2 ; R^2O^3 ; 1{,}5\,\bar{R}O$$

$$\alpha = 2{,}00 ; \beta = 56$$

$$R^2O : RO = 1 : 1{,}2 \ ; \ Na^2O : K^2O = 1 : 1{,}1$$

(1) *Note sur la classification et la nomenclature des roches éruptives.* Compte rendu du Congrès géologique international. VII session, pag. 52, St. Pétersbourg, 1897. — *Studien über die Eruptivgesteine.* Id. id., pag. 193.

Jalotrachite nera ad augite ed egirina di Moscaglione.

Questa roccia rassomiglia grandemente alla Jalotrachite nera della Concola precedentemente descritta. Ne differisce solo perchè è un poco meno scoriacea, pur presentando sempre evidentissimo l'aspetto pomicioso e perchè ha in alcuni punti superficiali limitatissimi, una sottile patina di carbonato di calcio. Al microscopio risulta formata principalmente di un vetro scuro, che in sezioni sottilissime diviene di color tabacco molto chiaro, con innumerevoli pori ad aria. In mezzo al vetro sono riconoscibili dei microliti di augite, quasi sempre isolati e talora raggruppati in fascetti di due o tre individui, e non superanti generalmente in lunghezza i $^{20}/_{100}$ di millimetro. I microliti feldispatici sono rari e rari pure sono i trichiti.

Le segregazioni porfiriche sono molto scarse rispetto alla massa fondamentale. Si distingue fra esse il sanidino in cristalli tabulari, spesso rettangolari, ma quasi sempre corrosi e penetrati dalla massa vetrosa; vi si riscontrano inoltre rotture e fessure in ogni senso. Le dimensioni dei cristalli sanidinici variano assai; dai piccolissimi misuranti pochi centesimi di millimetro, che male si distinguono da quelli di ulteriore formazione, si passa gradatamente a quelli che sorpassano il millimetro nel senso dell'allungamento loro. Abbondantissime vi sono piccole inclusioni di un vetro giallo-bruno, del tutto simile a quello della massa fondamentale; rari invece dei microliti di apatite. Anche in questa scoria alcuni cristalli sembrano riferibili all'anortose.

I cristalli porfirici di plagioclasio sono più abbondanti di quelli di sanidino ed hanno, come questi ultimi, dimensioni variabili e aspetto tabulare, sebbene spesso siano avvolti dalla massa fondamentale vetrosa. Riferendosi all'estinzione, misurata in lamine gemelle con la legge dell'albite, la quale per altro non sempre si manifesta chiaramente, sembrerebbe doversi il plagioclasio riferire a più specie distinte. E così, analogamente a quanto è dato osservare nella jalotrachite della Concola, da termini molto basici, anortitici, si passa, per specie intermedie, fino a termini andesinici acidi. Assai scarsi sono i cristalli zonati; ma, anche quando la struttura zonale manca, alcune delle lamelle di geminazione hanno colori d'interferenza assai più alti e angoli di estinzione maggiori delle altre. La geminazione abituale è quella dell'albite, cui talvolta si associa quella del periclino. Le inclusioni vetrose sono abbondanti.

Fra i minerali porfirici, subito dopo il plagioclasio per abbondanza vengono la biotite, l'augite e l'egirina. La biotite, che ha colore tabacco scuro, è talora in lamine allungate e striate parallelamente al loro allungamento; ma più spesso è alterata con segregazione di ossidi di ferro che ne mascherano i comuni caratteri. L'augite è verde e non pleocroica con estinzione ad angolo grande (di 43° circa) dall'asse verticale. È spesso circondata da un grosso orlo di magnetite che s'inframette anche tra le linee di sfaldatura, e

presenta nel suo interno inclusioni piccolissime e irregolari del solito vetro e di magnetite. L'egirina invece è assai fortemente pleocroica dal verde bottiglia al giallo-verdastro, con angolo di estinzione variabile da 3° a 6° con la striatura facilmente visibile. Essa pure è circondata e traversata da magnetite e generalmente forma un esteso mantello avvolgente i cristalli di augite; ma si trova anche in lamine isolate. Le sue inclusioni sono quelle stesse che presenta l'augite. L'augite e l'egirina sono spesso associate al plagioclasio e, come questo, sono sempre riassorbite dalla massa vetrosa fondamentale.

La magnetite è pure assai abbondante in minuti granuli e in grosse sezioni quadrate o irregolari. L'hauina, l'ematite, la limonite solo eccezionalmente è dato di scorgere. E mai potei notare, nelle sezioni che io feci di questa jalotrachite, nè l'anfibolo, nè la sodalite. Il saggio chimico che diede 0,24 % di cloro fa sospettare in certo modo della presenza della sodalite; la perfetta rassomiglianza fra questa scoria e quella della Concola, in cui non manca, per quanto scarsissima, l'orneblenda, mi fa ritenere che anche in questa scoria l'anfibolo non sia completamente assente.

Ecco ora ciò che mi diede l'analisi chimica:

H^2O a 110°	0,12
H^2O sopra 110°	0,19
SiO^2	55,23
Al^2O^3	19,61
Fe^2O^3	4,33
FeO	2,97
CaO	5,32
MgO	2,25
K^2O	6,25
Na^2O	3,98
Cl	0,24
Ph^2O^5	tracce
SO^3	tracce
CO^2	tracce
	100,49
— O = 2Cl	0,05
	100,44

Da cui si ha:	SiO^2	55,26	0,9149	0,9149	0,9149
	Al^2O^3	19,63	0,1920	0,2190	0,2190
	Fe^2O^3	4,33	0,0270		
	FeO	2,97	0,0412	0,1919	0,3222
	CaO	5,32	0,0950		
	MgO	2,25	0,0557		
	R^2O	6,25	0,0663	0,1303	
	Na^2O	3,98	0,0640		
		100,00			

9,1 SiO^2 ; 2,2 R^2O^3 ; 3,2 $\bar{R}O$ ovvero 4,1 SiO^2 ; R^2O^3 ; 1,4 $\bar{R}O$

$\alpha = 1{,}87$; $\beta = 59$

$R^2O : RO = 1 : 1{,}5$; $Na^2O : K^2O = 1 : 1$

Patologia. — *Sul fenomeno dell' agglutinazione nel sangue dei malarici.* Nota III dei dott. D. Lo Monaco e L. Panichi, presentata dal Socio Luciani.

Fra gli autori che si sono occupati dell' agglutinazione globulare alcuni hanno limitato l' esistenza di questo fenomeno a poche infezioni; altri invece sostengono che esso è una proprietà quasi comune a tutti i sieri patologici.

Alle prime conclusioni arrivano le ricerche: di Grünbaum (1) il quale ha osservato l' agglutinazione nei sieri di ammalati di tifo e di scarlattina; di Grixoni (2) il quale afferma che solamente nei malarici e nei tifosi si può dimostrare il fenomeno dell' agglutinazione; di Novi e Meruzzi (3) i quali conchiudono che questo fenomeno si ha costantemente nelle forme infettive. Landsteiner (4), Donath (5), Shattock (6), Camus e Pagniez (7), Ascoli (8), Bignami e Capogrossi (9), Pace (10), Eisenberg (11) invece trovano il fenomeno dell' agglutinazione in quasi tutti i sieri patologici, e molti di essi estendono erroneamente questa proprietà anche ai sieri d' individui normali, come già abbiamo detto nella Nota precedente.

Su questo argomento abbiamo anche noi fatto numerose ricerche. Già nella prima Nota, oltre che in tutti i malarici, supponemmo che il fenomeno dell' agglutinazione fosse comune a molte o a tutte le malattie infettive, e in essa riportammo i risultati di un esame fatto su un individuo, il cui siero acquistò la proprietà agglutinante, che prima non aveva, dopo aver contratto l' infezione tifosa.

Le esperienze che ora comunichiamo, furono eseguite allo scopo di stabilire se il fenomeno dell' agglutinazione fosse o no comune a tutti i sieri patologici. Nel caso negativo si veniva a confermare la teoria sostenuta da Grixoni, che cioè il fenomeno dell' agglutinazione rappresenta una proprietà speciale del siero malarico. Nel caso positivo ci proponevamo di ricercare se

(1) Grünbaum, British med. Journ. 1900. 5 maggio 1900.
(2) Grixoni, Gazz. degli Osped. 1901.
(3) Novi e Meruzzi, Il Policlinico (Supplemento settimanale), n. 38. 1901.
(4) Landsteiner, Centralblatt f. Bact. XXVII, pag. 361.
(5) Donath, Wiener klin. Woch., 1900, pag. 497.
(6) Shattock, Journ. of Path. a. Bact. 1900, vol. VI, pag. 303.
(7) Camus e Pagniez, Compt. rend. de la Soc. de Biol. 1901.
(8) Ascoli, La clinica medica. 1901.
(9) Bignami e Capogrossi, Comunicazione all'Acc. Med. di Roma del 26 giugno 1901.
(10) Pace, Rivista critica di Clinica med. 1901.
(11) Eisenberg, Wiener klin. woch. 1901, n. 42.

esistevano caratteri differenziali tra il fenomeno dell'agglutinazione che si osserva adoperando i sieri malarici, e quello che si osserva adoperando i sieri provenienti da individui affetti da altre malattie. Inoltre era nostra intenzione di estendere le ricerche nei recidivi malarici, per istudiare se e quando si otteneva in essi la scomparsa del fenomeno dell'agglutinazione mediante la cura chininica, e se questo fatto poteva essere utilizzato come indice dell'avvenuta guarigione dell'infezione palustre.

Soggetto delle nostre esperienze furono gli ammalati dell'Ospedale di S. Spirito di Roma e quelli della città di Grosseto, dove uno di noi si recò come membro della Commissione antimalarica governativa diretta dal professor Gosio.

La tecnica da noi adoperata è stata già descritta nella Nota precedente. Ci occorre però aggiungere che, in queste nostre esperienze, il siero da esaminarsi ottenuto per separazione dal coagulo formatosi nel tubo capillare, venne sempre mescolato con una piccolissima quantità di sangue di cavia normale, il quale, come è noto, non agglutina unito al siero d'individuo normale. Per essere più esatti, diremo che, dopo aver tagliato con una forbice il padiglione dell'orecchio della cavia già disinfettato e asciugato, s'immerge, nel sangue che fuoriesce dalla ferita, la punta di un piccolo spillo, e si porta poi a contatto della goccia di siero depositato nel vetrino coproggetti. La piccola quantità di sangue viene agitata per mezzo del medesimo spillo nel siero, finchè si ottiene una colorazione uniforme di esso, e poi si osserva in goccia pendente. Esperienze di controllo eseguite contemporaneamente con lo stesso siero a cui si aggiungeva ora il sangue di uomo sano, ora quello di una o di altra cavia normale, hanno dato eguali risultati. Mai abbiamo adoperato i globuli rossi lavati in soluzione fisiologica, perchè, come abbiamo già dimostrato, qualunque manipolazione su essi può essere causa di risultati poco esatti.

Mediante la tecnica già esposta, e in base ai numerosi esami da noi eseguiti, siamo in grado di confermare il fatto che con i sieri di moltissimi ammalati si ottiene il fenomeno dell'agglutinazione. Tra i sieri che hanno dato risultati negativi, citiamo quelli di due casi di enterite, di un caso di blenorragia con reumatismo, di uno di nefrite parenchimatosa, di uno di cistite, di uno di clorosi, di uno di sifilide secondaria e di pochi altri. Col siero di ammalati di tifo, di ittero febbrile, di pulmonite, di cancro del fegato, di pleurite, di tubercolosi pulmonare, di anemia secondaria, di morbo di Pott, di endocardite, di diabete con nefrite, di enterocolite acuta, di anemia postpartum, di leucemia splenica, di porpora emorragica, di febbre puerperale, ecc. ecc., abbiamo sempre riscontrato il fenomeno dell'agglutinazione.

Mescolando il siero del sangue di questi ammalati col sangue di cavia, le masse agglutinate ora si trovano formate di moltissimi globuli, ora di pochi. Da questo esame qualitativo non si deve mai trarre alcuna conclu-

sione, per sostenere come molti fanno, che un siero di un ammalato agglutina più di quello di un altro ammalato. Per noi il criterio di una maggiore o minore capacità agglutinante può solo farsi, quando, diluendo i sieri con la soluzione fisiologica, si osserva che in uno il fenomeno scompare con diluizioni minori di quelle che occorrono per un altro siero, per ottenere il medesimo risultato.

Per diluire la piccola quantità di siero ottenuto per separazione dal coagulo nel tubo capillare, si procede nel seguente modo: Quando c' interessa conoscere se il siero da esaminarsi agglutina o no a una data diluizione, allora dopo aver rotte con una limetta le estremità del tubo, e versato tutto il contenuto di esso in un vetro d' orologio, con lo stesso tubo per capillarità si raccoglie la parte liquida, evitando l' entrata in esso del coagulo o dei piccoli coaguli del sangue. Al limite della sezione del tubetto riempita di siero per capillarità, si attacca una strisciolina di carta, o si fa un segno con la limetta o con l' inchiostro, e dopo si fa cadere, soffiando leggermente dentro il tubetto, il siero in un altro vetro d' orologio. Poscia si riempie il tubetto sino al segno, di soluzione fisiologica, e si versa questa nel vetro di orologio, tante volte, quante volte si desidera diluire il siero. Allora, non resta che mescolare bene il siero con la soluzione fisiologica, depositare una piccola goccia di questo liquido nel vetrino coproggetti e aggiungervi il sangue di cavia. L' osservazione microscopica del preparato c' indicherà, se a quella diluizione il siero esaminato agglutina o non agglutina.

Quando invece vogliamo esattamente determinare il grado di diluizione a cui arriva la capacità agglutinante di un siero, occorre frazionare il siero separatosi dal coagulo nel tubetto e versato in un vetro d' orologio, raccogliendolo in 3-4 tubetti capillari. Mescolando il siero del primo tubetto con altrettanta soluzione fisiologica, e facendo il relativo preparato, si stabilisce se il fenomeno avviene alla diluizione 1:1; se poi al siero rimasto, rimisurato nel tubetto e depositato in altro vetro d' orologio si aggiunge una eguale quantità di soluzione fisiologica, otterremo la diluizione 1:3, e, continuando a ripetere le medesime operazioni, le diluizioni 1:7, 1:15, 1:31 ecc. Con il siero del secondo tubetto mescolato con due parti di soluzione fisiologica, possiamo misurare la capacità agglutinante alla diluizione 1:2, e procedendo dopo come nel caso del tubetto n. 1, le capacità agglutinanti nei rapporti di diluizione di 1:5, di 1:11, di 1:23 ecc. Il siero del terzo tubetto verrà per la prima volta diluito quattro volte, e quello del quarto tubetto per la prima volta verrà diluito sei volte. Le altre diluizioni si faranno sempre come nel caso del primo tubetto; cosicchè prima studieremo la capacità agglutinante nei rapporti 1:4, 1:9, 1:19; e dopo quella nei rapporti 1:6, 1:13, 1:27. Se si dispone di altro siero, possiamo, diluendo porzioni di esso per la prima volta 8, 10, 12 volte, completare tutta la serie dei rapporti; ma quasi sempre bastano quattro piccole quantità di siero raccolte

in altrettanti tubetti per riuscire ad ottenere la scala di tutte le diluizioni con poche lacune, e per determinare esattamente quando scomparisce il fenomeno dell'agglutinazione.

Di questa lunga tecnica ci siamo solo serviti per i sieri malarici che presentano una capacità agglutinante sempre alta; ma per la maggior parte degli altri sieri patologici, l'esame si limitava alla esecuzione delle prime diluizioni (1:1, 1:2), con le quali il fenomeno agglutinante, sempre visibile quando si mescolava il siero non diluito col sangue di cavia, più non si mostrava.

Tra i sieri patologici che più agglutinano, citiamo quelli dei tifosi ma anche con questi sieri, il fenomeno dell'agglutinazione che spesso scompare con diluizioni 1:1, può alle volte osservarsi anche con diluizioni 1:3 o 1:4.

La maggior capacità agglutinante spetta al siero dei malarici, sia primitivi che recidivi, col quale il fenomeno si osserva sempre con diluizioni maggiori del rapporto di 1:5. Nei sieri dei malarici recidivi abbiamo trovato qualche volta persistente il fenomeno anche con diluizioni nel rapporto di 1:30, ma numerosissimi per non dire tutti sono i sieri dei malarici, sia recidivi che primitivi, in cui il fenomeno resta sempre visibile con diluizione nel rapporto di 1:10.

Da questi risultati possiamo quindi ricavare la legge che i *sieri la cui capacità agglutinante si conserva al di là delle diluizioni 1:5, debbono ritenersi appartenenti ad individui malarici.* Se a questa prova diagnostica, aggiungiamo l'altra che i sieri malarici non presentano più il fenomeno dell'agglutinazione, se diluiti a parti uguali con soluzione isotonica contenente l'1 % di bicloridrato di chinina, la possibilità di distinguere un siero malarico da uno non malarico aumenta. Occorre però avvertire che non si può diagnosticare se un siero è malarico con questa sola ultima prova, se non si fa contemporaneamente un altro preparato adoperando il medesimo siero diluito a parti uguali con la semplice soluzione fisiologica. Nel caso che i risultati delle due prove fossero tutti e due negative o tutte e due positive, allora ne deduciamo che il siero non è di malarico, ma se la prova con la chinina è negativa, e l'altra con la soluzione fisiologica è positiva, si può ritenere che il siero esaminato contiene isoagglutinine malariche. L'azione che la chinina esercita sulle agglutinine malariche se da una parte ci mostra che essa non agisce solamente sul parassita malarico, ma anche sui prodotti tossici di esso, come ammise Baccelli (1); dall'altra costituisce uno dei pochissimi esempi notati dalla letteratura moderna, in cui sostanze chimiche hanno il potere di neutralizzare quelle dell'organismo dipendenti da processi infettivi.

(1) Baccelli G., Il Policlinico, 1897, vol. IV.

Avendo così dimostrato quanto sia importante l'esame della capacità agglutinante per la diagnosi della malaria, ci resta a riferire le esperienze che abbiamo eseguito per stabilire come si comporta questo fenomeno nei malarici chinizzati, e se la scomparsa di esso sta in rapporto diretto con la fine dell'infezione.

A Grosseto e precisamente in una frazione di questa città denominata Istia d'Ombrone, uno di noi sottopose, a cominciare dal 1° luglio di questo anno, alla somministrazione quotidiana di 1 gr. di bicloridrato di chinina 12 individui che avevano tutti sofferto di malaria e quasi tutti per più anni di seguito. In nove di essi l'ultimo accesso febbrile era avvenuto nel mese di aprile o nel mese di maggio del corrente anno; per gli altri il periodo apirettico decorreva dal mese di ottobre o dal mese di novembre del 1900. A metà di essi poi nei due mesi antecedenti l'inizio della cura quotidiana, erano stati somministrati due grammi di chinina per settimana.

Dagli esami della capacità agglutinante eseguiti mediante la tecnica già descritta, risultò che con il siero di questi individui il fenomeno era sempre visibile alla diluizione nel rapporto di 1:20. La chinizzazione venne prolungata fino alla scomparsa del fenomeno, la quale si avverò dopo 18-20 giorni di cura, che tutti fecero volontariamente senza inconvenienti di sorta. La diminuzione della capacità agglutinante cominciò a notarsi dopo 3-5 giorni dalla prima somministrazione della chinina, e continuò a decrescere prima lentamente, e nell'ultimo periodo rapidamente.

Sospesa la somministrazione della chinina ai 12 individui che si erano sottoposti alla cura, e che rimasero sempre nel posto malarico, dormendo in case non munite di protezione meccanica; tre, a stagione malarica inoltrata, tornarono ad ammalarsi di febbre malarica, alla quale si accompagnò una elevazione della capacità agglutinante che non raggiunse mai l'altezza iniziale.

La persistenza della dimora di queste tre persone in luogo malarico, e il non aver protette con le reti metalliche le loro case, può far venire il dubbio che esse abbiano contratto nuove infezioni, ma dall'insorgere e dal decorso del processo febbrile in quei tre individui, non possiamo dedurre criterî talmente certi da escludere che si trattasse di semplici recidive.

Nel siero delle altre nove persone il fenomeno agglutinante mancò per circa due mesi, e dopo trascorso questo periodo di tempo ricomparve in grado leggero, mantenendosi visibile con le sole diluizioni inferiori al rapporto di 1:5. Questa bassa capacità agglutinante continua ad osservarsi anche ora, quando dalla fine della cura sono già passati cinque mesi, durante i quali, i nove individui hanno goduto sempre ottima salute.

In base ai risultati ottenuti non possiamo stabilire senza restrizione che tra la scomparsa del fenomeno agglutinante e la guarigione completa dell'infezione malarica ci sia uno stretto rapporto. Può darsi che l'infezione quando

si fa scomparire il fenomeno agglutinante mediante la cura della chinina, non sia completamente estinta, e che le ultime tracce dell'infezione non si rendano dimostrabili con la prova diagnostica da noi adoperata. Ci proponiamo quindi di riprendere queste esperienze per vedere se prolungando la somministrazione della chinina per qualche giorno ancora dopo la scomparsa del fenomeno, si riesce ad ottenere con l'assenza definitiva di esso, la guarigione completa di tutti i malarici che si sottopongono a questa cura.

L'egregio dott. Caciai, medico-condotto di Istia d'Ombrone, che ci prestò un aiuto prezioso nell'esecuzione di queste esperienze, ci tiene periodicamente informati dello stato di salute dei nostri curati; e quantunque ancora il tempo trascorso non sia tanto lungo come quello che si ammette per escludere la ricomparsa delle recidive, pure ci sembra che i risultati finora ottenuti sieno tali da incoraggiarci a sostenere che la cura quotidiana di chinina prolungata fino alla perdita della proprietà agglutinante del siero dei malarici è molto efficace, e coincide col maggior numero delle guarigioni complete.

In Istia d'Ombrone durante l'ultima stagione malarica si presentarono per fare la cura chininica circa 800 persone, e in tutte quelle che dichiaravano di non avere avuto accessi febbrili da parecchi mesi o da parecchi anni venne sempre eseguita la ricerca dell'agglutinazione, allo scopo di potere fissare l'epoca in cui questo fenomeno scompare per estenzione naturale del processo infettivo non coadiuvato dalla chinizzazione energica e prolungata.

Da questi esami risultò che quasi tutti presentavano il fenomeno dell'agglutinazione; però bisogna avvertire che ricercando esattamente l'anamnesi, queste persone finivano sempre con l'ammettere che nella stagione malarica dello scorso anno o nei mesi dell'inverno susseguente, avevano sofferto qualche febbre di strapazzo o di straccaia, come loro dicono, che era guarita dopo l'ingestione di pochi grammi di chinina. Non fu invece trovato il fenomeno nei sieri di poche persone in cui il periodo apirettico, esattamente controllato, durava da 2-3-4 anni.

Probabilmente sulla scomparsa naturale della proprietà agglutinante devono agire molti fattori, come la maggiore o minore chinizzazione durante gli accessi febbrili, la buona nutrizione, il riposo, ecc.; ed è facile che in queste eccellenti condizioni si trovavano le persone di cui parlava Grixoni [1], nel sangue delle quali non erano più apprezzabili le agglutinine malariche dopo 3-5 mesi di completa apiressia. Nei malarici non fortemente chinizzati e in cui non erano sopravvenute molte o lunghe recidive, secondo le nostre esperienze, il fenomeno agglutinante non dura mai meno di due anni. Esso, fino a prova in contrario, indica che l'infezione non è estinta; e in favore di questa teoria rammentiamo la facilità con cui gl'individui già malarici,

[1] Grixoni, Gazzetta degli Ospedali, 1901.

e dotati di siero fortemente agglutinante, riprendono le febbri appena fanno un lavoro faticoso, o si espongono alle intemperie della stagione.

Negli individui che avevano sofferto di febbre tifoide, dagli esami fatti non così numerosi come quelli eseguiti sui sieri malarici, risultò invece che la proprietà agglutinante nella maggior parte dei casi più non si riscontra dopo 2-5-10 mesi dalla guarigione. Questa persistenza del fenomeno agglutinante nel tifo, difficilmente si può spiegare con la teoria sostenuta da Eisenberg, il quale ammette che le agglutinine non hanno nulla di specifico, e che esse non sono se non l'espressione della reazione dell'organismo sul riassorbimento delle parti componenti gli eritrociti. Secondo questa teoria in tutti gli stati patologici dove più energica è la distruzione dei globuli rossi, più alta dovrebbe trovarsi la capacità agglutinante.

Ma così in vero non avviene, perchè in generale la capacità agglutinante è più alta nei processi infettivi che nelle malattie discrasiche. Anzi a ciò dobbiamo aggiungere che negli stati inoltrati di cachessia palustre, la capacità agglutinante, forse per assenza della reazione dell'organismo, si trova sempre meno alta che nei malarici in atto, anche quando abbiano sofferto più recidive, ma ancora resistenti alla malattia e in grado di lavorare nei periodi apirettici. D'altra parte se la presenza delle isoagglutinine dipendesse solamente dalla distruzione degli eritrociti, la chinina in vitro dovrebbe agire egualmente sia su quelle malariche, che su quelle delle altre infezioni, la qual cosa, come abbiamo detto nella seconda Nota, non siamo riusciti a dimostrare. Si deve quindi concludere che per la produzione delle isoagglutinine e forse anche delle isoemolisine intervengano fattori di origine infettiva, i quali, modificando o distruggendo gli elementi del sangue, i cui prodotti di riassorbimento si riverserebbero nel plasma, riescono a rendere evidente la capacità agglutinante del siero, il quale normalmente non mostra di essere dotato di questa proprietà.

Fisiologia. — *Su alcune alterazioni dei ganglii linfatici nelle dermopatie distrofiche.* Nota del dottor Vincenzo Montesano [1], presentata dal Socio Luciani.

In molti infermi con dermopatie distrofiche si verificano delle tumefazioni dei ganglii linfatici. Più di tutto, questo fenomeno si riscontra nella prurigine di Hebra, in cui, accanto alle più evidenti manifestazioni distrofiche della cute, ed ai disturbi subbiettivi, sotto forma di prurito, vi hanno alterazioni dei ganglii linfatici crurali, che hanno avuto il nome di bubbone pruriginoso.

[1] Lavoro eseguito nella Clinica Dermosifilopatica diretta dal prof. Campana.

Tutti i dermatologi sono concordi nel ritenere che questo bubbone sia l'effetto delle irritazioni per grattamento a cui gl'infermi ricorrono per il prurito: ma, oltre il fatto, che in molte altre malattie croniche pruriginose della cute, non si ha un fenomeno consimile, non è dubbio che il bubbone da prurigine abbia caratteri obbiettivi speciali, che lo fanno distinguere dalle comuni alterazioni di ganglii linfatici da irritazione cutanea. Essi possono così riassumersi:

1°. Il bubbone pruriginoso non suppura mai (Lesser).

2°. Non dà disturbi subbiettivi degni di nota.

3°. Il connettivo sotto-cutaneo e perigangliare, in corrispondenza del bubbone pruriginoso, è più lasco del normale, e la cute sovrastante assume uno stato sclerotico, non aderisce perfettamente al sotto-cutaneo e dà l'apparenza, nei ganglii ipertrofici, di una tumefazione riducibile alla pressione (Campana, *Frammenti di Dermatologia*).

4°. Il bubbone pruriginoso assume talvolta l'aspetto di un linfangioma, specialmente del connettivo perigangliare (Campana, ibid.).

Inoltre sono state notate dagli autori tumefazioni dei ganglii linfatici corrispondenti nelle regioni cutanee affette da *herpes zoster*, e noi stessi in un infermo con eritemi e flittenosi degli arti, riferibili, con ogni probabilità a lesioni del midollo spinale, abbiamo osservato ipertrofia dei gangli epitrocleari e crurali, che non ci è stato possibile riferire a nessuna delle comuni cause morbose, che sogliono produrre queste tumefazioni.

Ora si sa, che il fenomeno dell'ipertrofia di dati tessuti, organi e sistemi, suole riscontrarsi in svariate malattie del sistema nervoso centrale e periferico, ad esempio nella siringomielia, in cui possono aversi, oltre dell'ipertrofia dei capi ossei di alcune articolazioni, delle vertebre nonchè delle mani (chiromegalia di Charcot e Brissaud) delle alterazioni ipertrofiche del connettivo sottocutaneo; nell'acromegalia; nella paralisi muscolare pseudo-ipertrofica o miosclerotica. Ci siamo perciò domandati se l'ipertrofia dei ganglii linfatici in queste dermopatie distrofiche non fosse essa pure la conseguenza delle stesse alterazioni del sistema nervoso che producono l'affezione cutanea, dal momento che queste cosidette adeniti, per i caratteri clinici, differiscono dalle comuni poliadeniti da irritazione cronica della pelle e si trovano in relazione cronologica colle altre alterazioni dovute al sistema nervoso, che non sono i sintomi infrequenti in questa malattia.

Per dare una base sperimentale al nostro concetto, abbiamo istituito il seguente esperimento, in parecchi animali, il quale ha concesso nuovo appoggio alla nostra idea.

In tre cani di media statura, e di sesso maschile, previa narcosi eterea, con tutte le cautele asettiche s'incide la cute nella regione crurale destra e si asporta un tratto del nervo crurale corrispondente, lungo quattro centimetri circa, nella sua porzione più alta, verso il bacino.

Si asportano nel tempo stesso alcune glandole linfatiche della regione Sutura a punti staccati della cute e del sottocutaneo.

In uno di questi cani si pratica contemporaneamente un' incisione della cute e del sottocutaneo nella regione ascellare sinistra, senza asportare verun nervo, indi si sutura a strati.

Salvo uno di questi cani, in cui qualche punto di sutura non tenne e fu necessario ridarlo, gli altri guarirono regolarmente senza suppurazione.

Dopo uno spazio di tempo variabile da due a tre mesi, lungo le cicatrici delle ferite già fatte, si pratica una seconda incisione in tutti e tre i cani, e si asportano dalla regione crurale dei ganglii linfatici tumefatti di grandezza variabile da quella di una piccola avellana a quella di un grosso cece, di consistenza piuttosto dura. Nella regione ascellare del terzo cane, ov' era stata già praticata una prima incisione, non si riscontra alcuna alterazione nel volume delle glandole.

Osservando a fresco i ganglii linfatici asportati dopo la resezione del nervo, si nota che essi raggiungono le dimensioni triple o quadruple dei normali, sono isolati, tondeggianti, a superficie liscia, di consistenza piuttosto notevole.

Alla sezione si osserva che non esistono focolai suppurativi e necrotici: in alcuni di esse la superficie di sezione non è uniforme: si notano invece dei tratti periferici di colorito bianco-giallastro, in corrispondenza dei quali la consistenza è meno notevole.

Anche nel centro di questi ganglii si notano dei tratti nei quali la consistenza appare diminuita.

Esame istologico. — Le glandole sono state indurite nel liquido del Müller e poi in alcool: altre in liquido del Müller ed acido osmico.

Le sezioni sono state colorate con ematossilina, con ematossilina ed eosina, col policromo triacido del Pappenheim.

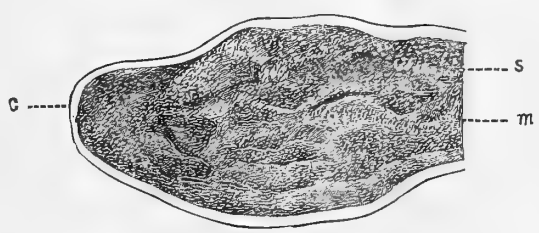


Fig. 1. — Glandola linfatica asportata prima del taglio del n. crurale: *c* capsula; *m* parte midollare; *s* setti.

Facendo il paragone tra un ganglio, nello stato normale ed un altro alterato per resezione del nervo, si notano delle rilevanti differenze, anche osservando con un lieve ingrandimento. Difatti questa figura riproduce un ganglio normale (fig. 1).

Ecco che cosa si osserva con un piccolo ingrandimento:

La capsula è evidentemente ispessita, ma solo in alcuni tratti si osservano i setti che invia nell'interno.

Nella parte follicolare del ganglio si osserva una notevole quantità di tessuto adiposo che si è sostituito a quello adenoideo, il quale è soltanto in parte conservato, ma non reagisce alle comuni sostanze coloranti con la stessa intensità del tessuto glandolare sano.

La particolarità più notevole è la presenza di numerose lacune, specialmente nella parte più centrale del ganglio, limitate da tessuto connettivo fibroso, nel cui interno si osservano dei leucociti. Le pareti di queste lacune sono rivestite qua e là da cellule endoteliali.

E questa seconda (fig. 2) un ganglio patologico per resezione sperimentale del nervo. Noi non riportiamo che una sola figura di questa condizione

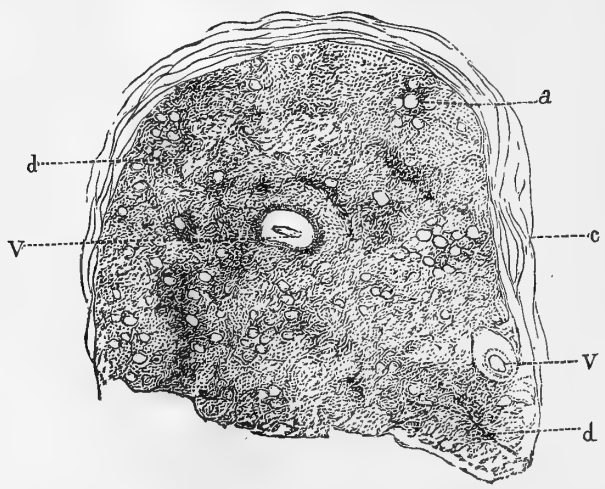


Fig. 2. — Metà di una glandola linfatica asportata alcuni mesi dopo la recisione del n. crurale: *c* capsula; *d* struttura glandolare follicolare e cavernosa; *a* globuli adipiferi; *v* vasi sanguigni, visibili con lo stesso ingrandimento col quale non si riesce a vedere quelli della glandola sana (Zeiss. Oc. 2. Ob. BB. Ingr. 130.

patologica; ma ne avremmo potute riportare moltissime; perchè nelle tre osservazioni eseguite abbiamo avuto sempre lo stesso fonomeno.

In mezzo al tessuto ove la struttura normale è conservata, ed anche ove essa manca, qua è là si vedono aree di effusione di corpuscoli rossi più o meno conservati nella loro forma.

Si notano altresì dei vasi in numero più abbondante che non nei ganglii normali: alcuni di essi sono così dilatati da assumere l'aspetto di un tessuto cavernoso (fig. 3); altri sono ispessiti tanto nella tunica media come nell'avventizia (fig. 3, 4), che in alcuni di essi appare distaccata.

Con un ingrandimento maggiore si osserva che gli elementi cellulari contenuti nelle maglie del tessuto lacunare appaiono sotto tre forme:

1°. Corpuscoli simili comuni leucociti del sangue, della grandezza media che supera di tre-quattro volte quella dei corpuscoli rossi.

Fig. 3. — *a* Deformazione e distacco dell'endotelio di un vaso arterioso di glandola linfatica, dopo la recisione del nervo crurale in un fascio artero-venoso ispessito nelle proprie parti.

2°. Corpuscoli molto grossi con nucleo bi- o tripartito, scarsi: rarissimi fra questi i corpuscoli contenenti granuli eosinofili. In gran parte questi corpuscoli si colorano con bleu di metile basico, salvo le poche cellule eosino-

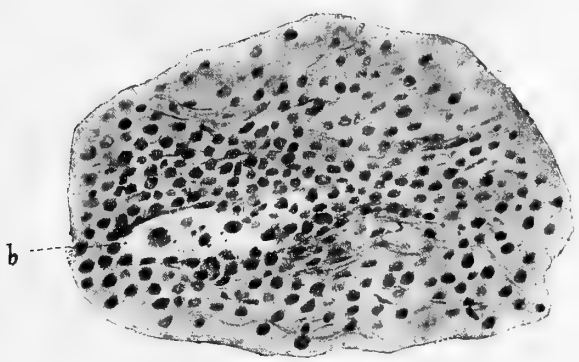


Fig. 4. — *b* Tratti del sistema lacunare di una glandola linfatica, dopo la recisione del n. crurale, con scarso contenuto, di forma varia, al contrario di quel che si vede nella glandola sana, ov'è più abbondante e più uniforme (Zeiss. Oc. 3. Ob. BB. Ingr. 175).

file che si vedono con la soluzione policroma triacida del Pappenheim.

3°. Corpuscoli piccolissimi, veri microciti.

Inoltre il tessuto connettivale di sostegno delle glandole appare iperplasizzato in alcuni tratti, con fibre sottili ma numerose, evidentissime.

Le sezioni dei ganglii fissati con liquido del Müller ed acido osmico, lasciano distinguere con maggiore evidenza le lacune che hanno sostituito il tessuto gangliare ed intorno alle quali si osserva il tessuto connettivo fibroso. Inoltre notasi la presenza del tessuto adiposo, colorato dall' acido osmico, non con una disposizione irregolare, ma con quella del tessuto sottocutaneo; disposizione che pare segua un decorso di fasci e di fibre, consistente in aggregati di globuli adipiferi limitati da una rete connettivale sottile ma diffusa, allo stesso modo come nel tessuto sottocutaneo.

Queste per sommi capi sono le alterazioni istologiche riscontrate nelle glandole linfatiche di tre cani, dopo l' esportazione di un tratto del corrispondente nervo crurale.

Esse possono così riassumersi:

1°. Sostituzione al tessuto gangliare di tessuto adiposo con disposizione analoga a quella del connettino sottocutaneo e formazione di uno stato lacunare da ricordare uu linfagioma.

2°. Iperplasia del tessuto connettivale di sostegno della glandola.

3°. Dilatazione dei vasi ed ispessimento delle loro tuniche più interne.

Evidentemente, qui le mutate condizioni trofiche per l' asportazione di un tratto nervoso, hanno agito sulle glandole linfatiche, favorendo l' abnorme sviluppo del tessuto adiposo in modo paragonabile a ciò che si verifica nella paralisi muscolare pseudo-ipertrofica, e l'iperplasia del tessuto connettivale di sostegno in maniera analoga a quella che osserviamo nei fibromi della cute, nei quali l' origine trofica è fuori discussione.

Come e perchè la resezione del nervo produca questo fenomeno, io non cercherò di spiegare. Al mio scopo basterà l' aver dimostrato che si possono sperimentalmente ottenere speciali alterazioni macroscopiche ed istologiche in ganglii linfatici, quando si modifichino le condizioni trofiche naturali; e come queste alterazioni possano paragonarsi a quelle della paralisi muscolare pseudo-ipertrofica e di altre malattie del sistema nervoso centrale e periferico, nelle quali l' ipertrofia di tessuti, organi e sistemi forma spesso la più importante manifestazione morbosa.

Se adunque ricordiamo che il bubbone accompagna sempre la prurigo, malattia la cui origine distrofica non può mettersi in dubbio, mentre manca in altre malattie croniche con prurito; e che l' esperimento ci ha mostrato come le mutate condizioni trofiche possono essere la causa di un aumento di volume dei ganglii linfatici, non sembrerà arrischiato il ritenere che le alterazioni gangliari della prurigine e di altre malattie distrofiche della cute, possano essere la conseguenza delle stesse cause a cui le predette affezioni devono la loro origine.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Cerruti comunica che ai concorrenti ai premi Ministeriali del 1901, per le *Scienze matematiche*, dei quali venne dato l'elenco nella scorsa seduta, devonsi aggiungere i seguenti, che inviarono al Ministero in tempo utile i loro lavori:

7. Buffa Pietro. — 1) *Primo studio della geometria piana* (st.). — 2) *Movimento ed eguaglianza* (st.).

8. Chini Mineo. — 1) *Sulle formule che esprimono la lunghezza di un arco e l'area di un settore circolare* (st.). — 2) *Sui fattori integranti di una o più forme differenziali di grado n ad m variabili* (st.). — 3) *Sopra alcune equazioni differenziali del 1° ordine* (st.). — 4) *Sopra alcune equazioni differenziali lineari omogenee del 2° ordine* (st.). — 5) *Sulla determinazione di una funzione di due variabili indipendenti quando ne siano assegnate le espressioni delle due derivate parziali d'ordine n rispetto a ciascuna delle variabili* (st.). — 6) *Sulle equazioni a derivate parziali di 2° ordine* — 7) *Geometria infinitesimale delle linee nello spazio e sopra una superficie* (litogr.).

9. De Francesco Domenico. — 1) *Sopra alcune formole elementari di geometria non euclidea* (st.). — 2) *Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante.* Note I e II (st.). — 3) *Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a 3 dimensioni di curvatura costante.* Mem. I e II (st.). — 4) *Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (st.). — 5) *Su alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico, analiticamente equivalenti a problemi nello spazio ordinario* (st.). — 6) *Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (st.).

10. Delitala Giuseppe. — 1) *La risoluzione completa del tetragono piano* (st.). — 2) *Relazioni dipendenti da raggi uscenti da un punto e passanti pei vertici di un triangolo* (st.). — 3) *Un correlativo del teorema di Stewart* (st.). — 4) *Nuova risoluzione di due problemi*, (st.). — 5) *La risoluzione del pentagono completo e sue applicazioni* (ms.). — 6) *Un nuovo sistema di coordinate trilineari* (ms.) — 7) *Per la risoluzione generale del tetragono completo* (ms.). — 8) *Alcune proprietà dell'inversione isogonale* (ms). — 9) *Nuove proprietà dei punti notevoli del triangolo* (ms.). — 10) *La tetragonometria piana?* (ms.) — 11) *Le formule definitive di risoluzione del problema di Pothenot* (ms.).

11. Palatini Francesco. — 1) *I sistemi lineari di grado n e dimensioni* $n+i$ *di varietà algebriche* V_i *nello spazio* S_{i+1} *in relazione alle*

trasformazioni birazionali (st.). — 2) *Sulla rappresentazione lineare dei complessi lineari di rette di uno spazio a quattro dimensioni coi punti dello spazio a nove dimensioni* (st.). — 3) *Sui sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio a cinque dimensioni* (st.). — 4) *Fondamenti di una teria dei sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio ad n dimensioni* (ms.). — 5) *Prodotto di due condizioni caratteristiche relative ai piani di un iperspazio.* — 6) *Numero delle rette di un* S_n *soddisfacenti ad un prodotto di condizioni caratteristiche indipendenti tali da formare una condizione di multiplicità* $2(n-1)$ (ms.). — 7) *Sulla teoria delle proporzioni tra grandezze geometriche* (st.).

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una estensione del metodo di Eulero-Laplace per l'integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali del secondo ordine.* Memoria del Socio Ulisse Dini.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Meccanica. — *Sul principio delle immagini di Thomson e le equazioni dell'elasticità.* Nota del Corrisp. C. Somigliana.

Geologia. — *I terreni eocenici presso Bribir in Croazia* Nota del Socio C. De Stefani e del dott. G. Dainelli.

Le due precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre.* Nota di Francesco Severi, presentata dal Socio C. Segre.

La ricerca delle condizioni perchè una forma, particolarmente ternaria, si possa esprimere come combinazione lineare di altre due forme date, ha occupato molti geometri, e fra i più insigni.

Ai noti lavori, fondamentali, di Nöther, han fatto seguito altri (di Nöther stesso, di Voss, Stickelberger, Zeuthen, Bertini, Brill, ecc.) nei quali il problema fu considerato dal punto di vista puramente algebrico ed anche sotto altri aspetti.

Recentemente nei Mathematische Annalen, i quali accolsero la maggior parte dei lavori precedenti, vide la luce una breve Nota della sig.na Scott (1), nella quale è dimostrato il « *Fundamentalsatz* » di Nöther, per le forme ternarie, con mezzi molto semplici.

1. Date $h\,(\leq r)$ forme $F_1, F_2, \ldots F_h$ delle $r+1$ variabili $x_0, x_1, \ldots, x_r$, supposto che le equazioni

$$(1) \qquad F_1 = 0, \ldots, F_h = 0, \quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \frac{\partial F_h}{\partial x_0} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_h}{\partial x_r} \end{matrix} \right\| = 0$$

abbiamo meno che ∞^{r-h} soluzioni comuni, trovare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma F, delle medesime variabili, si possa esprimere come combinazione lineare di $F_1, F_2, \ldots, F_h$; ossia affinchè esistano certe forme $A_1, A_2, \ldots, A_h$ in guisa che:

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_h F_h.$$

Tale è il problema che ci occuperà nella presente Nota.

Esso assume un aspetto geometrico quando $x_0, x_1, \ldots, x_r$, s'interpretino come coordinate omogenee di punto in uno spazio S_r. Alla totalità delle soluzioni dell'equazione $F_1 = 0$ viene a corrispondere una ∞^{r-1} di punti dello S_r, i quali diremo costituire una *ipersuperficie* (2), che denoteremo con la lettera $\mathbf{F}_1$; e analogamente per le equazioni $F_2 = 0, \ldots, F_h = 0$.

Mentre la forma F_1 determina $\mathbf{F}_1$, a questa corrispondono infinite forme che differiscono tra loro per fattori costanti.

Se in un punto comune a $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ sono soddisfatte le equazioni $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0, \binom{i = 1, \ldots, h}{j = 0, \ldots, r}$, quel punto o sarà multiplo per qualcuna delle $\mathbf{F}$, oppure in esso gli iperpiani tangenti alle $\mathbf{F}$ saranno linearmente dipendenti; e quindi o il punto sarà multiplo per la varietà Φ comune alle $\mathbf{F}$, oppure apparterrà ad una varietà, più che $r - h$ volte estesa, costituita da punti comuni alle $\mathbf{F}$. Questa osservazione prova che se le equazioni (1) hanno meno che ∞^{r-h} soluzioni, la varietà Φ comune alle $\mathbf{F}$ sarà precisamente di dimensione $r - h$ e non avrà parti multiple (3), potendo del resto possedere

(1) *A proof of Nöther's fundamental Theorem* (Math. Ann., Bd. 52, pag. 593 [1899]).

(2) Non adoperiamo, come si usa anche di fare, la parola *forma* per indicare l'insieme delle soluzioni di $F_1 = 0$, e analoghe, perchè *in questo lavoro* è utile non confondere la concezione della forma F_1, con la concezione della totalità de' suoi zeri.

(3) Ora e nel seguito parlando di *parte* di una varietà, s'intenderà di parlare di una varietà di *ugual dimensione*, in essa contenuta.

singolarità qualunque; e viceversa. Sicchè geometricamente le condizioni a cui sono assoggettate le F si traducono in ciò che *la varietà Φ è di dimensione $r - h$ e non ha parti multiple.*

2. Per rispondere alla domanda che abbiam fatto al numero precedente, ci occorreranno alcune nozioni sulla teoria dei moduli, e, per comodità del lettore, le riuniremo qui (1).

Si dice che un sistema illimitato di forme costituisce un *modulo* quando combinando linearmente un numero qualsiasi di forme del sistema si ottiene una forma di questo.

Si dimostra allora (2) che tra le forme di un modulo se ne può sempre trovare un numero finito $F_1, \ldots, F_h$, talchè ogni forma F del modulo possa esprimersi come combinazione lineare di quelle:

$$F \equiv A_1 F_1 + \ldots + A_h F_h .$$

Le forme $F_1, \ldots, F_h$ posson dirsi gli *elementi fondamentali* del modulo, che s'indicherà con $(F_1, F_2, \ldots, F_h)$.

Interpretando le variabili $x_0, \ldots, x_r$, delle quali le F son funzioni, come coordinate di punti in uno S_r, avremo le ipersuperficie $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ corrispondenti agli elementi fondamentali, e se c'è una varietà M comune alle **F** potrà chiamarsi la *varietà base* del modulo.

Considerando la totalità delle ipersuperficie passanti per M (3), verremo a considerare in corrispondenza un certo sistema di forme, il quale subito si scorge essere un modulo: bisogna però ben badare di non confondere questo modulo col modulo $(F_1, F_2, \ldots, F_h)$; ci saranno dei casi in cui i due moduli coincidono, ma è facile persuadersi sopra esempî, che non è sempre così.

Nella Memoria citata di Hilbert (4) si dimostra inoltre che il numero $\chi(l)$ delle condizioni indipendenti che s'impongono ad una forma d'ordine l (ai suoi coefficienti), obbligandola ad appartenere ad un certo modulo, se l è abbastanza grande, si rappresenta così:

$$\chi(l) = \chi_0 + \chi_1 \binom{l}{1} + \chi_2 \binom{l}{2} + \cdots + \chi_d \binom{l}{d},$$

ove $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_d$ sono certi numeri, indipendenti da l, caratteristici del modulo dato, del quale $\chi(l)$ si chiama la *funzione caratteristica.*

(1) Vedasi l'importante Memoria di Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* (Math. Ann., Bd. XXXVI, pag. 473 [1890]). Ivi si troveranno le citazioni relative ai lavori anteriori di Kronecker, Dedekind e Weber.

(2) Hilbert, loc. cit., pag. 479.

(3) Dicendo « ipersuperficie *passante* per M » intendiamo, come è d'uso nella geometria iperspaziale, alludere ad una ipersuperficie corrispondente ad una forma che si annulla in tutti i punti di M, senza che sia *necessariamente* soddisfatta qualche altra condizione circa l'annullarsi della forma stessa nei punti di M.

(4) Ved. a pag. 512.

3. La questione del n. 1 è risoluta dal teorema seguente:

Se le ipersuperficie $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ $(h \leq r)$ *corrispondenti alle forme* $F_1, \ldots, F_h$ *delle* $r+1$ *variabili* $x_0, \ldots, x_r$, *si tagliano in una varietà di dimensione* $r-h$, *priva di parti multiple, la condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie* $\mathbf{F}$ *corrisponda ad una forma* F *tale che*

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_h F_h ,$$

le $A_1, \ldots, A_h$ *essendo forme di convenienti ordini, è che* $\mathbf{F}$ *passi per la varietà comune ad* $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_h$ (1).

Insieme alla proposizione enunciata noi dimostreremo quest'altra:

La funzione caratteristica del modulo $(F_1, F_2 \ldots, F_h)$ *ove* $F_1, \ldots, F_h$ *sono* h $(\leq r)$ *forme (di* $r+1$ *variabili), rispettivamente degli ordini* $n_1, n_2, \ldots, n_h$, *alle quali corrispondono le ipersuperficie* $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ *intersecantesi secondo una varietà* $r-h$ *volte estesa e priva di parti multiple, è:*

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} +$$
$$+ \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + (-1)^h \binom{l-n_1-\cdots-n_h+r}{r}$$

ove i sommatorî s'estendono alle combinazioni semplici di $1^a, 2^a, \ldots (h-1)^a$ *classe degli indici* $1, 2, \ldots, h$ (2).

La dimostrazione delle due proposizioni antecedenti si farà simultaneamente e per induzione completa. Si osservi che l'un teorema e l'altro sono veri quando $h = 1$; perciò li avremo dimostrati in ogni caso quando, ammettendoli veri per $h-1$ forme, di un numero qualsiasi di variabili, riusciremo a dimostrarli anche per h forme.

(1) Nella Memoria di Hilbert, *Ueber die vollen Invariantensysteme* (Math. Annalen, Bd. 42 [1892], ved. a pag. 320), si dimostra un teorema di cui è caso particolare il seguente: *Se una forma* F *di* $x_0, x_1, \ldots, x_r$ *si annulla per gli stessi valori delle* x *per i quali si annullano simultaneamente le forme* $F_1, \ldots, F_h$ *delle medesime variabili, si può sempre determinare un numero intero* s *tale che* $F^s \equiv A_1 F_1 + \cdot + A_h F_h$.

Nella Nota, di poco anteriore, del prof. Bertini, *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2), t. XXIV [1891]) il numero s, di cui parla il teorema precedente, è determinato quando $h = 2$ e F, F_1, F_2 son forme ternarie. Il teorema da noi dato nel testo dice che quando $h \leq r$ e le equazioni $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0$ passano per meno che ∞^{r-h} zeri di $F_1, \ldots, F_h$, il numero s di Hilbert è uguale ad 1.

(2) Nella Memoria di Wirtinger, *Untersuchungen über Thetafunctionen*, Leipzig, Teubner 1895, a pag. 20, trovasi una formola che esprime la funzione caratteristica della intersezione di una varietà, di data funzione caratteristica, con un certo numero di forme generiche. Ma la dimostrazione della formola suddetta mi sembra in qualche punto dubbia, sicchè non ne ho fatto uso.

4. Le ipersuperficie $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, e di equazioni $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ s'intersechino secondo la varietà Φ, ad $r - h$ dimensioni, e senza parti multiple.

Una ipersuperficie $\mathbf{F}$, d'ordine l, insieme ad un iperpiano che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple, corrisponda ad una forma appartenente al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$; allora io dico che anche *la forma* F, *corrispondente a* $\mathbf{F}$, *appartiene a questo modulo.*

Supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sia generico in guisa che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple; per ipotesi la forma $x_0 F$ apparterrà allora al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, ossia avremo:

$$x_0 F \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h , \tag{1}$$

donde:

$$A_1(0, x_1, \ldots, x_r) F_1(0, x_1, \ldots, x_r) + \ldots + A_h(0, x_1, \ldots, x_r) F_h(0, x_1, \ldots, x_r) \equiv 0 ,$$

dalla quale rilevasi che alla forma $A_1(0, x_1, \ldots, x_r) F_1(0, x_1, \ldots, x_r)$ corrisponderà una ipersuperficie passante per la M_{r-h}, *senza parti multiple,* comune alle ipersuperficie, che nell' iperpiano $x_0 = 0$, son determinate dalle forme $F_2, \ldots, F_h$, delle quali (al pari della F_1) nessuna, nelle nostre ipotesi, si annulla identicamente ponendovi $x_0 = 0$. Siccome la sezione di F_1 con $x_0 = 0$ non passa per la suddetta M_{r-h}, chè altrimenti $x_0 = 0$ secherebbe Φ secondo una varietà più che $r - h - 1$ volte estesa, dovrà l'ipersuperficie corrispondente ad $A_1(0, x_1, \ldots, x_r)$ passare per la M_{r-h} più volte nominata; e, pel teorema ammesso per $h - 1$ forme, sarà:

$A_1(0, x_1, \ldots, x_r) \equiv B_2(x_1, \ldots, x_r) F_2(0, x_1, \ldots, x_r) + \cdots + B_h(x_1, \ldots, x_r) F_h(0, x_1, \ldots, x_r)$,
ossia:

$$A_1(x_0, x_1 \ldots, x_r) \equiv B_2(x_1, \ldots, x_r) F_2(x_0, x_1, \ldots x_r) + \cdots + B_h(x_1, \ldots, x_r) F_h(x_0, \ldots, x_r) + x_0 A_1'(x_0, \ldots, x_r) .$$

Sostituendo nella (1), verrà:

$$x_0 F \equiv x_0 A_1' F_1 + (A_2 + B_2 F_1) F_2 + \cdots + (A_h + B_h F_1) F_h ,$$

la quale prova che la ipersuperficie corrispondente alla forma $x_0 (F - A_1' F_1)$ passa per la M_{r-h+1}, *priva di parti multiple*, comune a $\mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_h$. Siccome $x_0 = 0$ non passa per la M_{r-h+1} suddetta, ci passerà l'ipersuperficie di equazione $F - A_1' F_1 = 0$, ossia, sempre pel teorema ammesso per $h - 1$ forme, $F - A_1' F_1$ apparterrà al modulo $(F_2, \ldots, F_h)$:

$$F - A_1' F_1 \equiv A_2' F_2 + \cdots + A_h' F_h ,$$

donde:

$$F \equiv A_1' F_1 + A_2' F_2 + \ldots + A_h' F_h ,$$

che dimostra quanto abbiamo enunciato al principio di questo numero.

5. Per l'ipotesi fatta sulla Φ, comune a $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$, le $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_{h-1}$, come già abbiamo osservato, s'intersecheranno secondo una varietà ψ, ad $r-h+1$ dimensioni, priva di parti multiple.

Il modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, di cui indichiamo con $\chi_1(l)$ la funzione caratteristica, è il « *grösste gemeinsame Modul* » [1] rispetto ai due moduli (F_h) e $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, dei quali sono $\binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}$ e $\chi(l)$ rispettivamente le funzioni caratteristiche. Il « *kleinste enthaltende Modul* » dei due (F_h) e $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, ossia il sistema delle forme appartenenti contemporaneamente ai moduli suddetti, è costituito dalle forme B tali che:

$$B \equiv A_h F_h \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_{h-1} F_{h-1} .$$

Ad ogni tal forma B risponderà una ipersuperficie $\mathbf{B}$ passante per ψ; e siccome la ipersuperficie $\mathbf{F}_h$ non passa per ψ, dovrà la $\mathbf{A}_h$ passare per ψ, e *quindi*, pel teorema ammesso per $h-1$ forme, sarà A_h del modulo $(F_1, .., F_{h-1})$; ossia il kleinste enthaltende Modul, del quale parlavamo, è, nelle nostre ipotesi $(F_1 F_h, \ldots, F_{h-1} F_h)$. Una forma d'ordine l di questo modulo dipende da tante costanti quante sono quelle contenute in una forma d'ordine $l - n_h$ del modulo $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, sicchè la funzione caratteristica del modulo suddetto è $\chi(l-n_h) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}$.

Applicando la relazione fondamentale di Hilbert (pag. 519), avremo:

$$\chi(l) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r} = \chi_1(l) + \chi(l-n_h) + \\ + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r},$$

donde, in virtù della espressione ammessa per $\chi(l)$, si trae:

$$\chi_1(l) = \binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + \\ + (-1)^h \binom{l-n_1-\ldots-n_h+r}{r},$$

ove i sommatorî si estendono alle combinazioni semplici di 1^a, 2^a, $\ldots$, $(h-1)^a$ classe degli indici $1, 2, \ldots h$.

6. Suppongasi $r = h$. In tal caso è facile vedere che se nella $\chi_1(l)$ si pone una qualunque delle n uguale a 0, i termini si elidono a due a due, e si ha $\chi_1(l) = 0$. Siccome $\chi_1(l)$ è funzione intera di grado h nelle $n_1, n_2, \ldots, n_h$, si deduce $\chi_1(l) = C n_1 n_2 \ldots n_h$, essendo C indipendente da $n_1, \ldots, n_h$. Esa-

[1] Hilbert, loc. cit., pag. 517.

minando poi l'espressione trovata di $\chi(l)$ si vede che in essa il coefficiente di $n_1 \dots n_h$ è 1. Dunque:

$$\chi_1(l) = n_1 n_2 \dots n_h .$$

Ciò posto, nelle ipotesi nostre, le ipersuperficie $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_h$ si tagliano in $n_1 n_2 \dots n_h$ punti P tutti distinti. Questi punti alle ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \dots n_h - 1$ obbligate a contenerli, impongono $n_1 n_2 \dots n_h$ condizioni semplici, perchè è possibile costruire una ipersuperficie d'ordine l per $n_1 n_2 \dots n_h - 1$ punti P e non pel rimanente; p. e. mediante $n_1 n_2 \dots n_h - 1$ iperpiani per altrettanti punti P e una ipersuperficie generica d'ordine $l - n_1 \dots n_h + 1$.

Sicchè le ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \dots n_h - 1$ passanti pei P, formano un sistema lineare di dimensione

$$\binom{l+h}{h} - 1 - n_1 n_2 \dots n_h ;$$

cioè un sistema così esteso come il sistema delle ipersuperficie, pure passanti pei P, che corrispondono a forme d'ordine l, abbastanza alto, appartenenti al modulo $(F_1, \dots, F_h)$. Ne segue che ogni forma $F(x_0, x_1, \dots, x_r)$ d'ordine $l \geq N$, ove N è un conveniente limite, passante per gli $n_1 n_2 \dots n_h$ zeri, tutti distinti, comuni alle forme $F_1(x_0, x_1, \dots, x_r), \dots, F_h(x_0, x_1, \dots, x_r)$, appartiene al modulo $(F_1, \dots, F_h)$ [1].

Se F è una forma d'ordine $N - 1$ passante per gli zeri comuni a $F_1, \dots, F_h$, considerandola insieme ad una forma lineare generica, avremo una forma d'ordine N passante per gli zeri comuni a $F_1, \dots, F_h$, e quindi appartenente al modulo $(F_1, \dots, F_h)$. Ma allora per la proposizione del n. 4 anche F apparterrà a questo modulo. Analogamente dalle forme di ordine $N - 1$ si passa a quelle di ordine $N - 2$, etc. Onde si può enunciare:

Ogni forma $F(x_0, \dots, x_r)$ *passante per gli* $n_1 n_2 \dots n_h$ *zeri, tutti distinti, comuni alle forme* $F_1, \dots, F_h$, *è del modulo* $(F_1, \dots, F_h)$.

7. Infine, sia $r = h + k$ $(k \geq 1)$, e supponiamo di aver dimostrato che se h forme delle r variabili $x_1, \dots, x_r$, corrispondono ad altrettante ipersuperficie che si secano secondo una M_{r-h-1} priva di parti multiple, ogni forma di $x_1, \dots, x_r$, corrispondente a una ipersuperficie per questa M_{r-h-1}, appartiene al modulo delle h forme primitive; il che (grazie alla proposizione ammessa per $h - 1$ forme) si è dimostrato quando $k = 1$, al numero precedente.

Le ipersuperficie $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_h$ di ordini $n_1, \dots, n_h$, corrispondenti alle forme $F_1, \dots, F_h$, si sechino secondo una varietà Φ di dimensione $r - h$,

[1] Questo ragionamento è analogo a quello fatto dalla Scott (loc. cit.), nel caso di due forme ternarie.

priva di parti multiple, e supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sechi Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple. Se $\mathbf{F}$ è una ipersuperficie, di ordine l, passante per Φ, considerando le sezioni di $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ con $x_0 = 0$ si potrà scrivere, nelle nostre ipotesi,

$$F(0, x_1, \ldots, x_r) \equiv A_1(x_1, \ldots, x_r) F_1(0, x_1, \ldots, x_r) + \cdots + A_h(x_1, \ldots, x_r) F_h(0, x_1, \ldots, x_r),$$

donde:

$$F(x_0, \ldots, x_r) \equiv A_1(x_1, \ldots, x_r) F_1(x_0, x_1, \ldots, x_r) + \cdots + A_h(x_1, \ldots, x_r) F_h(x_0, x_1, \ldots, x_r) + x_0 F'(x_0, x_1, \ldots, x_r),$$

la quale mostra che la ipersuperficie $\mathbf{F}'$, di ordine $l-1$, passa per Φ.

Se $l = m$, essendo m l'ordine minimo delle ipersuperficie passanti per Φ, dovrà dunque essere $F' \equiv 0$; se poi $l = m + q\ (q > 0)$, ragionando su $\mathbf{F}'$ come su $\mathbf{F}$, e così di seguito, avremo una successione di forme $F, F', F'', \ldots$, corrispondenti ad altrettante ipersuperficie passanti per Φ, e di ordini decrescenti, di una unità alla volta. Al più questa successione di forme si spingerà fino alla forma $F^{(q)}$, giacchè la forma successiva $F^{(q+1)}$, per essere di ordine $m-1$, sarà identicamente nulla. Ne viene che $F^{(q)}, \ldots, F'', F', F$ apparterranno al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$.

I teoremi enunciati al n. 3 risultano così pienamente dimostrati.

8. Una conseguenza immediata del primo di questi teoremi è che il modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, quando le forme F_i corrispondano ad h ipersuperficie che si taglino secondo una varietà Φ_{r-h}, priva di parti multiple, coincide col modulo delle forme a cui corrispondono ipersuperficie per Φ.

Dunque pel secondo dei teoremi del n. 3 abbiamo:

La postulazione di una varietà Φ_{r-h}, priva di parti multiple, ma avente singolarità qualsiasi, che sia completa intersezione di h ipersuperficie di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, per le ipersuperficie di ordine l abbastanza alto, è espressa da

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + (-1)^h \binom{l-n_1-\ldots-n_h+r}{r},$$

i sommatorî essendo estesi come al n. 3.

Osservazioni sul caso di due forme.

9. Il caso di due forme si può trattare particolarizzando i ragionamenti fatti in generale, per una via del tutto elementare, senza neppure ricorrere alla teoria dei moduli. Basta osservare che, nel caso di due forme, la dimostrazione dell'esistenza della funzione caratteristica $\chi(l)$ del modulo (F_1, F_2)

e il calcolo effettivo di essa, si posson condurre molto semplicemente, partendosi dall'ipotesi (più larga di quella che abbiam fatto nel caso generale di un numero qualsiasi di forme) che le due forme non abbiano *fattori comuni*; giacchè allora se una forma F, d'ordine l, è del modulo (F_1, F_2), ossia se

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2$$

ogni altra rappresentazione della F, quando $l \geq n_1 + n_2$, è data dalla identità:

$$F \equiv (A_1 + XF_2) F_1 + (A_2 - XF_1) F_2,$$

ove X è una forma arbitraria di ordine $l - n_1 - n_2$; sicchè il numero delle costanti indipendenti che determinano F, si ottiene togliendo dalla somma dei numeri di costanti che compaiono in A_1 e in A_2, il numero delle costanti che compaiono in X; e quindi:

$$\chi(l) = \binom{l+r}{r} - \left[\binom{l-n_1+r}{r} + \binom{l-n_2+r}{r} - \binom{l-n_1-n_2+r}{r}\right].$$

Il ragionamento del n. 6, nel caso di due forme, ci dà facilmente la dimostrazione della rappresentabilità di una forma ternaria, che passi per gli zeri comuni a due altre, come combinazione lineare di queste, non solo nella ipotesi che le ultime due forme abbian comuni zeri tutti distinti, ma anche nelle ipotesi più generali di Nöther. E infine il ragionamento del n. 7 permette di risalire dal caso di due forme ternarie, al caso di Nöther per due forme qualunque (1).

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali.* Nota del dott. Guido Fubini, presentata dal Socio Dini.

La teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali, non appartenenti alla classe di Fuchs, presenta molte difficoltà, perchè certi elementi, algebrici per le equazioni di Fuchs, sono trascendenti per quelle. Lo scopo, che io ora mi propongo in questa Nota, è di far vedere come lo studio delle equazioni non di Fuchs, possa per certi lati essere immaginato come lo studio di un caso limite delle equazioni di Fuchs. Il metodo consiste nel

(1) Nella *Théorie des fonctions algébriques des deux variables indépendantes* di Picard et Simart, alla pag. 17 del t. II, si estende alle forme quaternarie il *Fundamentalsatz*, deducendolo dall'analogo per le forme ternarie, con un procedimento che si può ripetere per *due* forme qualunque. Ma questo procedimento non è certo più semplice di quello che ci dà in tal caso il ragionamento del n. 7, nè si può estendere facilmente al caso di un numero *qualsiasi* di forme.

far sovrapporre i punti singolari di un'equazione Fuchsiana. Noi sappiamo infatti che un'equazione

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$$

a coefficienti razionali è o non è appartenente alla classe di Fuchs, secondo che l'ordine di polarità di p_k nei varî punti singolari per l'equazione non supera, o supera il numero k (supposto il punto all'infinito punto non singolare). Ed è ben chiaro che se questo limite fosse superato p. es. in un punto A, noi potremo immaginare che si sia arrivato ad esso, facendo sovrapporre parecchi punti singolari, in cui questi limiti non erano superati. Mi spiegherò con un esempio.

L'equazione:

$$(\alpha) \qquad y'' + \frac{m}{(x-b)^2(x-c)^2} y' + \frac{n}{(x-b)^6(x-c)^4} y = 0$$

dove m, n, b, c sono costanti si può immaginare dedotta dalla:

$$(\beta) \qquad y'' + \frac{m}{(x-b)(x-\beta)(x-c)(x-\gamma)} y' + \frac{n}{(x-b)^2(x-\beta)^2(x-l)^2(x-c)^2(x-\gamma)^2} y = 0$$

facendo tendere i punti β ed l verso il punto b fino a sovrapporsi a esso, e facendo quindi tendere il punto γ verso il punto c fino a sovrapporsi a c. E si osserva che, mentre la (β) è della classe di Fuchs, la (α) non appartiene alla classe delle equazioni Fuchsiane.

In generale noi stabiliremo il seguente teorema:

Per stabilire la sostituzione lineare che un sistema di integrali della (1) *subisce in un punto* A *singolare non di Fuchs dell'equazione, in cui però le* p_i *non hanno singolarità essenziali e sono monodrome, basterà, nel modo precisato sostituire alla* (1) *un'altra equazione che in luogo del punto singolare* A *abbia altri punti singolari* B, B′ ... *di Fuchs, studiare per questa l'effetto di un giro attorno i punti* B, B′ ..... *e passare quindi al limite facendo coincidere i punti* B, B′ .....

E se le p_i non hanno singolarità essenziali, ossia sono razionali, si potrà ripetere questo procedimento per (1) in tutti i punti singolari non di Fuchs.

Per dimostrare questo teorema, basterà chiaramente dimostrare il lemma seguente:

Sia

$$(2) \qquad y^{(n)} + \frac{l_1(x)}{(x-a)^{p_1}(x-b)^{q_1}} y^{(n-1)} + \frac{l_2(x)}{(x-a)^{p_2}(x-b)^{q_2}} y^{(n-2)} + \ldots = 0$$

un'equazione lineare a derivate ordinarie; e siano $l_1(x)$, $l_2(x)$, ... *fun-*

zioni razionali di x, regolari nei punti a, b e indipendenti da b. La sostituzione Σ *fondamentale che un sistema di integrali subisce per un giro* C *chiuso, finito, non intrecciantesi attorno ai punti $x = a$, $x = b$ e a nessun altro punto singolare della* (2) *tende a un limite, quando b tende ad a è precisamente alla sostituzione* T *fondamentale per l'equazione*

$$(3)\quad y^{(n)} + \frac{l_1}{(x-a)^{p_1+q_1}} y^{(n-1)} + \ldots = 0$$

dovuta a un giro semplice, finito attorno il punto $x = a$ e a nessun altro punto singolare della (3).

La dimostrazione di questo teorema si compie nel modo più semplice per mezzo delle seguenti considerazioni:

I) La sostituzione Σ dovuta al giro C si può anche immaginare come dovuta a un giro attorno a tutti gli altri punti singolari eventuali della (2).

II) Questa sostituzione si può immaginare come prodotto delle sostituzioni dovute ai cappî attorno a ciascuno degli altri punti singolari eventuali, supposti in numero finito.

III) Basterà, per dimostrare il nostro teorema, far vedere che la sostituzione dovuta a uno di questi cappî relativa alla (2), diventa al limite una sostituzione dovuta allo stesso cappio, relativa alla (3).

Dimostriamo dunque quest'ultima asserzione. Per far questo ricorriamo al metodo del prolungamento analitico, che immagineremo proprio eseguito al modo di Weierstrass.

Cioè immagineremo lungo il cappio distribuiti dei cerchietti Γ, in numero finito, non includenti punti singolari della (3) in modo che due cerchietti consecutivi abbiano una parte comune. E di più li sceglieremo in modo che mentre b si avvicina ad a, almeno da un certo punto in poi non includano neppure punti singolari della (2).

Pensiamo gli integrali come funzioni delle variabili x, b. E sia $x = \mathrm{K}$ il centro di uno dei nostri cerchietti. Il punto $x = \mathrm{K}$, $b = a$ è un punto di regolarità per i coefficienti della nostra equazione; quindi, per noti teoremi, noi potremo segnare attorno ad a nel piano complesso di b un intorno Γ' tale che per x variabile nel cerchietto di centro K e per b variabile in Γ', gli integrali siano olomorfi in x, e b. Anzi, poichè i cerchietti Γ sono in numero finito, potremo costruire un intorno Γ' che valga per tutti questi cerchietti. E allora si deduce senz'altro che poichè i coefficienti della sostituzione si deducono dai valori dei detti integrali (a Wronskiano non nullo) e delle loro derivate, essi saranno funzioni analitiche regolari di b nell'intorno Γ'. È perciò lecito il succitato passaggio al limite.

Queste considerazioni, che per maggiore chiarezza abbiamo applicato ai varî cappî, si potevano del resto anche applicare direttamente al giro C.

Sia ora un'equazione con più punti singolari $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n)}$ (1). Sdoppiamo ciascuno di essi nel modo descritto in più punti singolari di Fuchs, e siano $A_0^{(k)}\ A_1^{(k)} \ldots A_{t_k}^{(k)}$ i punti singolari cui ha dato origine il punto $A_0^{(k)}$ (per $k = 1, 2, \ldots n$) dove t_k è un numero intero nullo o positivo. Immaginiamo i valori della variabile complessa in tutti questi nuovi punti singolari funzioni, p. es. lineari, di un parametro ε, tali che per $\varepsilon = 0$ ciascun punto $A_r^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots n$; $r = 1, 2, \ldots t_k$) venga a cadere nel punto $A_0^{(k)}$. Facciamo un giro semplice C attorno ai punti $A_0^{(i)}\ A_1^{(i)} \ldots A_{t_i}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots m$; $m < n$). Le stesse considerazioni precedenti applicate senza altro al cammino C, che noi naturalmente supponiamo a distanza finita da $A_0^{(i)}$, dimostrano che i coefficienti della sostituzione dovuta al giro C, sono olomorfi nella ε in un piccolo intorno di $\varepsilon = 0$ nel piano complesso di ε. È dunque lecito il passaggio al limite per $\varepsilon = 0$, cosicchè l'effetto dovuto al giro attorno ai punti singolari $A_0^{(i)}$ dell'equazione iniziale si può immaginare come caso limite di quello dovuto al giro attorno ai punti $A_0^{(i)}, A_1^{(i)} \ldots A_{t_i}^{(i)}$ dell'equazione trasformata. Dunque:

Un'equazione differenziale lineare ordinaria a punti singolari di Fuchs si può, per quanto riguarda le sostituzioni che subiscono gli integrali attorno ai punti critici, immaginare limite di un'equazione a soli punti singolari di Fuchs.

Questi teoremi, che mi sembrano notevoli dal punto di vista teorico, hanno anche il vantaggio di potere con un nuovo metodo calcolare la sostituzione dovuta ad un giro attorno a uno o più punti singolari A, nel caso che l'equazione sia a coefficienti razionali. Basta infatti a una tale equazione sostituire nel modo descritto un'equazione a soli punti Fuchsiani singolari e calcolare, per es. col metodo di Fuchs, l'effetto dovuto a un giro per gli integrali di quest'ultima attorno ai punti A e a quei nuovi punti singolari, che si devono poi far tendere ai punti A stessi. Un semplice passaggio al limite, ci darà allora la sostituzione cercata. Questo metodo, che praticameute è certo complicato, non usa però alcun algoritmo di determinanti infiniti o di rappresentazioni conformi.

Fisica terrestre. — *Sopra un sismografo per forti terremoti.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio P. Tacchini.

Dopo aver pubblicato in questi stessi Rendiconti la descrizione di svariati apparecchi sismici, quali più quali meno sensibili, sia per la semplice indicazione delle scosse di terremoto (*sismoscopî*), sia per la misura dell'effettivo movimento del suolo provocato dalle medesime (*sismometrografi*), credo di qualche interesse far conoscere un nuovo strumento, destinato allo

(1) In cui i coefficienti abbiano sole singolarità polari.

studio delle perturbazioni sismiche d' una certa forza, in occasione delle quali possono diventare insufficienti gli altri strumenti di maggiore sensibilità. Di ciò abbiamo avuta ampia prova negli ultimi anni, in occasione d' alcuni terremoti piuttosto sensibili avvenuti nel Lazio, i quali riuscirono con facilità a mettere fuori d' azione tanto gli strumenti esistenti all' Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, quanto quelli collocati nella Stazione sismica sperimentale di Roma, presso l' Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica.

Il nuovo strumento è stato denominato *macrosismometrografo* in contrapposto al titolo di *microsismometrografo*, da me dato ad altro apparecchio assai più delicato, già fatto conoscere all'Accademia e destinato, invece, ai minimi movimenti del suolo (1). Prima che ancora fosse costruito, pubblicai fin dal 1900 una breve Nota, nella quale esposi per sommi capi i criterî a' quali doveva ispirarsi la sua costruzione (2). Ed ora che lo strumento è stato effettivamente costruito, grazie ai mezzi messi a mia disposizione dal prof. L. Palazzo, il nuovo direttore dell' Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, ed è stato installato fin dal settembre 1901 nel R. Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, stimo opportuno di darne qui un breve cenno, riserbandomi di darne una descrizione completa in una Memoria, corredata da figure, che sarà prossimamente pubblicata nel vol. VII del Bollettino della Società Sismologica Italiana.

Per uno studio rigoroso dei terremoti, è bene che in ogni località il movimento del suolo sia risoluto secondo tre componenti ad angolo retto tra loro, e precisamente due orizzontali ed una verticale. Per la registrazione delle due prime io ho adottato due piccoli pendoli orizzontali, impiantati ad angolo retto, l' uno per rapporto all' altro, sopra una solida base quadrata in ghisa. La sospensione di detti pendoli assomiglia assai a quella del *Braket Seismometer* dell'Ewing ed è costruita in guisa che i pendoli non debbono tralasciare di ben funzionare, anche in presenza di poderosi scuotimenti impressi alla loro base. Dall' asse di rotazione verticale di ogni pendolo, dell' altezza di circa 25^{cm}, partono, sotto un angolo di 45°, due sbarre di ferro orizzontali, lunghe 40^{cm} e collegate tra loro: l' una di sezione quadrata, sulla quale può scorrere un cilindro di piombo del peso di circa kg. $1\ ^1/_2$; l' altra di sezione rettangolare che funge da stilo scrivente e che termina con un ago alla sua estremità. La disposizione dei due pendoli è tale che quando le due sbarre quadrangolari fanno tra loro un angolo di 90°, le altre due risultano parallele

(1) G. Agamennone, *Nuovo tipo di sismometrografo*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol, IX, pag. 31, seduta del 15 luglio 1900. — Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VI, 1900-1901, pag. 71. — Id., *Il microsismometrografo a tre componenti*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. X, pag. 291, seduta del 21 aprile 1901. — Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VII, 1901-1902, pag. 70.

(2) *Sismometrografo a tre componenti per forti terremoti*. Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VI (1900-1901), pag. 135.

tra loro e ad una distanza di 12^{cm}, quanta appunto ne corre tra gli assi di rotazione dei pendoli. Ogni asse di rotazione è bilicato, in basso, sopra una punta fissa, e può essere spostato, in alto, in due direzioni ortogonali tra loro, mediante due viti di registro, allo scopo di rendere paralleli i due stili scriventi, come pure d'inclinare convenientemente gli stessi assi di rotazione, affinchè si possa far variare a piacere il periodo oscillatorio delle masse di piombo.

Nel modello di Rocca di Papa il tempo, impiegato da ogni pendolo a compiere un'oscillazione semplice, è di 4^{s}, quale appunto si avrebbe da un pendolo verticale di ben 16 metri. Questo periodo è già abbastanza lento, per permettere di poter sceverare con facilità le oscillazioni strumentali dai veri moti del suolo, i quali sono generalmente piuttosto rapidi nei terremoti locali, od in quelli d'origine relativamente vicina. Quando le masse di piombo sono fissate all'estremità delle rispettive sbarre quadrangolari, e cioè alla stessa distanza (40^{cm}) a cui trovansi gli aghi scriventi dall'asse di rotazione, è ovvio come non possa aversi alcuna moltiplicazione nelle indicazioni dello strumento. Facendo però scorrere le masse indietro, e cioè avvicinandole all'asse di rotazione del pendolo, l'ingrandimento va crescendo poco a poco; e quando le masse siano fissate giusto alla metà di dette sbarre, ciò che costituisce l'estremo limite della loro corsa, l'ingrandimento raggiunge il valore massimo di 1 a 2.

Per la registrazione della componente verticale, avuto riguardo ai maggiori attriti, è stata adottata una massa di piombo alquanto più grande (2 kg.), sospesa a quattro saltaleoni d'acciaio mediante il sistema *Ewing*, nello stesso modo appunto adoperato per la componente verticale del *microsismometrografo*, sopra ricordato. Tutto il meccanismo è stato poi disposto in tal guisa, in mezzo ai due pendoli orizzontali sopra descritti, che mediante opportune compenetrazioni si è realizzata una grande economia di spazio e si è potuto dare all'intero apparato una forma abbastanza semplice e razionale. I quattro saltaleoni, d'ugual lunghezza e paralleli tra loro, pendono da una colonna fissata sulla stessa piattaforma, dove sono imperniate le estremità superiori degli assi di rotazione dei pendoli orizzontali, e sorreggono, in basso, il telaio che posteriormente ruota attorno ad un asse orizzontale, consimile a quello dei pendoli anzidetti, e termina davanti pure con una sbarra quadrangolare, sulla quale si fa scorrere la massa di piombo di 2 kg. I movimenti poi del telaio, dall'alto in basso e viceversa, sono trasformati, mediante una leva codata a bracci uguali, in movimenti in senso orizzontale d'uno stilo, lungo pure 40^{cm} e che risulta parallelo ed intermedio agli altri due, destinati alle componenti orizzontali; ma questo terzo stilo resta alquanto più basso e spostato di poco indietro, affinchè ne' suoi movimenti non possa urtare gli altri due. Anche qui non mancano le viti di rettifica per regolare il periodo oscillatorio di questa terza massa, il quale può essere con facilità reso uguale a quello di 4^{s},

con cui oscillano ambo i pendoli orizzontali. Inoltre, col fare scorrere in avanti od indietro questa terza massa sulla rispettiva sbarra quadrangolare, si riesce a far variare l'ingrandimento per la componente verticale, e precisamente entro gli stessi limiti, già fatti conoscere per le componenti orizzontali.

La registrazione delle tre componenti si compie, mediante tre piccoli aghi verticali, scorrevoli entro convenienti guide, sopra una zona di carta laccata affumicata, chiusa in sè stessa, larga 25^{cm} e lunga circa $3\ ^1/_2$ metri. Quest'ultima sta a cavalcioni sopra un cilindro d'ottone, lungo 30^{cm} e del diametro di 20^{cm}, il quale riposa, con l'asse disposto orizzontalmente, sopra due cosciali robusti, fissati a due bracci in ferro e sporgenti dalla parte anteriore della base dello strumento. L'asse del cilindro termina da una parte con una ruota dentata, la quale ingrana con un rocchetto d'un semplice meccanismo d'orologeria, fissato ad uno degli anzidetti cosciali, e dal lato opposto termina con una carrucola, sulla quale si avvolge un cordoncino. Quando a quest'ultimo si attacchi un conveniente peso, il cilindro si pone tosto in rapida rotazione, nella ragione d'una trentina di metri all'ora, velocità questa sufficiente per mettere non solo in evidenza tutte le particolarità d'un sismogramma, per quanto complicato, ma per fare una buona analisi del moto del suolo, anche se abbastanza rapido. Ad ogni modo, se si credesse opportuno d'accrescere ancora di più la velocità della carta, non si avrebbe che da aumentare il peso motore.

Il cilindro è destinato ad entrare in rotazione soltanto in occasione d'una scossa piuttosto sensibile, in seguito al funzionare d'uno qualunque d'una serie di sismoscopî, non troppo delicati, capaci di lasciar libera la ventola del meccanismo l'orologeria, sia agendo elettricamente per l'intermediario d'un piccolo elettromagnete, sia in modo meccanico. Considerando che i forti terremoti sono piuttosto rarî per una data località, si capisce come non sarebbe stato conveniente l'adottare pel nuovo strumento la registrazione continua, come pure di far uso di sismoscopî estremamente sensibili i quali, al verificarsi anche di scosse minime, pongano in moto la zona affumicata senza speranza che gli stili dello strumento vi possano tracciar sopra altro che linee rette. Una volta che la zona affumicata ha cominciato a scorrere, può restare in movimento, senza che i tracciati si sovrappongano, per circa 7-8 minuti, tempo questo più che sufficiente per registrare completamente qualsiasi scossa, anche se di straordinaria durata. Anzi, potrà avvenire che si registri sulla stessa zona anche qualche scossa secondaria che, a pochissimi minuti di distanza, preceda o segua quella principale. Ad impedire poi che lo stesso tratto di zona passi due volte sotto gli aghi scriventi, basta regolare la lunghezza del cordoncino avvolto alla carrucola, che è fissata all'asse del cilindro motore; per modo che tagliando poi la zona in un punto intermedio al principio ed alla fine del sismogramma, si possa ottenere quest'ultimo tutto per intero ed aver così agio di poterlo studiare con maggiore facilità e senza aver bisogno di

doverlo ricopiare. Per raggiungere ancor meglio questo scopo, gli aghi scriventi, relativi alle componenti orizzontali, toccano il cilindro sulla stessa generatrice, in guisa che non vi è nemmeno bisogno di conoscere la così detta *parallasse*; e per conseguenza si può benissimo fare a meno di copiare il sismogramma, come si suol fare comunemente, spostando il tracciato d'una componente per rapporto all'altra, per correggere l'errore della *parallasse* e poi procedere alla ricomposizione del moto effettivo del suolo. Evidentemente, con la predetta disposizione resta diminuita la corsa degli aghi scriventi, relativi alle componenti orizzontali, non potendo l'uno passare al di sopra od al di sotto dell'altro; ma convien riflettere che ogni ago può muoversi per ben 6^{cm} al di qua ed al di là della sua posizione di riposo, e che il massimo ingrandimento, consentito dall'apparecchio, non supera quello di 1 a 2. Ad ogni modo, per prevenire che gli stili per le componenti orizzontali possano urtarsi tra loro, od uscire dalla zona affumicata, in caso di terremoti di straordinaria intensità, è prudente di porre opportuni ostacoli laterali alle masse dei pendoli orizzontali.

Allo scopo di segnare il tempo, è stata fissata sopra lo stesso meccanismo d'orologeria una piccola elettro-calamita, la cui àncora fa muovere, sul bordo corrispondente della carta, un quarto ago che scrive in modo identico a quelli dei tre stili e, mediante apposite viti di registro, può essere allineato con i due aghi relativi alle componenti orizzontali, in modo che anche qui non si abbia da tenere conto alcuno della così detta *parallasse*. Questa elettro-calamita è collegata ad un cronometro, che stabilisce un brevissimo contatto elettrico ad ogni secondo ed un altro, un po' meno breve, ad ogni minuto. Si è così in grado di poter conoscere l'ora esattissima d'ogni parte del sismogramma, quando siasi potuto riconoscere il primo minuto, segnato sulla zona di carta già in movimento, e ciò grazie ad un orologio sismoscopicò che si pone in marcia all'istante stesso in cui comincia a ruotare il cilindro motore, in seguito al funzionamento di uno qualunque dei sismoscopî. Affinchè poi questo quarto ago, destinato alla misura del tempo, non debba agire inutilmente — scrivendo sulla zona di carta quando quest'ultima è ferma — e possa quindi a lungo andare perfino lacerarla nel punto ove la sfrega, è stato disposto, mediante un semplice interruttore, che la corrente lanciata dal cronometro non cominci a passare per l'elettro-calamita che solo al funzionare dei sismoscopî.

Fino ad oggi non si è verificato ancora a Rocca di Papa alcun terremoto un po' intenso, tale da mettere a prova il nuovo strumento, e da ottenerne un sismogramma per quanto di menoma importanza. Veramente il macrosismometrografo ha funzionato già due volte, e cioè il 15 ottobre 1901, in occasione d'una scossa abbastanza sensibile negli Abruzzi, e di nuovo il 16 dicembre dello stesso anno, in seguito ad una moderata perturbazione sismica nell'Umbria; ma, com'era da aspettarsi, tutt'e due le volte gli stili

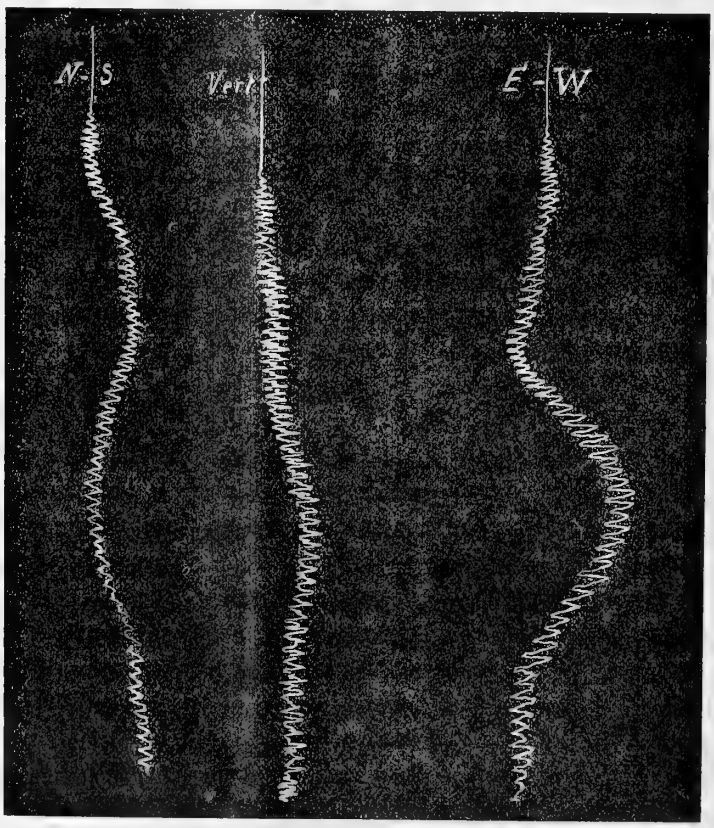
non lasciarono altro che linee rette, in quanto che le onde sismiche che passarono sul Lazio furono di sì poca entità da non essere menomamente avvertite dagli abitanti. In entrambe le volte tuttavia ebbe a constatarsi il buon funzionamento dello strumento e la registrazione esatta dei minuti e dei secondi sulla zona affumicata.

In mancanza di forti terremoti che fortunatamente non sono frequenti, ho voluto però rendermi conto del modo di funzionare del macrosismometrografo, prima ancora che fosse definitivamente installato all'Osservatorio di Rocca di Papa. A tal fine lo si collocò sopra una tavola quadrata sospesa, ai quattro angoli, a quattro robusti e corti saltaleoni in acciaio verticali e paralleli tra loro, in guisa da imprimere alla tavola movimenti piuttosto rapidi tanto in senso orizzontale, quanto in senso verticale, nel tempo stesso che si faceva scorrere la zona affumicata. Ognuno vede come in questa esperienza, al pari di quanto si verifica nei veri terremoti, abbian partecipato al movimento complicato della tavola non solo la base dell'apparecchio, ma gli stessi assi di rotazione dei due pendoli orizzontali e di quello verticale; e malgrado ciò si ottenne un sismogramma assai nitido, nel quale si videro le oscillazioni, impresse alla tavola, sovrapposte a quelle assai più lente corrispondenti alle oscillazioni proprie dei pendoli. Da una misura eseguita sul sismogramma si poterono ricavare valori in grande accordo con quelli direttamente osservati sulla direzione, ampiezza e periodo oscillatorio dei movimenti subìti dalla tavola.

Un'altra esperienza consistette nel collocare il macrosismometrografo sopra un piccolo carretto a quattro ruote, e nel farlo poi correre sopra un pavimento a mosaico, nel mentre che la zona di carta si spostava al di sotto degli stili. La seguente figura in zincofototipia riproduce fedelmente ed in vera grandezza un tratto del sismogramma artificiale, che si ottenne in una di queste prove. I sobbalzi del carretto, unitamente agli spostamenti bruschi del medesimo, vi appariscono distintamente sovrapposti alle lente ondulazioni, dovute esclusivamente al pendolo oscillante verticalmente ed ai due pendoli orizzontali N-S ed E-W. Il periodo oscillatorio semplice è di circa 4^s in ogni pendolo, mentre i tremiti principali, registrati dallo strumento, sono caratterizzati da un periodo semplice di poco più di $^1/_{10}$ di secondo per tutte e tre le componenti.

Dall'esame di questo sismogramma artificiale mi pare potersi logicamente concludere che, quando il periodo oscillatorio del suolo è assai rapido in confronto di quello strumentale, come appunto nel nostro caso, si è in grado di determinare con grande facilità ed approssimazione il moto assoluto d'una particella del suolo. Ma non v'è niun che non veda come, per raggiungere questo intento, bisogna assolutamente dare alla zona di carta velocità piuttosto considerevoli, senza di che tornerebbe ben difficile il voler misurare non tanto il periodo oscillatorio, quanto l'ampiezza e la direzione dell'effettivo

moto del suolo. Quello che asserisco riesce tanto più evidente, se vogliansi esaminare nel sismogramma riportato anche i tremiti secondarî che accompagnano quelli principali.



Salta agli occhi la difficoltà, per non dire impossibilità, di volerli studiare con una certa esattezza, nonostante che nel nostro caso la velocità di scorrimento della zona sia stata d'una trentina di metri all'ora, e perciò ben superiore a quella che taluni ancor si compiacciono d'adottare, dichiarandola più che sufficiente per i bisogni dell'odierna sismometria.

Fisica terrestre. — *Propagazione dei terremoti.* Nota di GIULIO GRABLOVITZ, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Wavellite di Manziana* (Provincia di Roma). Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Socio Struever.

Avendo avuto occasione di vedere a Biella la collezione di minerali dei fratelli Sella, mi colpì un esemplare (n. 3848 di catalogo) accompagnato dalla seguente etichetta: « Prehnite sopra trachite. — Manziana (Roma) » (1).

Questa indicazione mi colpì non poco, perchè, per quanto è a mia conoscenza, la prehnite non è stata finora rinvenuta nei dintorni del lago di Bracciano. Mi parve quindi non inutile eseguire qualche saggio chimico per accertare la natura del singolare campione, ciò che mi fu subito concesso dai signori Corradino ed Alfonso Sella, ai quali mi è grato rendere anche qui i miei più vivi ringraziamenti.

Il minerale in questione si presenta in sfere e semisfere a struttura fibro-raggiata perfettissima, su un pezzo della solita trachite a grossi cristalli di sanidino, nota a Roma sotto il nome di *pietra della Manziana*.

Queste sfere, che superano talvolta anche 5 mm. di diametro, hanno colore superficiale verdognolo chiarissimo: somigliano dunque moltissimo, per il loro aspetto esterno, alla prehnite globulare della Val di Fassa. Molta somiglianza hanno ancora questi globuli di Manziana con la phillipsite fibro-raggiata, così frequente nella leucitite di Vallerano, nei dintorni di Roma.

Le poche proprietà ottiche e cristallografiche che si poterono determinare nei sottili individui che costituiscono i globuletti, e l'analisi chimica mi dimostrarono che si aveva a che fare con *wavellite*.

Gli individui separati dalle sferette mostrano al microscopio, tra nicol incrociati, estinzione parallela alla loro direzione di allungamento (asse z); in tre di essi si potè misurare con sufficiente approssimazione l'angolo del prisma, che risultò molto vicino a $53\,^1/_2°$. In base alle costanti di Senff, accettate dal Dana, si avrebbe $(110):(1\bar{1}0) = 53°\ 34\,^2/_3{}'$. Oltre il prisma fondamentale, si riconosce frequentemente il pinacoide $\}010\{$, ed in un cristallo notai anche due faccie terminali, ad un' estremità di z, che sono, con tutta probabilità, quelli di $\}101\{$.

La wavellite di Manziana al cannello non fonde, manda una viva luce e diventa bianca, opaca. Non ho potuto constatare il rigonfiamento indicato dal Des Cloizeaux e dal Dana nei loro trattati. Nel tubo chiuso svolge molta acqua a reazione fortemente acida, e diventa bianca, opaca. Colora, e nettamente, ove sia umettata con acido solforico, la fiamma in verde molto pallido.

(1) Manziana è un piccolo paese sulla ferrovia Roma-Viterbo, a pochi chilometri dal lago di Bracciano.

Si scioglie completamente negli acidi: bisogna per altro porre grande attenzione nella scelta del materiale per l'analisi, perchè con la massima facilità si possono mescolare ad esso delle particelle feldspatiche (1), talchè si può essere tratti in inganno sull'azione che gli acidi effettivamente esercitano sul minerale.

Per determinare l'acido fosforico mi sono servito del metodo di Woy, così come è descritto dal Treadwell (2) nel suo recentissimo trattato: del resto ho seguito il Fresenius: per il fluoro ho fatto una determinazione a parte.

I risultati dell'analisi sono i seguenti:

$P_2 O_5$	33,76
$Al_2 O_3$	37,11
$H_2 O$	26,69
F	2,05
	99,61

Si ha dunque la composizione di una wavellite molto pura: io infatti non ha potuto constatare la presenza del calcio e del magnesio: il ferro è presente in quantità indeterminabile.

Il Rammelsberg (3) per le wavelliti fluorifere ha calcolato, in base all'analisi che Pisani ha pubblicato della wavellite di Montebras, la formula seguente:

$$\left\{\begin{array}{c} 24\,(Al^6\,P^4\,O^{19} + 12\,aq) \\ Al^6\,P^4\,Fl^{38} + 12\,aq \end{array}\right\}$$

Ma questa complicata formula resta non poco scossa dalla giusta osservazione che egli fa subito dopo, che, cioè, in base alle ricerche di Church sulla perdita d'acqua a varie temperature, la wavellite deve contenere $H^6\,Al^2\,O^6$.

A. Carnot (4) ha pubblicato qualche hanno fa, quattro analisi di wavelliti irlandesi ed americane, particolarmente interessanti per le esatte determinazioni di fluoro eseguite col suo elegante metodo: dai suoi risultati egli calcola la formula $2\,(P_2 O_5\,,\,Al_2 O_3) + Al_2\,(O_3\,,\,F_6) + 13\,H_2 O$, nella quale $^1/_8 — ^1/_4$ dell'ossigeno nel secondo termine è sostituito da fluoro. Nella recensione di questo lavoro del Carnot, il Groth (5) propone per la wavellite l'ele-

(1) Se si osservano al microscopio delle sezioni un po' sottili delle sferette, si constata *talvolta* in esse la presenza di piccole quantità di sanidino.

(2) *Kurzes Lehrbuch der analytischen Chemie*, 1901, Bd. II, 292.

(3) *Handbuch der Mineralchemie*. Leipzig, 1875, 319.

(4) *Sur la composition chimique des wavellites et des turquoises*. C. R. 1894, CXVIII, 119.

(5) Zeitschr. f. Krystall. 1896, XXVI, 108.

gante e semplice formula $(PO_4)_2(AlOH)_3, 5H_2O$, nella quale $^1/_6$ dell'OH è sostituito da F. La wavellite di Manziana per la sua composizione si accorda perfettamente con la formula di Groth, la quale, infatti, richiede:

P_2O_5	33,9
Al_2O_3	36,8
H_2O	27
F	2,3
	100,0

La wavellite è molto rara in Italia. Molti anni fa, fu scoperta a N. O. dei monti di Allumiere in una trachite decomposta dal barone A. Klitsche de la Grange, e fu descritta dal Bombicci ed analizzata dal Lucchetti (1). L'averla ora ritrovata anche a Manziana, accenna ad una diffusione maggiore di questo minerale nella regione trachitica che intercede fra il lago di Bracciano ed il mare.

Petrografia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei.* II. *Jalotrachite rossa e grigio-cinerea ad augite ed egirina e tufo giallo.* Nota di E. Manasse (2), presentata dal Corrispondente De Stefani.

Jalotrachite rossa e grigio-cinerea.

Ad occhio nudo o munito di lente si riconoscono nella scoria rossa della Concola come già nelle scorie nere precedentemente descritte (3) segregazioni feldispatiche, pirosseniche e biotitiche; ma sono assai scarse. Al microscopio essa apparisce formata quasi esclusivamente da un vetro rosso, porosissimo e povero di microliti augitici e feldispatici e di trichiti. Le segregazioni porfiriche sono qui pure dovute al plagioclasio nelle sue diverse modalità, al sanidino, forse all'anortose, alla biotite, all'augite, all'egirina. Non mi riuscì scorgere nè l'orneblenda, nè l'hauina, nè la sodalite; e la roccia, trattata con acido nitrico, non dà reazione alcuna di anidride solforica, ma dà reazione di cloro (0,29 %). La magnetite esiste solo in piccola parte, chè essa è sostituita da ematite e da poca limonite.

(1) *Analisi della Wavellite recentemente scoperta alla Tolfa, presso le Allumiere.* Rend. Accad. Scienze dell'Ist. di Bologna, anno 1879-80.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

(3) Rend. Acc. Lincei, Serie 5ª, Vol. XI, fasc. 2°, pag. 85. 1902.

Ecco ora ciò che ottenni nell'analisi centesimale di questa jalotrachite rossa:

H^2O a 110°	0,25
H^2O sopra 110°	0,24
SiO^2	57,25
Al^2O^3	19,93
Fe^2O^3	4,83
FeO	2,27
MnO	0,09
CaO	3,40
MgO	1,78
K^2O	6,96
Na^2O	4,43
Ph^2O^5	tracce
Cl	0,29
	101,72
$-O=2Cl$	0,07
	101,65

da cui, portando a 100 con esclusione di acqua, cloro e anidride fosforica, e deducendone le quantità molecolari dei componenti, la formula magmatica, α e β, si ha:

SiO^2	56,72	0,9390	0,9390	0,9390
Al^2O^3	19,74	0,1931	0,2229	0,2229
Fe^2O^3	4,79	0,0298		
FeO	2,25	0,0312	0,1361	0,2797
MnO	0,09	0,0012		
CaO	3,37	0,0601		
MgO	1,76	0,0436		
K^2O	6,89	0,0730	0,1436	
Na^2O	4,39	0,0706		
	100,00			

$$9{,}4\ SiO^2 ; 2{,}2\ R^2O^3 ; 2{,}8\ \bar{R}O, \text{ ovvero } 4{,}3\ SiO^2 ; R^2O^3 ; 1{,}3\ \bar{R}O$$

$$\alpha = 1{,}98 ; \beta = 54$$

$$R^2O : RO = 1 : 1 ; Na^2O : K^2O = 1 : 1$$

Un campione di questa stessa scoria, ma con colorazione più chiara, cinereo-

rossastra, ricco in oligisto micaceo, e racchiudente dei frammenti consistenti, credo di tufo, diede all'analisi:

H^2O a 110°	0,15
H^2O sopra 110°	0,64
SiO^2	51,48
Al^2O^3	17,80
Fe^2O^3	14,27
FeO	1,59
MnO	0,15
CaO	0,89
MgO	1,04
K^2O	5,64
Na^2O	4,94
Cl	0,46
Ph^2O^5	tracce
	99,05
— O = 2Cl	0,10
	98,95

Un'altra scoria infine, raccolta pure alla Concola, ha colore grigio-cinereo ed è tanto friabile che riesce impossibile farne delle sezioni per lo studio microscopico. La sua composizione chimica, qui sotto riportata, corrisponde però assai bene a quella delle altre scorie. La sola differenza notevole consiste in un aumento dell'ossido ferrico e relativa diminuzione dell'ossido ferroso, e in un aumento dell'acqua di costituzione:

H^2O a 110°	0,19
H^2O sopra 110°	1,58
SiO^2	56,27
Al^2O^3	18,67
Fe^2O^3	5,74
FeO	1,58
CaO	4.47
MgO	1,44
K^2O	5,03
Na^2O	4,65
Ph^2O^5	tracce
Cl	tracce
	99,62

Da questa analisi si deduce:

SiO^2	57,50	0,9519	0,9519	0,9519
Al^2O^3	19,08	0,1866	0,2232	0,2232
Fe^2O^3	5,87	0,0366		
FeO	1,62	0,0225	0,1405	0,2716
CaO	4,57	0,0816		
MgO	1,47	0,0364		
K^2O	5,14	0,0545	0,1311	
Na^2O	4,75	0,0766		
	100,00			

$$9{,}5\,SiO^2 ; 2{,}2\,R^2O^3 ; 2{,}7\,\bar{R}0, \text{ ovvero } 4{,}3\,SiO^2 ; R^2O^3 ; 1{,}2\,\bar{R}O$$

$$\alpha = 2{,}02 ; \beta = 52$$

$$R^2O : RO = 1 : 1{,}1 \; ; \; K^2O : Na^2O = 1 : 1{,}4$$

Tutte quindi le scorie diversamente colorate del cratere del Fondo Riccio sono simili fra di loro e tutte, stando ai caratteri mineralogici, sono riferibili al tipo delle roccie trachitiche ad augite ed egirina con marcato carattere alcalino. Ma ove si dia maggiore importanza ai caratteri chimici che ai caratteri mineralogici, come il Loewinson-Lessing propone [1], le scorie studiate differiscono un poco dalle comuni trachiti (rocce neutre o mesiti a magma alcalino) e differiscono pure dalle andesiti (esse pure rocce neutre o mesiti a magma alcalino terroso); alle quali ultime potrebbero ravvicinarsi in certo modo per la prevalenza del feldispato sodico-calcico sul feldispato alcalino. Esse si avvicinano invece alle rocce intermedie alle trachiti e alle andesiti (rocce basiche o basiti a magma intermedio). Infatti per le scorie studiate si ha:

	Formula magmatica	α	β	$R^2O : RO$	$Na^2O : K^2O$
Scoria nera della Concola	$4{,}5\,SiO^2\,R^2O^3\,1{,}5\,\bar{R}O$	2,00	56	1 : 1,2	1 : 1,1
Scoria nera di Moscaglione. . . .	$4{,}1\,SiO^2\,R^2O^3\,1{,}4\,\bar{R}O$	1,87	59	1 : 1,5	1 : 1
Scoria rossa della Concola	$4{,}3\,SiO^2\,R^2O^3\,1{,}3\,\bar{R}O$	1,98	54	1 : 1	1 : 1
Scoria grigio-cinerea della Concola .	$4{,}3\,SiO^2\,R^2O^3\,1{,}2\,\bar{R}O$	2,02	52	1 : 1,1	1,4 : 1
Media . . .	$4{,}3\,SiO^2\,R^2O^3\,1{,}4\,\bar{R}O$	1,97	55	1 : 1,2	1,1 : 1

[1] *Note sur la classification et la nomenclature des roches éruptives.* Compte Rendu du Congrès géologique international, VII session, pag. 52. St. Pétersbourg, 1897; *Studien über die Eruptivgesteine,* id. id. id, pag. 193.

e il Loewinson-Lessing dà:

	Formula magmatica	α	β	$R^2O : RO$
Trachiti	5,2 SiO^2 R^2O^3 1,25 $\overline{R}O$	2,42	44	1 : 1,1
Trachiti Andesiti. . . .	4,46 SiO^2 R^2O^3 1,4 $\overline{R}O$	2,07	53	1 : 1
Andesiti	5,2 SiO^2 R^2O^3 1,7 $\overline{R}O$	2,20	50	1 : 2,8

Ma si considerino esse rocce come dei vetrofiri trachitici, ovvero come vetrofiri trachitico-andesitici, sembrami in ogni modo che esse siano del tutto simili alle rocce del cratere scoriaceo centrale degli Astroni descritte dal Pampaloni (1) e da lui riferite al tipo delle trachiti augitiche e riportate invece dal Rosenbusch (2) al tipo delle trachiti ad augite ed egirina.

Tufo giallo pisolitico.

Il tufo giallo del Fondo Riccio è costituito da un vetro giallo-grigiastro, assai compatto, che fa da cemento a delle piccole pisoliti quasi arrotondate, nerastre, picee, misuranti uno o due centimetri nel loro maggiore diametro. È più abbondante però la materia giallognola terrosa avvolgente delle pisoliti stesse.

L'analisi chimica qualitativa, che io feci completa di questo tufo del Fondo Riccio, diede più abbondante di tutte la reazione della silice, indi dell'allumina, minore dell'ossido ferroso, dell'ossido ferrico, della calce, della potassa, della soda, minore ancora della magnesia e dell'acqua; diede infine soltanto tracce di cloro, di anidride carbonica e di anidride fosforica.

Le sezioni sottili di questo tufo, osservate al microscopio apparvero costituite principalmente da un vetro pochissimo poroso, grigio-giallognolo, e impregnato molto debolmente di carbonato calcico, come dimostrano le sole tracce avute di anidride carbonica. In mezzo al vetro sono rari i microliti di augite, rarissimi quelli di feldispato prevalentemente alcalino, le laminette di biotite e i trichiti o altre forme filamentose simili. Tal vetro fa da cemento alle pisoliti, le quali sono molto più porose della materia avvolgente e sono costituite esse pure da un vetro grigio-nero, o grigio-giallognolo se osservato in sezioni molto sottili, e da pochi cristalletti microlitici di augite e da pochissimi di biotite e di feldispato alcalino.

Come minerali porfirici inclusi nella sostanza cementizia vanno annoverati il sanidino, l'anortose, il plagioclasio, la biotite, l'augite, l'egirina, la

(1) *Le rocce trachitiche degli Astroni nei Campi Flegrei.* I. *Rocce del cratere scoriaceo centrale.* Rendiconti R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. VIII, fasc, 2°, pag. 86, 1899.

(2) *Mikrosk. Physiogr. d. Massigen Gesteine,* pag. 750, Stuttgart, 1896.

sodalite, la magnetite. L'ematite e la limonite vi si trovano come prodotti di decomposizione. In tutti poi i minerali porfirici abbondano in generale le inclusioni vetrose e scarseggiano quelle di apatite.

Più frequente è il feldispato alcalino, in parte anortose, in parte sanidino, il quale ora è in cristalli a contorni ben netti e spesso geminati con la legge di Carlsbad, ora in frammenti cristallini irregolari. Molto più scarso è il feldispato calcico-sodico e, sembrami, di varia acidità, con prevalenza di termini piuttosto basici. L'augite, verde, in prismetti e in frammenti irregolari, è frequente; talora è associata al plagioclasio, e spesso è circondata e framezzata da magnetite, la quale anche si trova in grosse sezioni di cristalli. L'ematite e la limonite sono secondarie; quest'ultima è frequente quasi quanto la magnetite. L'egirina in lamine isolate e la biotite sono più scarse dell'augite. Scarsissima è la sodalite, cui riferisco un cristallo incoloro, isotropo, quasi quadrato e della cui presenza fa fede il saggio chimico che ha dato reazione di cloro, sebbene in minime tracce.

In conclusione il tufo pisolitico giallo del Fondo Riccio, per la presenza di tutti questi minerali sopra descritti, risulta costituito dagli stessi materiali dei vetrofiri ed anche, può fin da ora dirsi, delle rocce ipocristalline e pure di natura trachitica che vi sono incluse, e di cui sarà detto in altra prossima Nota; materiali uniti in un impasto che si è poi alterato più o meno per azioni secondarie.

Chimica. — *Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento di alcune cloroanidridi inorganiche.* Nota IV [1] di G. Oddo, presentata dal Socio Paternò.

Nel lavoro sulle cloroanidridi inorganiche, eseguito in parte in collaborazione col dott. Serra [2], abbiamo osservato che alcune di esse in soluzione hanno un peso molecolare variabile con la natura del solvente e la temperatura. Riscontrammo questo fenomeno in modo notevole nell'ossicloruro di fosforo, per il quale col metodo ebullioscopico in soluzione nel tetraclometane e nel benzolo ottenemmo dei valori corrispondenti quasi alla formola doppia; e valori alquanto più bassi nel solfuro di carbonio (p. e. 47°); mentre nel cloroformio (p. e. 63°) e nell'etere ricavammo risultati corrispondenti alla formola semplice; similmente valori per la formola semplice ottenemmo nelle soluzioni benzoliche col metodo crioscopico. Paragonammo quindi questo

[1] V. pag. 85.

[2] Gazz. chim. ital. 1899, II, 318 e Rend. Acc. Lincei 1899, 244.

fenomeno di polimerizzazione che avviene all'ebollizione alla condensazione riscontrata crioscopicamente nei composti ossidrilati organici in soluzione nei solventi esenti d'ossidrile, come il benzolo; e io poi, in alcune ricerche chimiche [1] dimostrai come, sostituendo agli atomi di cloro dell'ossicloruro dei radicali organici positivi (anilidi), o negativi (esteri dei fenoli), nei primi derivati soltanto si manifesta la tendenza alla condensazione, ma questa non dà mai origine a prodotti a molecola doppia stabile, se si eccettua forse l'ossifosfazobenzolanilide, della quale però i caratteri di solubilità, mentre fanno ammettere la condensazione, impediscono di poterla dimostrare sperimentalmente.

Di altre cloroanidridi studiammo il comportamento ebullioscopico, ma con risultati poco soddisfacenti: quasi per tutte ottenemmo grandezze molecolari superiori alle calcolate per la molecola semplice; ma se per l'ossicloruro di fosforo l'intensità del fenomeno e il comportamento rispetto ai diversi solventi e segnatamente al cloroformio e al solfuro di carbonio ci fece ritenere senza esitanza che una polimerizzazione parziale realmente avvenisse, sugli altri risultati sollevammo dei dubbî; scrivemmo esplicitamente [2], « Con altre cloroanidridi abbiamo ottenuto dei risultati i quali possono far supporre finora che avvenga soltanto polimerizzazione parziale a caldo, che varia alquanto con la natura del solvente. Diciamo finora, perchè i valori dei pesi molecolari che pubblichiamo sono stati calcolati secondo la nota formola

$$M = \frac{C \cdot K}{I} .$$

In una prossima comunicazione dimostreremo quale sia il valore della tensione di vapore parziale delle singole sostanze disciolte, alla temperatura di ebollizione delle soluzioni usate, e, introducendo questa correzione, indicheremo i risultati definitivi. Si può prevedere però fin da ora che per alcuni di essi la correzione d'apportare sarà quasi trascurabile, poichè W. Nernst [3] con soluzioni di benzolo e cloroformio in etere trovò che il peso molecolare osservato supera quello corretto soltanto dal 10 al 20 %.

I risultati che ho ora ottenuto in parte collimano con queste nostre previsioni, in parte le hanno sorpassate: resta però confermato il fatto che alcune cloroanidridi e più di tutto finora l'ossicloruro di fosforo in alcune soluzioni bollenti tendono a polimerizzarsi.

In tutte l'esperienze riportate nelle tavole, la cloroanidride distillata col solvente veniva decomposta con acqua a temperatura ordinaria e, scacciato

(1) Gazz. chim. ital. 1899, II, 330.
(2) L. c.
(3) Zeits. phys. Chemie 8, 129.

il solvente organico, si dosava il cloro (o il bromo per l'ossibromuro) col metodo ponderale.

Ossicloruro di fosforo in tetraclorometane.

$\Gamma = 52{,}6$; $POCl_3 = 153{,}5$

		Determinazioni			
		I	II	III	IV
Frazione distillata	peso	4,6620	3,9516	4,0966	5,1878
	ossicloruro in essa contenuto	0,0327	0,0411	0,0462	0,0790
	solvente	4,6293	3,9105	4,0504	5,1088
	concentrazione (g_1)	0,7063	1,0510	1,1406	1,5463
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,4662	2,3869	2,9508	4,1322
	» finale	1,6435	2,6369	3,2874	4,8286
	media (g_2)	1,55485	2,5119	3,1191	4,4804
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,45	0,41	0,365	0,34
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,221	0°,356	0°,391	0°,570
	» finale	0, 243	0, 387	0, 481	0, 678
	media (Δ)	0, 232	0, 372	0, 436	0, 624
Molecola	osservata	352	355	376	378
	corretta	194	210	239	250

I valori ottenuti da me per la molecola osservata coincidono quasi del tutto con quelli precedentemente da noi pubblicati. Quantunque la correzione che in essi s'introduce sia molto elevata, tuttavia riesce evidente il fenomeno della condensazione, che cresce coll'aumentare della concentrazione.

Ossicloruro di fosforo in benzol.

$\Gamma = 26{,}7$; $POCl_3 = 153{,}5$

		Déterminazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	1,9844	2,0506	2,1661
	ossicloruro in essa contenuto	0,0056	0,0138	0,0207
	solvente » »	1,9788	2,0368	2,1454
	concentrazione (g_1)	0,2829	0,6775	0,9648
Soluzione bollente	a concentrazione iniziale	0,9893	2,0702	3,3240
	» finale	1,1037	2,3093	3,8021
	media (g_2)	1,0465	2,18975	3,56305
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,27	0,31	0,27
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,080	0°,163	0°,290
	» finale	0, 094	0, 188	0, 320
	media (Δ)	0, 087	0, 176	0, 305
Molecola	osservata	321	332	312
	corretta	234	229	228

I risultati dell'altra memoria oscillavano tra 283 e 309, molecola non corretta.

È degno di nota che la volatilità dell'ossicloruro in questo solvente (p. e. 80,5) è inferiore che nel tetraclorometane (p. e. 78,5).

Ossicloruro di fosforo in cloroformio.

$\Gamma = 36{,}6$; $POCl_3 = 153{,}5$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4,1953	7,1742	4,3812
	ossicloruro in essa contenuto	0,0024	0,0081	0,0078
	solvente	4,1929	7,1661	4,3734
	concentrazione (g_1)	0,0572	0,1130	0,1783
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,7673	2.5866	6,2765
	» finale	2,0137	3,3207	7,3866
	media (g_2)	1,8905	2,9536	6,8315
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,03	0,038	0,026
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,410	0°,560	1°,372
	» finale	0, 448	0, 760	1, 690
	media (Δ)	0, 429	6, 660	1, 531
Molecola	osservata	161	163	163
	corretta	153	156,8	158,7

Risulta da quest'esperienze che l'ossicloruro di fosforo è molto volatile in CCl_4 e lo è pochissimo in $CHCl_3$, quantunque questi due solventi abbiano costituzione paragonabile e il loro punto d'ebollizione non differisca che di 15°,5.

Non avendo a mia disposizione del solfuro di carbonio e per la difficoltà di poterlo avere in questa città prima delle vacanze estive, non ne ho potuto ripetere l'esperienze, quantunque presentassero un certo interesse; difatti, mentre in cloroformio (p. e. 63°) si ottengono, come abbiamo visto anche a molecola non corretta valori corrispondenti alla formola semplice, in solfuro di carbonio, che bolle a temperatura alquanto più bassa (47°), abbiamo ottenuto cifre molto più elevate (da 214 a 239).

Ho creduto inutile ripetere l'esperienze in etere, avendo ricavato, nelle determinazioni pubblicate, risultati che corrispondono alla molecola semplice.

Cloruro di tionile in cloroformio.

$\Gamma = 36{,}6$; $SOCl_2 = 119$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4,1308	2,7328	2,4752
	cloruro di tionile in essa contenuto	0,0359	0,0322	0,0375
	solvente	4,0949	2,7006	2,4377
	concentrazione (g_1)	0,8767	1,1923	1,5383
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,5725	2,2455	3,3410
	» finale	1,6963	2,3429	3,5491
	media (g_2)	1,6344	2,2942	3,44505
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,53	0,52	0,44
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,207	0°,297	0°,370
	» finale	0, 235	0, 307	0, 426
	media (Δ)	0, 221	0, 302	0, 398
Molecola	osservata	271	278	316
	corretta	127	134	177

Col cloruro di tionile ho ottenuto per la « molecola osservata » dei risultati un po' superiori a quelli pubblicati (233-240 con concentrazione da 1,2 a 2,3 %; questa differenza io credo sia d'attribuire all'azione dell' $SOCl_2$ sui turaccioli di sughero, di cui allora facemmo uso per l'apparecchio ebullioscopico.

Anche questa cloroanidride mostra dunque tendenza a polimerizzarsi, tendenza che cresce coll'aumentare della concentrazione della soluzione.

Ossibromuro di fosforo in benzol.

$\Gamma = 26,7$; $POBr_3 = 287$

		Determinazione I	Determinazione II
Frazione distillata	peso	3,4087	5,6281
	ossibromuro in essa contenuto	0,0005	0,0023
	solvente	3,4082	5,6258
	concentrazione (g_1)	0,0146	0,0408
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,9692	5,8739
	» finale	2,5732	8,9012
	media (g_2)	2,2712	7,3875
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,006	0,005
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,176	0°,502
	» finale	0, 226	0, 721
	media (Δ)	0, 201	0, 612
Molecola	osservata	302	322
	corretta	300	320

I valori da me ottenuti, per la « molecola osservata » sono un po' inferiori a quelli già pubblicati (334-352) ed evidentemente per la causa menzionata dianzi. Accennano però sempre ad una condensazione che si va determinando nella molecola col crescere della concentrazione.

Solfocloruro di fosforo in benzol.

$\Gamma = 26,7$; $PSCl_3 = 169,5$

		Determinazioni I	Determinazioni II
Frazione distillata	peso	4,5134	3,6619
	solfocloruro in essa contenuto	0,0061	0,0160
	solvente	4,5073	3,6459
	concentrazione (g_1)	0,1353	0,4388
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,5697	4,6856
	» finale	2,2421	6,4449
	media (g_2)	1,9059	5,5652
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,07	0,07
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,169	0°,537
	» finale	0, 233	0, 707
	media (Δ)	0, 201	0, 622
Molecola	osservata	253	239
	corretta	235	222

Per decomporre completamente il solfocloruro di fosforo distillato con la benzina e dosare il cloro ho dovuto farlo bollire a ricadere con acqua per circa due ore. A causa di questa difficoltà di decomposizione, ho rinunziato a ripetere le determinazioni in tetraclorometane, nel quale solvente del resto avevamo ottenuti valori non molto superiori a quelli calcolati per la molecola semplice (209).

Nelle due cloroanidridi contenenti zolfo che ho studiato, ho separato questo elemento dal cloruro d'argento precipitato sciogliendo in ammoniaca e riprecipitando con acido nitrico.

Protocloruro di zolfo in tetraclorometane.

$\Gamma = 52{,}6$; $S_2Cl_2 = 135$

		Determinazioni	
		I	II
Frazione distillata	peso	6,6912	12,9743
	protocloruro in essa contenuto	0,0105	0,0520
	solvente	0,6807	12,9223
	concentrazione (g_1)	0,1572	0,4024
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,2976	2,5002
	» finale	1,7278	5,0104
	media (g_2)	1,5127	3,7553
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,10	0,10
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,422	0°,802
	» finale	0 ,540	1, 520
	media (Δ)	0, 481	1, 161
Molecola	osservata	165	170
	corretta	149	153

Protocloruro di zolfo in benzolo.

$\Gamma = 26{,}7$; $S_2Cl_2 = 135$

		Determinazioni	
		I	II
Frazione distillata	peso	3,0400	3,2500
	protocloruro in essa contenuto	0,0048	0,0059
	solvente	3,0352	3,2441
	concentrazione (g_1)	0,1581	0,1818
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,2578	2,0132
	» finale	1,6000	2,7484
	media (g_2)	1,4289	2,3808
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,11	0,08
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,205	0°,302
	» finale	0, 258	0, 460
	media (Δ)	0, 232	0, 381
Molecola	osservata	164	167
	corretta	146	154

Per la « molecola osservata » ho ottenuto con questo solvente dei risultati un po' inferiori a quelli pubblicati nell'altra nota. Il protocloruro di zolfo

sia in tetraclorometane che in benzolo mostra debole tendenza a polimerizzarsi, che aumenta anche lentamente col crescere della concentrazione.

Conclusioni.

Riassumo i risultati definitivi di tutte le ricerche descritte in questa e nelle quattro note precedenti che ho citato a principio di questo lavoro.

1°. L'iodio nelle soluzioni bollenti in solfuro di carbonio, benzolo e alcool etilico mostra molecole biatomiche; invece in cloroformio e tetraclorometane assieme alle biatomiche conserva molecole tetraatomiche. Il numero degli atomi che costituiscono le molecole e si rivelano ebullioscopicamente, sembra non abbia alcuna influenza sulla colorazione della soluzione; difatti questa è violetta sia nel solfuro di carbonio che nel cloroformio e nel tetraclorometane.

2°. Una proprietà quasi analoga a quella dell'iodio mostrano alcune anidridi alogenate inorganiche: in parecchi solventi all'ebollizione tendono a polimerizzarsi: ciò avviene principalmente con l'ossicloruro di fosforo in tetraclorometane e benzolo; meno col cloruro di tionile in cloroformio, con l'ossibromuro e il solfocloruro di fosforo in benzolo; molto poco col protocloruro di zolfo in tetraclorometane e benzolo.

È degno di nota che crioscopicamente tutte queste anidridi in soluzione nel benzolo mostrano molecola semplice, anche a concentrazioni alquanto elevate. È una polimerizzazione molto labile che avviene quindi in condizioni speciali di temperatura e di soluzione.

Molecola semplice col metodo crioscopico in benzolo mostrano il cloruro di cromile e di solforile, che non si prestano per lo studio ebullioscopico.

3°. Sostituendo nell'ossicloruro di fosforo gli atomi di cloro con i radicali $C_6H_5 . NH$ — e $C_6H_5 . O$ — non si riesce ad isolare dei derivati della forma polimerica. La fosfossibicloromonoanilide $C_6H_5 . NH . POCl_2$ mostra in benzolo sia col metodo crioscopico che con l'ebullioscopico notevole tendenza a polimerizzarsi; nulla posso dire della bi- e trianilide, perchè poco solubili in questo solvente. Nell'alcool etilico col metodo ebullioscopico la prima mostra molecola semplice, ma reagisce col solvente; la seconda fornisce dei valori superiori a quelli calcolati per la molecola semplice.

Per tutti i suoi caratteri fisici (punto di fusione, solubilità ecc.) e anche chimici debbo ritenere come derivato di una forma polimerica dell'ossicloruro (forse la dimera) l'ossifosfoazobenzolanilide $\begin{matrix} C_6H_5 . N \\ C_6H_5 . NH' \end{matrix} \gg PO$, descritta la prima volta da A. Michaelis e Silberstein; e similmente il fosfonitrile di Gladstone, al quale si è attribuito finora la formola semplice NPO; ma appunto per la mancanza d'un solvente, non si riesce a determinare nè nell'uno nè nell'altro la grandezza molecolare.

Gli eteri fenolici $C_6H_5O.POCl_2$ e $(C_6H_5O)_3PO$, i soli che si riesca ad ottenere puri, anche nel benzolo bollente, al contrario delle anilidi, mostrano molecola semplice.

4°. Lo zolfo in tetracloruro di carbonio col metodo ebullioscopico mostra la molecola costituita da otto atomi.

5°. Il pentacloruro di fosforo nel medesimo solvente e pure col metodo ebullioscopico, mostra molecola semplice.

6°. Il protocloruro e il tricloruro di iodio in soluzione nel tetracloruro di carbonio invece di farne inalzare ii punto d'ebollizione lo abbassano, perchè si dissociano.

7°. Dirò finalmente che questo lavoro ci ha permesso di modificare alcuni processi di preparazione di cloroanidridi e trovarne qualche altro [1] nuovo; ho potuto semplificare, come risulta da questa memoria, il metodo per la determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili; e trovare altri fatti nuovi, come l'azione clorurante d'un miscuglio d'ossicloruro di fosforo e clorato potassico, l'eliminazione di HCl dalle monoanilidi $R.NH.POCl_2$ con formazione di una nuova classe di corpi; fatti quest'ultimi che non mancherò di studiare estesamente, quando i mezzi e gli aiuti necessarî me lo permetteranno.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci Righi ed Abetti, ed un lavoro a stampa del professore Gino Loria, avente per titolo: *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche.*

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società italiana delle scienze (detta dei XL) di Roma; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società di scienze naturali di Emden: la Società zoologica di Tokyo; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; la R. Scuola Navale superiore di Genova; il R. Istituto Geodetico di Potsdam.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Società geologica di Calcutta; le Università di Groningen, di Marburg e di Greifswald.

[1] Gazz. chim. ital. 1899 (II) 333 e 355.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 2 febbraio 1902.

Abetti A. — Galileo in Arcetri. Firenze, 1901. 8°.

Id. — L'Osservatorio astronomico di Arcetri. Appunti storici ed illustrazioni. Firenze, 1901. 4°.

Boffito G. — Intorno alla « Quaestio de aqua & terra » attribuita a Dante. Memoria I. La controversia dell'acqua e della terra prima e dopo Dante. Torino, 1902. 2°.

Brough B. H. — Te Scarcity of Coal. London, 1900. 8°.

Chantre E. — Les Barabra. Esquisse ethnographique et anthropométrique. Lyon, 1901. 8°.

Id. — Les Béduins d'Égypte. Esquisse ethnographique et anthropométrique. Lyon, 1901 8°.

Della Rovere D. — De l'infection des animaux à sang froid par le bacille ictérode. Paris, 1901. 8°.

Fritsche H. — Die Tägliche Periode der Erdmagnetischen Elemente. S^{t}. Petersburg, 1902. 8°.

Kölliker A. v. — Ueber einen noch unbekannten Nerven-Zellenkern im Rückenmark der Vögel. Wien, 1901. 8°.

Loria G. — Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche. Leipzig, 1891. 8°.

Marson L. — Nevai di circo e tracce carsiche e glaciali nel Gruppo del Cavallo. Milano, 1901. 8°.

Nordhavs-Expedition (Den Norske). XXVIII Zoologi. Mollusca III ved H. Friele og J. A. Grieg. Christiania, 1901. 4°.

Passerini N. — Sui tubercoli radicali della Medicago sativa L. Firenze, 1901. 8°.

Righi A. — Sulla questione del campo magnetico generato dalla convezione elettrica e su altre analoghe questioni. Pisa, 1901. 8°.

Tommasina Th. — Sur l'auscultation des orages lointains et sur l'étude de la variation diurne de l'électricité athmosphérique. Paris, 1901. 4°.

Id. — Sus l'existence de rayons qui subissent la réflexion dans le rayonnement émis par un mélange de chlorures de radium et de baryum. Paris, 1901. 4°.

Watzof S. — Tremblements de terre en Bulgarie an XIX siècle. Sofia, 1902. 8°

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 febbraio 1902.

Presidenza del Socio anziano L. Luzzatti.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di fattoriali.* Nota del Socio S. Pincherle.

In due recenti comunicazioni all'Accademia delle Scienze di Parigi [1], il sig. Niels Nielsen richiama l'attenzione sulle serie di fattoriali, dando notevoli condizioni relative alla sviluppabilità delle funzioni in serie della forma

$$\sum c_n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{1}$$

Simili serie, insieme con le analoghe

$$\sum c_n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \tag{2}$$

mi sono sempre sembrate meritevoli di un particolare interesse [2], specialmente per una questione che risale al Laplace, ma che è stata ridestata di recente e tiene occupati con successo i moderni analisti, particolarmente i francesi; intendo la questione della relazione fra una serie di potenze ed il coefficiente del suo termine generale considerato come funzione dell'indice:

[1] Comptes Rendus, T. CXXXIII e CXXXIV, 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902.

[2] V. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, T. II, dicembre 1888 e T. XIV, dicembre 1899, e Annali di Matematica, S. III, T. IV, pag. 245.

infatti, per molteplici classi di serie di potenze di z, il coefficiente, considerato come funzione del suo indice x, ammette sviluppi in serie della forma (1) o (2).

A questo proposito mi sia concesso di rilevare una notevole affermazione fatta dal sig. E. Lindelöf in una recente occasione [1]: ed è che bene spesso, più dell'ordine di grandezza dei coefficienti di una serie di potenze, ha importanza, nello studio di tale serie, la forma sotto cui si presenta questo coefficiente come funzione dell'indice. Il sig. Lindelöf limita questa osservazione alle serie rappresentanti funzioni intere, ma la portata di essa mi sembra generale.

In questa prima Nota mi fermerò sulla questione della convergenza delle serie della forma (1) e (2), dandone la condizione con qualche maggiore precisione di quanto si faccia per solito e rilevando, da questa condizione, un fatto che mi sembra non sia stato per anco avvertito nella sua generalità, sebbene assai degno di considerazione.

1. Si consideri una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)}$$

dove $c_0, c_1, \dots c_n, \dots$ è una successione qualsivoglia di numeri reali o complessi, ed x, y sono due variabili complesse. Si formi la successione

$$\frac{\log|c_n|}{\log n} \tag{4}$$

e sia k il suo massimo limite [2]; k è un numero reale finito od infinito. Indicando con $R(a)$ la parte reale di a, escludendo per x ed y valori interi negativi, e prendendo

$$R(x) < R(y) - k - 1, \tag{5}$$

la serie (3) è assolutamente convergente.

[1] Comptes Rendus, T. CXXXIII, 30 décembre 1901.

[2] Intendo con ciò quel numero che il Cauchy chiamava *la plus grande des limites*. Esso coincide col massimo dell'insieme derivato di (4), tranne il caso in cui i numeri di (4) hanno un massimo m non appartenente all'insieme derivato il quale si presenti infinite volte nella successione stessa: in tale caso è questo numero m che va preso come massimo limite. (V. Hadamard, *la Série de Taylor*, Paris, C. Naud, 1901, pag. 15). È da notare come la successione (4) si presenti (id., ibid., pag. 45) nello studio di una serie di Taylor sulla sua circonferenza di convergenza.

Infatti, verificata la (5), si potrà determinare un numero ε positivo abbastanza piccolo perchè sia anche

$$\mathrm{R}(x) < \mathrm{R}(y) - k - 1 - \varepsilon . \tag{5'}$$

Ora, da un valore dell'indice n in poi, segue, dall'essere k il massimo limite di (4), che è

$$|c_n| < n^{k+\varepsilon} .$$

Inoltre, dalla teoria della funzione Γ segue che

$$\lim_{n=\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!\, n^{x-1}} = \frac{1}{\Gamma(x)} ,$$

onde risulta che, essendo m un numero positivo finito, si ha

$$\left| \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)} \right| < m n^{\mathrm{R}(x-y)} .$$

Ne viene

$$\left| c_n \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)} \right| < m n^{\mathrm{R}(x-y)+k+\varepsilon} ,$$

e poichè, per la (5'), l'esponente di n è minore di -1, la serie (3) è assolutamente convergente.

Prendendo invece

$$\mathrm{R}(x) > \mathrm{R}(y) - k , \tag{6}$$

la serie (3) è divergente. Infatti, per essere k il massimo limite di (4), per infiniti valori di n si ha

$$|c_n| > n^{k-\varepsilon'} ,$$

dove ε' si è preso abbastanza piccolo perchè sia anche

$$\mathrm{R}(x) > \mathrm{R}(y) - k + \varepsilon' ,$$

E poichè, essendo m' un numero positivo finito e non nullo, si ha, per la formula citata della teoria della funzione Γ, che è per i detti valori di n:

$$\left| c_n \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)} \right| > m' n^{\mathrm{R}(x-y)+k-\varepsilon'}$$

dove l'esponente di n è positivo, ne viene che infiniti termini della (3) hanno il modulo superiore ai numeri di un sistema crescente indefinitamente, e quindi la serie stessa è divergente.

2. Supposto fissato y, risulta dal teorema precedente che la serie (3) è convergente assolutamente ed uniformemente rispetto ad x, a sinistra della parallela all'asse immaginario condotta per il punto $x = y - k - 1$, ed è divergente a destra della parallela condotta per il punto $x = y - k$. Fra queste due parallele è compresa una striscia, che si può chiamare striscia neutra; il teorema del numero precedente non c'insegna quale sia il comportamento della (3) per i valori della x compresi entro quella striscia. Ma assoggettando i coefficienti c_n a qualche altra condizione, anche se assai poco restrittiva; p. es., supponendo che sia

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{k + ih}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}, \tag{7}$$

dove ε_n va a zero con $n = \infty$ e k, h sono numeri reali, il primo dei quali, come è facile vedere, non differisce dal massimo limite di $\frac{\log|c_n|}{\log n}$, si può dire qualche cosa di più circa al comportamento delle (3) quando x è preso entro alla striscia neutra. Infatti, posto

$$u_n = c_n \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)},$$

viene

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{k + ih + x - y}{n} + \frac{\varepsilon'_n}{n},$$

e quindi, prendendo i moduli:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 + \frac{k + \mathrm{R}(x-y)}{n} + \frac{\varepsilon''_n}{n},$$

dove $\varepsilon'_n, \varepsilon''_n$ vanno a zero per $n = \infty$. Ne viene che se è

$$\mathrm{R}(x-y) + k < 0,$$

cioè se si prende x a sinistra della parallela all'asse immaginario condotta per $y - k$, i termini della serie (3) vanno decrescendo in valore assoluto e tendendo a zero. Ciò accade quindi anche nella striscia neutra, oltrecchè nel campo di convergenza, permettendoci in conseguenza di dare facilmente condizioni di convergenza valide in codesta striscia; soltanto, mentre nel campo di convergenza definito da

$$\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(y) < -k - 1$$

la convergenza è assoluta, nella striscia neutra la serie, se convergente, lo è

solo semplicemente, come mostra l'applicazione del noto criterio di Raabe.

Ad esempio, ogni serie trigonometrica della forma

$$\Sigma c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)} \cos n\theta ,$$

in cui le c_n soddisfano alla condizione (7), è convergente semplicemente [1] per ogni valore di x preso nella striscia neutra e per θ diverso da un multiplo di 2π.

La nota proposizione sulla serie binomiale

$$\Sigma \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!} z^n$$

per $|z| = 1$ si deduce facilmente da quanto precede.

3. Le considerazioni precedenti conducono a dividere le serie della forma (3) in tre classi.

Una prima classe è costituita da quelle serie per cui è

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |c_n|}{\log n} = -\infty .$$

Esse sono assolutamente convergenti per tutte le coppie di valori di x e di y. In particolare, appartengono alla detta classe tutte le serie (3) per le quali la successione delle c_n è tale che $\Sigma c_n z^n$ converga in un cerchio di raggio maggiore dell'unità.

Alla seconda classe apparterranno quelle serie per le quali k ha un valore finito. Per ogni valore $\bar{y}$ assegnato ad y, esiste per queste serie, nel piano della variabile x, un campo di convergenza (assoluta), un campo di divergenza, ed una striscia neutra in cui può accadere, in casi estesi, che la serie converga semplicemente. Queste tre regioni sono rispettivamente caratterizzate da

$$\begin{aligned} &R(x) < R(\bar{y}) - k - 1 , \\ &R(x) > R(\bar{y}) - k , \\ &R(\bar{y}) - k - 1 < R(x) < R(\bar{y}) - k . \end{aligned}$$

Infine, formano la terza classe quelle serie per cui si ha $k = +\infty$. Esse sono divergenti per tutti i valori di x e di y. Questo caso si presenta, in

[1] Per un noto teorema; v. p. es. Picard, *Traité d'Analyse*, 2me édition, T. I, pag. 251.

particolare, quando la successione c_n è tale che la serie $\Sigma c_n z^n$ abbia un raggio di convergenza inferiore ad uno.

4. Ad ogni successione data

$$c_0 , c_1 , c_2 , \dots c_n , \dots$$

si può fare corrispondere una serie di potenze $\Sigma c_n x^n$, e ad ogni proprietà della successione corrisponde una proprietà per la funzione analitica definita dalla serie (1). Fra queste proprietà, la prima e la più elementare riguarda il cerchio in cui converge la serie di potenze; la sua determinazione è fondata sul più elementare dei criterî di convergenza, quello che considera il massimo limite di $\sqrt[n]{|c_n|}$. A tutte le successioni per le quali questo massimo limite è il medesimo, corrispondono serie di potenze aventi il medesimo raggio di convergenza. Se ora alle potenze si sostituiscono fattoriali; se, per es., nelle serie di potenze aventi l'unità come raggio di convergenza, si sostituisce ad x^n il fattoriale

$$\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} ,$$

i campi di convergenza vengono a distinguersi; le serie di fattoriali convergono in aree diverse, le quali vengono a dipendere da un criterio di convergenza più discriminativo del precedente, cioè da quello fondato sulla considerazione del massimo limite di $\frac{\log|c_n|}{\log n}$.

La sostituzione dei fattoriali alle potenze nelle serie $\Sigma c_n z^n$ produce dunque, per così dire, una dilatazione nell'insieme di quelle che hanno uno stesso cerchio di convergenza. Un'altra dilatazione si produce, per fatto di quella sostituzione, nel limite fra la regione di convergenza e quella di divergenza; mentre infatti questo limite, nelle serie di potenze, è costituito semplicemente dalla circonferenza di convergenza, esso si dilata, nelle serie di fattoriali, in una striscia compresa fra due parallele all'asse immaginario, quella che abbiamo chiamata striscia neutra.

(1) È noto dai lavori di Borel, Le Roy ed altri, come anche alle serie di potenze costantemente divergenti si possa fare corrispondere una funzione analitica determinata.

Meccanica. — *Sul principio delle immagini di lord Kelvin e le equazioni dell'elasticità.* Nota del Corrisp. C. Somigliana.

Non credo sia stato finora osservato che il principio delle immagini di lord Kelvin può essere esteso alle equazioni della elasticità, e conduce, sotto certe condizioni, e in certi casi, alla loro integrazione in campi limitati da piani, analoghi a quelli nei quali esso porta alla soluzione del problema di Dirichlet. Però le condizioni al contorno, che conviene supporre conosciute, non sono quelle che più ordinariamente si considerano, cioè le componenti degli spostamenti o quelle delle forze superficiali esterne, ma parte delle une e parte delle altre, cioè due delle componenti di spostamento ed una di pressione o viceversa. Questi problemi, del resto, vengono di solito considerati come di natura più complessa dei precedenti.

1. Supponiamo che il mezzo elastico, che si considera, sia cristallino ed ammetta il piano $z = 0$ come piano di simmetria. Le considerazioni che seguono sono valide per tutti i mezzi cristallini che godono di questa proprietà, in particolare quindi anche pei mezzi isotropi, e per quelli incompletamente isotropi, che hanno un asse d'isotropia parallelo all'asse delle z.

Il potenziale elastico, quando il piano $z = 0$ è di simmetria, ha la forma

$$\begin{aligned} 2\Pi = {} & c_{11}\,x^2{}_x + c_{22}\,y^2{}_y + c_{33}\,z^2{}_z + 2c_{23}\,y_y\,z_z + 2c_{31}\,z_z\,x_x + 2c_{12}\,x_x\,y_y \\ & + c_{44}\,y^2{}_z + c_{55}\,z^2{}_x + 2c_{54}\,y_z\,z_x \\ & + 2x_y(c_{16}\,x_x + c_{26}\,y_y + c_{36}\,z_z) + c_{66}\,x^2{}_y \end{aligned}$$

e quindi per le componenti di pressione si ha

$$(1)\qquad \begin{cases} -\mathrm{X}_x = c_{11}\,x_x + c_{12}\,y_y + c_{13}\,z_z + c_{16}\,x_y \\ -\mathrm{Y}_y = c_{21}\,x_x + c_{22}\,y_y + c_{23}\,z_z + c_{26}\,x_y \\ -\mathrm{Z}_z = c_{31}\,x_x + c_{32}\,y_y + c_{33}\,z_z + c_{36}\,x_y \\ -\mathrm{Y}_z = c_{44}\,y_z + c_{45}\,z_x \\ -\mathrm{Z}_x = c_{54}\,y_z + c_{55}\,z_x \\ -\mathrm{X}_y = c_{16}\,x_z + c_{26}\,y_y + c_{36}\,z_z + c_{66}\,x_y \end{cases}$$

e le equazioni dell'equilibrio, supposte nulle le forze di massa, sono, come è notissimo,

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{X}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{X}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{X}_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{Y}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{Y}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{Y}_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{Z}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{Z}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{Z}_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Se ora noi facciamo la seguente trasformazione

$$\begin{aligned} u' &= u & x' &= x \\ v' &= v & y' &= y \\ w' &= -w & z' &= -z \end{aligned}$$

le equazioni (2), a cagione della proprietà di simmetria ammessa, si mutano nelle equazioni formate colle u', v', w', x', y', z' in modo identico a quello con cui le (2) sono formate colle u, v, w, x, y, z. Noi possiamo interpretare questa proprietà anche dicendo: *Se tre funzioni*

$$u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z)$$

sono integrali delle equazioni (2), *anche le funzioni*

$$\overline{u} = u(x, y, -z) \quad \overline{v} = v(x, y, -z) \quad \overline{w} = -w(x, y, -z)$$

godono della stessa proprietà.

Cerchiamo ora quali relazioni passano fra le componenti L, M, N delle forze superficiali che mantengono in equilibrio il corpo quando in esso avviene la deformazione u, v, w, e le analoghe $\overline{\mathrm{L}}, \overline{\mathrm{M}}, \overline{\mathrm{N}}$ che adempiono lo stesso ufficio quando nel corpo si ha la deformazione $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$. Per le L, M, N si ha

$$2') \qquad \begin{aligned} \mathrm{L} &= \mathrm{X}_x \cos(nx) + \mathrm{X}_y \cos(ny) + \mathrm{X}_z \cos(nz) \\ \mathrm{M} &= \mathrm{Y}_x \cos(nx) + \mathrm{Y}_y \cos(ny) + \mathrm{Y}_z \cos(nz) \\ \mathrm{N} &= \mathrm{Z}_x \cos(nx) + \mathrm{Z}_y \cos(ny) + \mathrm{Z}_z \cos(nz) \end{aligned}$$

ove n indica la normale diretta verso l'interno del corpo, e per avere le $\overline{\mathrm{L}}, \overline{\mathrm{M}}, \overline{\mathrm{N}}$ dovremo costruire le espressioni analoghe a quelle dei secondi membri formate colle

$$\overline{1}) \qquad -\overline{\mathrm{X}}_x = c_{11}\overline{x}_x + c_{12}\overline{x}_y + c_{13}\overline{z}_z + c_{16}\overline{x}_y$$

. . . . . .

In generale quindi non è possibile avere relazioni semplici fra i due sistemi di forze superficiali, se il corpo che si considera ha una forma qualsiasi. Però se esso è limitato dal piano $z = 0$, e formato ad es. dello spazio indefinito che si trova dalla banda positiva di questo piano, tali relazioni si riducono semplicissime.

Infatti se data una funzione $f = f(x, y, z)$, noi formiamo la funzione

$$\mathrm{F} = f(x, y, -z)$$

è facile vedere che, per $z = 0$, sono soddisfatte le seguenti relazioni

$$f = \mathrm{F}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x \partial z}, \ldots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e quindi, ricordando le espressioni delle componenti di deformazione, si trova subito che, per $z = 0$, sono soddisfatte le relazioni:

$$\bar{x}_x = x_x \qquad \bar{y}_y = y_y \qquad \bar{z}_z = z_z$$
$$\bar{y}_z = -y_z \qquad \bar{z}_x = -z_x \qquad \bar{x}_y = x_y$$

e quindi a cagione delle (1) anche le seguenti:

$$\bar{\mathrm{X}}_x = \mathrm{X}_x \qquad \bar{\mathrm{Y}}_y = \mathrm{Y}_y \qquad \bar{\mathrm{Z}}_z = \mathrm{Z}_z$$
$$\bar{\mathrm{Y}}_z = -\mathrm{Y}_z \qquad \bar{\mathrm{Z}}_x = -\mathrm{Z}_x \qquad \bar{\mathrm{X}}_y = \mathrm{X}_y$$

Ora nel caso in cui la superficie che limita il corpo è il piano $z = 0$, si ha

$$\cos(nx) = 0 \quad \cos(ny) = 0 \quad \cos(nz) = 1$$

quindi, osservando le (2′) (Ī), concludiamo subito che si hanno le relazioni

$$\bar{\mathrm{L}} = -\mathrm{L} \quad \bar{\mathrm{M}} = -\mathrm{M} \quad \bar{\mathrm{N}} = \mathrm{N}$$

Riassumendo possiamo dire:

Si abbia un corpo limitato dal piano $z = 0$, *e la cui struttura cristallina ammetta come piani di simmetria i piani a questo paralleli, e siano*

$$u(x, y, z) \ , \ v(x, y, z) \ , \ w(x, y, z)$$
$$\mathrm{L} \quad , \quad \mathrm{M} \quad , \quad \mathrm{N}$$

gli spostamenti e le corrispondenti forze superficiali che determinano una speciale deformazione elastica del corpo. Il corpo stesso rimarrà ancora in equilibrio, quando in esso avvengono gli spostamenti

$$u(x, y, -z) \ , \ v(x, y, -z) \ , \ -w(x, y, -z)$$

mentre alla superficie sono applicate forze le cui componenti sono

$$-\mathrm{L} \ , \ -\mathrm{M} \ , \ \mathrm{N}.$$

Noi diremo che le due terne integrali u, v, w e $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ si ottengono l'una dall'altra *per riflessione* sul piano $z = 0$.

Questo teorema ha, rispetto alle equazioni dell'elasticità considerate, lo stesso valore che il principio delle immagini rispetto all' equazione di Laplace. Vediamo come.

2. Dato un sistema qualsiasi di integrali u, v, w delle equazioni dell' equilibrio considerate, corrispondenti alle forze superficiali L, M, N, poniamo

(3) $$u_1 = u - \bar{u} \quad v_1 = v - \bar{v} \quad w_1 = w - \bar{w}$$

Le u_1, v_1, w_1 costituiranno una nuova terna integrale delle equazioni d'equilibrio, la quale sul piano $z = 0$ soddisferà alle condizioni

$$u_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad N_1 = 0 , \tag{4}$$

se chiamiamo L_1, M_1, N_1 le componenti delle forze che applicate sul piano $z = 0$ producono gli spostamenti u_1, v_1, w_1.

Analogamente otterremo una nuova terna integrale ponendo

$$u_2 = u + \bar{u} \quad v_2 = v + \bar{v} \quad w_2 = w + \bar{w} \tag{3'}$$

per la quale invece avremo sul piano $z = 0$

$$w_2 = 0 \quad L_2 = 0 \quad M_2 = 0 \tag{4'}$$

Data dunque una terna integrale qualsiasi, possiamo subito dedurne due altre le quali soddisfano alle condizioni che, sul piano $z = 0$, sono nulle le due componenti tangenziali dello spostamento e la componente normale della pressione superficiale, o viceversa sono nulle le due componenti tangenziali della pressione e la componente normale dello spostamento.

Supponiamo che le u, v, w siano regolari in tutto lo spazio $z \geq 0$, all'infuori che in un punto (a, b, c), e siano omogenee di grado -1 nelle variabili $x - a$, $y - b$, $z - c$. La esistenza di tali integrali in generale per le equazioni della elasticità è stata dimostrata in un lavoro recente (*Acta mathematica*, 23, 1900) quantunque si presentino delle difficoltà ad ottenerne espressioni semplici mediante i coefficienti delle equazioni d'equilibrio. Nel caso della isotropia soddisfanno alle condizioni suddette gli spostamenti che si ottengono prendendo per terna di funzioni generatrici due costanti e la funzione

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} .$$

Sono gli integrali che hanno per le equazioni dell'isotropia lo stesso ufficio che il potenziale newtoniano elementare $\frac{1}{r}$ ha per l'equazione di Laplace, e mi hanno servito altre volte per trovare le formole che, per le equazioni della elasticità, sono equivalenti a quella di Green.

Per spostamenti di tal fatta le componenti delle pressioni interne risulteranno regolari in tutto lo spazio $z \geq 0$, eccetto che nel punto (a, b, c) e saranno funzioni omogenee di grado -2. Inoltre le funzioni $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ corrispondenti avranno al pari delle u, v, w un solo punto di singolarità, ma questo sarà nel punto $x = a$, $y = b$, $z = -c$, e quindi esterno dal campo $z \geq 0$. Perciò anche gli spostamenti u_1, v_1, w_1 e u_2, v_2, w_2 definiti dalle (3) (3') saranno omogenei di grado -1, con un solo punto isolato di singolarità in (a, b, c), e le pressioni ad essi corrispondenti saranno funzioni omogenee di grado -2.

Ciò posto, supponiamo che sulla superficie $z = 0$ del corpo dato siano applicate delle forze L , M , N , e indichiamo con u , v , w le componenti degli spostamenti prodotti. Noi potremo applicare il teorema di Betti alle due terne di integrali

$$\begin{matrix} u & v & w \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ \mathrm{L}_1 & \mathrm{M}_1 & \mathrm{N}_1 \end{matrix}$$

purchè dal campo $z \geq 0$ venga escluso il punto (a , b , c) mediante una piccola sfera σ avente il centro in esso. Avremo, ricordando le (4), e indicando con s la superficie limite del corpo,

$$\int_s (u\mathrm{L}_1 + v\mathrm{M}_1)\, s - \int_s w_1 \mathrm{N} ds = \int_\sigma (u\mathrm{L}_1^{(\sigma)} + v\mathrm{M}_1^{(\sigma)} + w\mathrm{N}_1^{(\sigma)})\, d\sigma$$
$$- \int_\sigma (u_1\mathrm{L}^{(\sigma)} + v_1\mathrm{M}^{(\sigma)} + w_1\mathrm{N}^{(\sigma)})\, d\sigma$$

dove con $\mathrm{L}_1^{(\sigma)}$ $\mathrm{M}_1^{(\sigma)}$ $\mathrm{N}_1^{(\sigma)}$ indichiamo le componenti delle forze che conviene applicare sulla superficie σ, onde mantenere l'equilibrio, quando è soppressa questa parte del corpo, mentre si ha la deformazione u_1 , v_1 , w_1; ed $\mathrm{L}^{(\sigma)}$, $\mathrm{M}^{(\sigma)}$, $\mathrm{N}^{(\sigma)}$ hanno un significato analogo riguardo alla deformazione u , v , w.

Ora se noi supponiamo che il raggio ϱ della sfera σ divenga piccolissimo, a cagione del modo di comportarsi delle u_1 v_1 w_1 in (a , b , c) si ha

$$\lim_{\varrho=0} \int_\sigma (u_1\mathrm{L}^{(\sigma)} + v_1\mathrm{M}^{(\sigma)} + w_1\mathrm{N}^{(\sigma)})\, d\sigma = 0$$

mentre l'altro integrale del secondo membro tende ad una funzione lineare a coefficienti costanti dei valori U , V , W delle funzioni u , v , w nel punto a , b , c. Indicando k_1 , k_2 , k_3 i coefficienti di questa funzione lineare, troviamo

$$(5) \qquad k_1\mathrm{U} + k_2\mathrm{V} + k_3\mathrm{W} = \int_s (u\mathrm{L}_1 + v\mathrm{M}_1)\, ds - \int_s w_1 \mathrm{N} ds .$$

Noi non vogliamo entrare qui nei particolari del calcolo, per il caso delle equazioni generali che abbiamo considerato. Osserveremo solo che stabilite tre formole analoghe alla precedente, in cui le funzioni lineari dei primi membri siano indipendenti fra loro, risulta risoluto il seguente problema:

Determinare la deformazione prodotta in un corpo indefinito, limitato da un piano, e cristallizzato in modo che siano piani di simmetria i piani paralleli alla superficie limite, quando su questa superficie sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e la componente normale delle pressioni esterne.

Una formola analoga alla (5) si può trovare considerando invece degli spostamenti u_1 , v_1 , w_1 gli altri già considerati u_2 , v_2 , w_2. Tenendo conto delle (4′) si troverebbe

$$(5') \qquad k_1\mathrm{U} + k_2\mathrm{V} + k_3\mathrm{W} = \int_s \mathrm{N}_2 w ds - \int_s (\mathrm{L}u_2 + \mathrm{M}v_2)\, ds$$

e si arriverebbe alla soluzione del problema precedente, quando alla superficie si conoscono *le componenti normali degli spostamenti e le componenti tangenziali delle pressioni.*

Nel caso della isotropia il calcolo ora indicato è semplicissimo. Possiamo prendere, per quanto si è già detto,

$$u' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2\alpha^2}{r}$$
$$v' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}$$
$$w' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}$$

(ove α, β indicano le due velocità di propagazione delle onde piane); e, coi calcoli stessi che servono alla determinazione delle formole analoghe a quella di Green, si trova al posto delle (5) (5′)

$$8\pi\alpha^2\beta^2 \mathrm{U} = \int_s (u\mathrm{L}_1 + v\mathrm{M}_1)\,ds - \int_s w_1 \mathrm{N}\,ds$$
$$8\pi\alpha^2\beta^2 \mathrm{U} = \int_s \mathrm{N}_2 w\,ds - \int_s (\mathrm{L}u_2 + \mathrm{M}\mathrm{N}_2)\,ds$$

Le altre formole per la determinazione di V, W nei due casi si possono dedurre facilmente da queste con sostituzioni circolari. Le espressioni effettive delle $\mathrm{L}_1, \mathrm{M}_1, \mathrm{N}_2, \ldots$ si possono costruire in forma esplicita mediante le formole date in due miei lavori: *Sulle equazioni della elasticità* (Annali di Matematica, 1889) e *Sopra gli integrali delle equazioni della isotropia elastica* (Nuovo Cimento, 1894).

Il problema ora considerato, nel caso della isotropia, fu risoluto la prima volta da Boussinesq (Comptes Rendus, T. CVI, 1888) e ristudiato poi da Cerruti e Marcolongo. I loro metodi di integrazione sono però assai meno semplici di quello ora esposto.

3. Supponiamo ora che il corpo che si deforma, ammetta due piani ortogonali di simmetria elastica, che supporremo siano i piani $x = 0$, $y = 0$. Se allora $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ rappresentano una terna di componenti di spostamento soddisfacenti alle equazioni di equilibrio, noi, applicando successivamente il teorema dimostrato nel § 1, potremo dedurne altre tre terne, che godono della stessa proprietà. Difatti le equazioni d'equilibrio in questo caso rientrano in se stesse tanto per una riflessione sul piano $x = 0$ che sul piano $y = 0$. Per semplicità di scrittura introdurremo la notazione $\bar{\alpha} = -\alpha$; e allora i quattro sistemi d'integrali si potranno scrivere nel modo seguente:

$$(6)\qquad \begin{cases} u_1 = u(x,y,z) & u_2 = \overline{u}(\overline{x},y,z) \\ v_1 = v(x,y,z) & v_2 = v(\overline{x},y,z) \\ w_1 = w(x,y,z) & w_2 = w(\overline{x},y,z) \\ \\ u_3 = \overline{u}(\overline{x},\overline{y},z) & u_4 = u(x,\overline{y},z) \\ v_3 = \overline{v}(\overline{x},\overline{y},z) & v_4 = \overline{v}(x,\overline{y},z) \\ w_3 = w(\overline{x},\overline{y},z) & w_4 = w(x,\overline{y},z) \end{cases}$$

Questi quattro sistemi di integrali *costituiscono un gruppo*, in quanto sono tutti e soli quelli che si possono ottenere da uno qualunque di essi per riflessione sui due piani $x=0$, $y=0$. Se poi supponiamo che il primitivo sistema abbia un punto d'infinito isolato d'ordine -1, gli altri tre ammetteranno una singolarità analoga rispettivamente nei punti immagini di questo punto rispetto ai piani $x=0$, $y=0$, e quindi una combinazione lineare qualsiasi di quei quattro sistemi, darà un nuovo sistema integrale, avente una singolarità di tal fatta in ciascuno dei quattro angoli determinati dai piani $x=0$, $y=0$. Perciò, mediante questo gruppo d'integrali è possibile risolvere, rispetto al diedro solido rettangolo limitato dai mezzi piani positivi $x=0$, $y=0$, problemi di equilibrio elastico analoghi a quelli considerati nel paragrafo precedente per un solido limitato da un piano. Ma per vedere quali siano le condizioni alla superficie che debbono essere conosciute in questo caso, è necessario prima stabilire le relazioni che si verificano fra gli spostamenti e fra le pressioni dei sistemi (6), sui piani $x=0$, $y=0$.

Queste relazioni si trovano assai facilmente applicando il teorema fondamentale del § 1. Noi le scriveremo senz'altro, indicando in generale con L_i, M_i, N_i le componenti secondo gli assi delle x, y, z delle pressioni che conviene supporre applicate in superficie per mantenere l'equilibrio, quando avviene la deformazione u_i, v_i, w_i. Si trova così:

per $x=0$:

$$(7)\qquad \begin{cases} u_1 = \overline{u}_2 & u_3 = \overline{u}_4 & L_1 = L_2 & L_3 = L_4 \\ v_1 = v_2 & v_3 = v_4 & M_1 = \overline{M}_2 & M_3 = \overline{M}_4 \\ w_1 = w_2 & w_3 = w_4 & N_1 = \overline{N}_2 & N_3 = \overline{N}_4 \end{cases}$$

per $y=0$:

$$(7')\qquad \begin{cases} u_2 = u_3 & u_1 = u_4 & L_2 = \overline{L}_3 & L_1 = \overline{L}_4 \\ v_2 = \overline{v}_3 & v_1 = \overline{v}_4 & M_2 = M_3 & M_1 = M_4 \\ w_2 = w_3 & w_1 = w_4 & N_2 = \overline{N}_3 & N_1 = \overline{N}_4 \end{cases}$$

Consideriamo ora gli spostamenti

$$(8)\qquad \begin{cases} u' = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \\ v' = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \\ w' = w_1 - w_2 + w_3 - w_4 \end{cases}$$

Dalle relazioni precedenti (7) (7′) risulta subito che noi avremo

per $x = 0$: $\quad L' = 0 \ , \ v' = 0 \ , \ w' = 0$

per $y = 0$: $\quad u' = 0 \ , \ M' = 0 \ , \ w' = 0$

Siano ora

u	v	w		u'	v'	w'
L	M	N		L′	M′	N′

due terne di spostamenti e le relative forze superficiali per cui si ha equilibrio elastico nel diedro solido cristallino considerato. Applicando il teorema di Betti e indicando con s_1 il mezzo piano positivo $x = 0$, con s_2 il mezzo piano positivo $y = 0$, avremo in generale:

$$\int_{s_1} (uL' + vM' + wN')\, ds_1 + \int_{s_2} (uL' + vM' + wN')\, ds_2$$
$$- \int_{s_1} (u'L + v'M + w'N)\, ds_1 - \int_{s_2} (u'L + v'M + w'N)\, ds_2 = 0.$$

Ma se gli spostamenti u' , v' , w' coincidono con quelli indicati con queste notazioni nelle (8), nel secondo membro, invece dello zero, avremo una funzione lineare dei valori delle u , v , w nel punto di singolarità per u' , v' , w' compreso nel diedro positivo e la somma di integrali del primo membro si ridurrà a contenere sei soli termini; avremo cioè

$$\int_{s_1} (vM' + wN' - u'L)\, ds_1 + \int_{s_2} (uL' - v'M + wN')\, ds_2$$
$$= k_1 U + k_2 V + k_3 W.$$

Nel caso della isotropia nel secondo membro si avrebbe

$$8 \pi \alpha^2 \beta^2 U .$$

Mediante questa formola e le altre due analoghe che in generale si possono stabilire, si può ritenere risoluto *il problema della deformazione del diedro retto, solido, isotropo, oppure cristallizzato in modo che i piani paralleli alle faccie siano piani di simmetria, quando sopra una delle faccie* , $x = 0$, *sono date le componenti*

$$L \ , \ v \ , \ w$$

e sopra l'altra , $y = 0$, *le componenti*

$$u \ , \ M \ , \ w$$

cioè su entrambe le faccie del diedro la componente normale delle forze esterne e le componenti tangenziali degli spostamenti.

Poniamo ora

$$\begin{aligned} u'' &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ v'' &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ w'' &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4 . \end{aligned}$$

Dalle (7) (7′) risulta immediatamente che sulle faccie del diedro già considerato si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} &\text{per } x = 0 : u'' = 0 \ , \ \mathrm{M}'' = 0 \ , \ \mathrm{N}'' = 0 \\ &\text{per } y = 0 : \mathrm{L}'' = 0 \ , \ v'' = 0 \ , \ \mathrm{N}'' = 0 . \end{aligned}$$

Di qui, ripetendo le considerazioni del caso precedente, e coll'applicazione del teorema del Betti, risulta che mediante questi integrali u'', v'', w'' si può risolvere il problema dell'equilibrio del diedro solido già considerato quando sulla faccia $x = 0$ sono date le componenti

$$u \ , \ \mathrm{M} \ , \ \mathrm{N}$$

e sulla faccia $y = 0$ le componenti

$$\mathrm{L} \ , \ v \ , \ \mathrm{N}$$

cioè *su tutta la superficie del diedro la componente normale degli spostamenti, e le componenti tangenziali delle forze.*

Questi due problemi, che possiamo dire correlativi, corrispondono perfettamente ai due problemi risoluti dal Boussinesq nel caso del solido limitato da un piano, e dei quali già abbiamo fatto cenno. Ma nel caso del diedro esistono altri due problemi analoghi, che non hanno i loro corrispondenti nel caso del piano; quando cioè sopra una faccia è data la componente normale delle forze e le tangenziali degli spostamenti, e sull'altra invece la componente normale degli spostamenti e le tangenziali delle forze. Anche questi due problemi possono essere risoluti col nostro metodo. Basta porre

$$\begin{aligned} u''' &= u_1 - u_2 - u_3 + u_4 \\ v''' &= v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \\ w''' &= w_1 - w_2 - w_3 + w_4 \end{aligned}$$

Dalle (7) (7′) risulta subito che si ha:

$$\begin{aligned} &\text{per } x = 0 : \mathrm{L}''' = 0 \ , \ v''' = 0 \ , \ w''' = 0 \\ &\text{per } y = 0 : \mathrm{L}''' = 0 \ , \ v''' = 0 \ , \ \mathrm{N}''' = 0 . \end{aligned}$$

Quindi mediante gli integrali u''', v''', w''' possiamo risolvere il problema dell'equilibrio *quando sulla faccia* $x = 0$ *sono date le componenti* v, w *dello spostamento tangenziale e la componente normale* L *delle forze, mentre*

sulla faccia $y = 0$ *le componenti* L, N *della forza tangenziale e la componente normale* v *degli spostamenti.*

Il problema correlativo si risolve ponendo

$$u^{IV} = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$$
$$v^{IV} = v_1 + v_2 - v_3 - v_4$$
$$w^{IV} = w_1 + w_2 - w_3 - w_4.$$

Si ha infatti dalle (7) (7′):

$$\text{per } x = 0 : u^{IV} = 0 \ , \ M^{IV} = 0 \ , \ N^{IV} = 0$$
$$\text{per } y = 0 : u^{IV} = 0 \ , \ M^{IV} = 0 \ , \ w^{IV} = 0.$$

Quindi si risolverà il problema dell'equilibrio *quando sulla faccia* $x = 0$ *si conosce la componente normale* u *degli spostamenti, e le componenti* M, N *della forza tangenziale; e sulla faccia* $y = 0$ *la componente normale* M *delle forze e le componenti* u, w *degli spostamenti tangenziali.*

È facile vedere che le considerazioni precedenti sono estendibili al caso di un triedro trirettangolo solido, quando i piani paralleli alle sue faccie sono piani di simmetria elastica, il caso cioè dei cristalli del sistema rombico. A tale scopo basterebbe costruire il gruppo di otto terne di integrali che si ottiene dal gruppo (6) con una riflessione sul piano $z = 0$.

Noi non svilupperemo, per ora, i risultati, a cui così si può arrivare; i quali sono facilmente prevedibili e nulla ci apprenderebbero di nuovo circa il metodo di integrazione studiato. Ci basta aver mostrato con alcuni esempî come mediante il principio delle immagini ed il concetto di *gruppo di integrali* delle equazioni d'equilibrio, possa essere di molto aumentata la serie, finora assai limitata, dei problemi di statica elastica, di cui può assegnarsi la soluzione generale in termini finiti.

Mi è grato ricordare che fui condotto ad occuparmi dei problemi precedenti dalla lettura delle due Note del prof. Tedone, pubblicate nei Rendiconti del passato dicembre, riguardanti la deformazione del diedro e del trietro solido isotropo per dati spostamenti alla superficie.

Geologia. — *I terreni eocenici presso Bribir in Croazia* (1). Nota del Socio C. De Stefani e del dott. G. Dainelli.

Nel 1884 il Frauscher (2) determinò una piuttosto numerosa collezione di fossili di Kosavin, presso Bribir, in Croazia, raccolti dal signor Hire, e li riconobbe molto giustamente equivalenti al piano di Roncà, cioè all' Eocene

(1) La parte stratigrafica di questa Nota è del prof. C. De Stefani, la parte paleontologica del dottor G. Dainelli.

(2) C. F. Frauscher. *Die Eocän-Fauna von Kosavin nächst Bribir im kroatischen Küstenlande.* Verhandl. d. k. k. geol. Reichsanstalt. Wien, 1884, pag. 58.

medio, soggiungendo però che nuovi studî si richiedevano per ben determinare la esatta stratigrafia. Egli pertanto citava la seguente successione dall'alto al basso, come gli era stata comunicata dallo stesso signor Hire:

un conglomerato rossastro, ben saldo;
arenaria cenerognola con numerose *Nummulites;*
arenaria grigiastra ricca di fossili, ma che ne diviene priva alla base;
marne turchine;
calcare eocenico bianco giallognolo;
calcare cretaceo.

Il desiderio di rintracciare nelle ligniti del Vinodol, presso Bribir, nell'unico bacino pliocenico del versante adriatico orientale, che sarebbe stato paragonabile ai bacini lacustri del Pliocene italiano, i resti di mammiferi fossili, che il signor Wetzely, aveva trovato nel 1851, ci portò nei dintorni di Kosavin, presso Bribir, nella stessa località indicata da Franscher.

Questa località, come il Vinodol presso Novi, fa parte di un lunghissimo sinclinale, che, principiando per lo meno da Orehovica sulla Rečina, o Fiumara, presso Fiume, seguita appunto fino a Novi, e che comprende anche lo stesso golfo di Buccari-Porto Re. L'anticlinale che lo chiude all'esterno dalla parte del mare, interrotto dalla Fiumara di Fiume, dallo stretto marittimo o Vallone di Buccari, e dalla valle Dubracina verso Crkvenica, è costituito per intero da terreni cretacei, appartenenti in gran parte alla Creta superiore, con *Ostrea Johannae* Choffat, *Radiolites* ed altre bivalvi, e ad essi, specialmente dalla parte di terra, si sovrappongono i calcari dell'Eocene inferiore ad *Alveolina* ed a piccole *Nummulites* (calcare eocenico, bianco giallognolo, del Frauscher) soliti in tutta quanta la estensione della penisola Balcanica. Fra questi calcari ad *Alveolina* e le successive argille eoceniche, sono talora delle arenarie, nell'aspetto almeno identiche a quelle con *Nummulites perforata* di Arbe, di Veglia, e di altri luoghi.

I terreni calcarei cretacei, ma non sempre direttamente i calcari ad *Alveolina*, del resto abbastanza frequenti, occupano l'anticlinale successivo, ad Oriente. La presenza di terreni argillosi eocenici, assai più facilmente erodibili dei calcari, e che occupano il sinclinale, danno a questo la forma di una lunghissima valle longitudinale diretta da N.-O. a S.-E., interrotta però verso il mare nei luoghi sopra indicati. Delle parziali vallette longitudinali traversano con questa stessa direzione il sinclinale: gli spartiacque tra esse, cioè le loro porzioni più elevate, sono coperti da altre frane provenienti dai calcari cretacei ed eocenici, che nascondono il sottosuolo argilloso e che corrispondono al conglomerato rossastro di Frauscher.

Nel terreno cretaceo superiore, tra Selce, sul mare, e Bribir, notansi anche breccie marmoree, ceroidi, bianche, a cemento rossastro, simili ai marmi di Loparo e di Veglia e del Promontorio Garganico; i calcari intorno al bacino di Bribir, ed in parecchi altri punti del sinclinale, come morfologica-

mente scoscendono sovente a picco sopra l' Eocene, così stratigraficamente presentano spesso banchi strapiombanti e fin talora in piccola parte rovesciati sopra l' Eocene stesso. I paeselli della valle stanno appunto per lo più annidati al confine, tra i calcari cretacei, che s' alzano a picco, e i sottostanti banchi dell' Eocene, lievemente ondulati.

L' Eocene, che qua e là, sopre i calcari già detti, occupa il fondo del sinclinale, e nel quale furono trovati dal signor Hire i fossili presso Kosavin, è costituito da argille scure e da marne parimente scure, un poco più compatte, alternanti con un calcare simile al *colombino* toscano e con qualche strato di arenaria, in banchi poco inclinati, che formano colline lievemente ondulate, coperte di bella vegetazione, e qua e là nascoste da frane calcaree recentissime e da terra rossa. In queste argille furono trovati fossili specialmente sulla destra della valle presso al mulino sotto Podugrinac, e più ancora salendo sulla sinistra verso la strada di Kosavin ; tali fossili sono assai perfettamente conservati, isolati, spersi ; ma in certi punti molto abbondanti, comprese anche, cosa ben singolare, le *Nummulites* e le *Assilinae* in ottima conservazione; vi sono anche alcune rarissime ghiaie calcaree forate da Anellidi, e forse da Briozoi e Spongiari. Questa fauna, come si vedrà dall'elenco che facciamo seguire, è di tipo salmastro. Contrassegniamo con un asterisco le specie non indicate da Frauscher, e con un R quelle trovate anche a Roncà:

Tritonidea polygona Lamarck R.
**Natica patulina* Munier-Chalmas R.
Natica parisiensis D'Orbigny R.
**Rostellaria* n. sp.
Cerithium mutabile Lamarck.
Cerithium globulosum Deshayes R.
Cerithium crispum Defrance.
**Cerithium microstoma* Desh.
**Cerithium Bonellii* Deshayes.
**Cerithium* n. sp.
Potamides pentagonatum Schlotheim R.
Potamides calcaratum Brongniart R.
Potamides aculeatum Schlotheim R.
Potamides corrugatum Brongniart R.
Potamides baccatum Brongniart R.
Potamides lemniscatum Brongniart R.
**Turritella imbricataria* Lamarck R.
Melanatria vulcanica Schlotheim R.
**Melanatria undosa* Brongniart R.
**Melanatria* n. sp.

Oltre alle tre specie nuove, di *Rostellaria*, di *Cerithium* e di *Melanatria*, abbiamo ancora riconosciuto due nuove varietà delle specie *Natica parisiensis* D'Orbigny, e *Potamides pentagonatum* Schlotheim, e quattro differenti forme individuali, che si allontanano da quella tipica del *Potamides lemniscatum* Brongniart, dal quale però non abbiamo creduto di separarle nemmeno come semplici varietà. A tale elenco di fossili si aggiunga una **Crassatella*, riconoscibile pel cardine, ma sì mal conservata da rendere impossibile qualsiasi tentativo di determinazione; piccoli esemplari di Coralli, e infine frequenti individui di *Nummulites granulosa* D'Archiac,

Nummulites lucasana Defrance, ed *Assilina exponens* Sowerby. Facciamo seguire l'elenco delle specie indicate da Frauscher, e che noi non abbiamo riconosciute tra i nostri fossili di Bribir:

Auricula ovata Lamarck.
Auricula sp. n.
Conus scabriculus Brand.
Harpa mutica Lamarck.
Voluta digitalina Lamarck.
Voluta cithara Lamarck.
Murex cfr. *plicatilis* Deshayes.
Murex frondosus Lamarck.
Murex asper Brand.
Fusus subcarinatus Lamarck.
Fusus cfr. *muricinus* Deshayes.
Fusus polygonatus Brongniart.
Nassa semistriata Brac.
Buccinum cfr. *obtusum* Deshayes.
Buccinum decussatum Lamarck.
Buccinum cfr. *latum* Deshayes.
Buccinum cfr. *Desorii* Deshayes.
Buccinum n. sp.
Triton sp.
Cassidaria sp.
Rostellaria fissurella Lamarck.
Rostellaria cfr. *Lejeuni* Rouault.
Terebra Vulcani Brongniart.
Cerithium plicatum Brongniart.
Cerithium striatum Defrance.
Cerithium aff. *Defrancii* Deshayes.
Cerithium n. sp.
Ampullina Vulcani Brognniart.
Ampullina ponderosa Deshayes.
Natica canaliculata Deshayes.
Natica Heberti Deshayes.
Natica cfr. *Garnieri* Bayan.
Turritella carinifera Deshayes.
Turritella cfr. *hybrida* Deshayes.
Turritella cfr. *incisa* Brongniart.
Scalaria sp.
Velates Schmideliana Deshayes.
?*Teinostoma* sp.
Turbo trochiformis Deshayes.
Teredo sp.
Cardium sp.
Cyrena Baylei Bayan.
Cyrena cfr. *Veronensis* Bayan.
Chama cfr. *rusticula* Deshayes.
Ostrea sp.
Cidaris sp.
Pachygyra Saurii D'Archiac.
Tecosmilia sp.
Stylocoenia taurinensis Michelotti.
Dendracis sp.
Dendracis sp.
Stylophora conferta Reuss.
Heliastraea immersa Reuss.
Heliastraea sp.
Goniastraea Cocchii D'Ach.
Plocophyllia sp.
Trochocyathus sp.
Trochocyathus sp.
Nummulites Biarritzensis D'Archiac.
Nummulites striata D'Orbigny.

In generale i terreni eocenici del littorale istriano, croato e dalmato fino circa a Sebenico, ricordano quelli delle Alpi Orientali e non quelli dell'Appennino.

Abbiamo esaminato i dintorni delle escavazioni di lignite di Svati Stipan (Santo Stefano), per vedere di raccogliere fossili negli strati pliocenici, donde si dice provengano; ma almeno le collinette ed i piccoli rilievi sulla superficie del suolo sono solamente costituiti dalle argille eoceniche.

Botanica. — *Origine e differenziazione degli elementi vascolari primari nella radice delle Monocotiledoni.* Nota II preventiva del Socio R. Pirotta (1).

Lo sviluppo degli elementi vascolari, sia nel parenchima procambiale che in quello centrale, procede nelle sue linee generali pressapoco allo stesso modo in tutte le radici studiate fino ad ora. Le particolarità che si presentano nei singoli casi saranno esposte nel lavoro per esteso.

Se si segue con cura il successivo differenziamento del cilindro centrale nell'apice vegetativo della radice delle Monocotiledoni collo studio delle sezioni trasversali successive, l'origine e la differenziazione degli elementi vascolari ci si presentano molto chiare.

Nell'estremo apice, sotto la piloriza, in quella regione che viene anche chiamata punto vegetativo caratterizzata dalla formazione di nuove cellule per segmentazione di un gruppo di iniziali, si vede il pleroma costituito da elementi pochi di numero, quasi uniformi, ricchissimi di fitto citoplasma granelloso con grosso nucleo. Queste cellule continuano a segmentarsi, cosicchè un po' più indietro si possono distinguere a costituire il pleroma due gruppi di cellule embrionali, uno centrale ad elementi di regola poligonali in sezione, un po' più grandi, l'altro periferico a cellule più numerose, un po' più piccole, meno regolari, in attiva segmentazione, sopratutto le periferiche. Dalle prime cellule ha origine il parenchima centrale, dalle seconde il parenchima procambiale e il periciclo (fig. 1).

Un poco più lontano dall'apice, nel parenchima centrale comincia la differenziazione delle cellule madri o iniziali degli elementi vascolari centrali. Nel caso più semplice una cellula centrale, che occupa l'asse del cilindro, aumenta rapidamente, quasi improvvisamente di dimensioni, cosicchè spicca sulle altre cellule, e in pari tempo il suo citoplasma comincia a presentare vacuoli, che si fanno sempre più grandi, e in numero maggiore, cosicchè il protoplasto perde quella omogeneità e quell'aspetto granelloso, che caratterizza lo stadio embrionale e diventa più trasparente e meno colorabile (fig. 2).

In altri casi, più frequenti, le cellule iniziali o madri degli elementi dei vasi centrali sono più di una, poche o molte e diversamente distribuite nella massa del parenchima centrale. Allora, a seconda dei casi, la differenziazione delle iniziali ha luogo quasi contemporaneamente su tutta la superficie di sezione, più spesso successivamente benchè a distanza non troppo grande ed in modo non perfettamente regolare. Nel caso in cui le cellule iniziali

(1) Veggasi la Nota I a pag. 49 di questo stesso volume.

sono molte e distribuite per tutto il parenchima centrale, la comparsa loro si fa di regola centrifugamente.

Le iniziali possono continuare a segmentarsi; ma ben presto il processo di segmentazione cessa, dopochè esse sono cresciute più o meno in grossezza, talvolta enormemente, e dopo che il citoplasma ed il nucleo sono scomparsi dalla cavità cellulare. Si formano allora man mano gli elementi definitivi del vaso o dei vasi centrali.

Le cellule embrionali del parenchima procambiale, più piccole di solito di quelle del parenchima centrale e tanto più quanto più si va verso l'esterno, si mantengono più a lungo nello stato embrionale, quindi ricche di contenuto e in attiva segmentazione, in relazione appunto alla più tardiva differenziazione in esse degli elementi vascolari. Mentre le cellule madri dei vasi centrali si stanno differenziando e già spiccano per le loro dimensioni spesso enormi sulle altre cellule circostanti, il parenchima procambiale non presenta, di regola, ancora nessun accenno di differenziazione di elementi del raggio vascolare. Però ad una distanza variabile dal sommo apice, ma sempre più o meno presto dopo la prima differenziazione degli elementi dei vasi centrali, nella parte più interna del parenchima procambiale, in punti determinati per numero e pressapoco equidistanti, alcune cellule cominciano ad aumentare di dimensione ed a differenziarsi in modo analogo a quello sopra indicato per le iniziali dei vasi centrali, cosicchè spiccano presto su tutte le altre cellule del parenchima procambiale, ancora in segmentazione per la loro ampiezza e per la maggior trasparenza. Sono esse i primi elementi dei raggi vascolari, i quali hanno quindi origine all'interno, verso il centro del cilindro centrale (fig. 3). Questa prima differenziazione ha luogo, di solito, quando gli elementi costitutivi del periciclo, pur essendo ben distinti, sono ancora allo stato di segmentazione.

Più tardi, e molto rapidamente, si differenziano man mano e in ordine centrifugo, cioè verso la periferia, addossati più o meno regolarmente al primo comparso, gli elementi, pochi o molti, del raggio vascolare, elementi che sono ordinariamente più piccoli, talvolta molto più piccoli di quelli interni del raggio stesso (fig. 4). Gli elementi più esterni sono accollati alle cellule del periciclo (qualche volta stanno anche nel periciclo). Essi però si differenziano più rapidamente di tutti gli altri elementi vascolari, e le loro pareti ispessiscono e lignificano con molta precocità, quando gli elementi più interni del raggio vascolare e quelli dei vasi centrali non hanno ancora affatto lignificato la loro parete (fig. 5). La lignificazione procede dunque in direzione centripeta, e talvolta tutti gli elementi lignificano abbastanza rapidamente, altra volta quelli dei vasi centrali o anche i più interni dei raggi vascolari molto tardivamente.

Lo studio delle sezioni in serie longitudinali dell'apice vegetativo della radice, completa e conferma quanto sopra si è detto. Dal piccolo gruppo delle

iniziali del pleroma, in corrispondenza della regione costituita dal parenchima centrale si vedono partire, in linea retta se si tratta di vasi assili o mediani, o in linea prima curva verso l'esterno ed il basso, se si tratta di vasi che si formano verso la periferia del parenchima centrale, delle file di cellule spesso regolarissimamente sovrapposte.

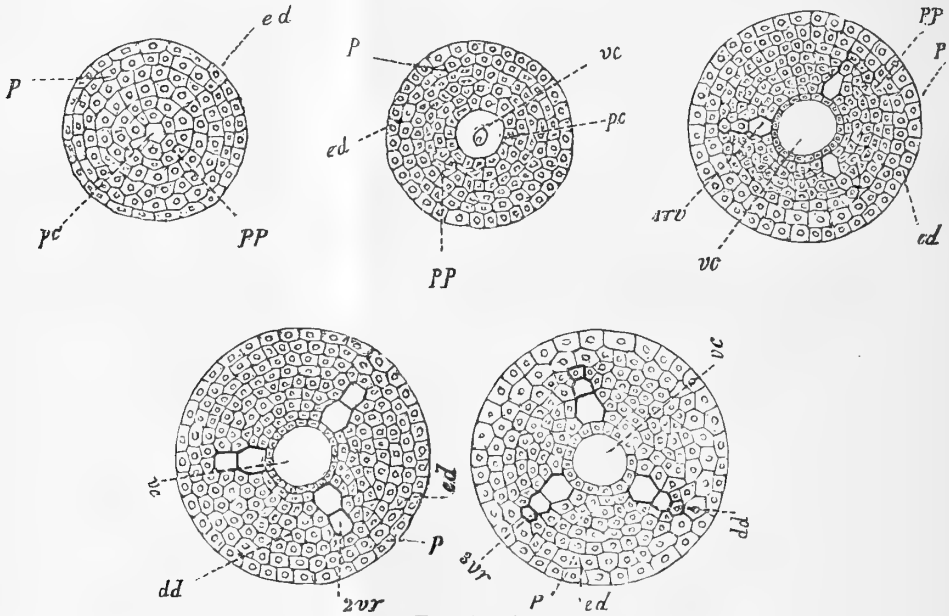


Fig. 1 a 5.

Figure schematiche rappresentanti i principali stadii di sviluppo degli elementi vascolari nel pleroma delle Monocotiledoni: fig. 1-5, sezione trasversale: *ed*, endodermide; *p*, periciclo; *pp*, parenchima procambiale; *pc*, parenchima centrale; *vc*, vaso centrale. 1*rv*, primo elemento vascolare radiale; 2*rv*, 3*rv*, rispettivamente, secondo, terzo elemento vascolare radiale. — Nella figura non sono segnati i tubi cribrosi.

Gli elementi di queste file di cellule, già a piccola distanza dal punto vegetativo, pur continuando a segmentarsi in direzione quasi sempre trasversale, crescono rapidamente di dimensioni trasversali, cosicchè spiccano sulle altre serie di cellule del pleroma (fig. 6). Ogni elemento di questa serie è una cellula madre dell'elemento del vaso centrale. Mentre essi crescono in grossezza, il citoplasma che avvolge il grosso nucleo centrale si scava di vacuoli e diventa sempre più trasparente, cosicchè la serie o le serie spiccano nettamente su tutto il resto della sezione.

Le cellule continuano a crescere, ma ora sopratutto in lunghezza; cosicchè a poca distanza dall'apice diventano più volte, anche molte volte, più lunghe che larghe, pur mantenendo ancora le pareti sottili.

Per tutto questo stadio il parenchima procambiale del pleroma si mantiene in istato di attiva segmentazione trasversale e longitudinale. Soltanto

quando le cellule madri dei grandi vasi sono già molto ampie e svuotate o quasi di citoplasma, cominciano alcune cellule ad ingrandire e ad allungarsi nel modo e nella successione più sopra indicati, e cioè, per ogni raggio vascolare, prima le cellule più interne, poi man mano le più esterne.

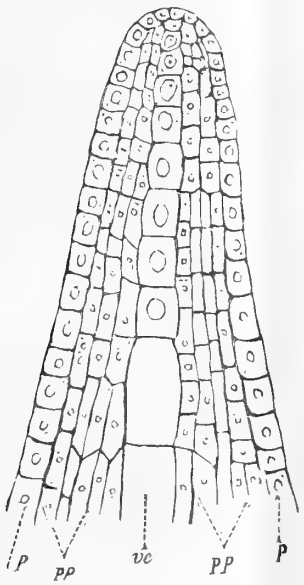


Fig. 6.

Figura schematica rappresentante i principali stadii di sviluppo degli elementi vascolari nel pleroma delle Monocotiledoni: fig. 2, sezione longitudinale, *ed*, endodermide; *p*, periciclo; *pp*, parenchima procambiale; *pc*, parenchima centrale; *vc*, vaso centrale.

Tutte le radici di Monocotiledoni finora studiate offrono le due sorta di elementi vascolari nella loro struttura primaria.

I raggi vascolari variano di numero da due a moltissimi, come variano in ciascun raggio il numero degli elementi che li costituiscono e la loro natura. La loro disposizione è però, di solito, costante e regolare. I più esterni, quelli che compariscono ultimi ma che lignificano prima, sono tracheidi, gli altri più interni che compiscono prima ma lignificano più tardi, sono di regola fusioni cellulari o trachee.

I vasi centrali possono variare non soltanto per il numero, ma anche per la disposizione, in relazione sopratutto colle dimensioni delle radici e col numero dei raggi vascolari. Senza entrare ora in particolari, basterà ricordare i casi principali che sono i seguenti, e presentano del resto tutte le forme di passaggio:

1° Presenza di un unico vaso centrale, che è allora quasi sempre assile (certe Graminacee, Ciperacee, Gigliacee, Amarilidacee, Commelinacee, ecc. ecc.).

2° Parecchi o molti vasi disposti in cerchia più o meno regolare verso la periferia del parenchima centrale, più o meno in relazione, a sviluppo completo, coi raggi vascolari; la porzione centrale è allora o priva di vasi, o presenta talvolta un vaso assile (certe Iridacee, Aracee, Commelinacee, Cannacee, Gigliacee, ecc. ecc.).

3° Numerosi vasi sparsi più o meno irregolarmente per tutta la massa del parenchima centrale (certe Palme, Gigliacee, Aracee, Ciclantacee, Taccacee, ecc. ecc.).

4° Gruppi di vasi (mescolati spesso con tubi cribrosi) sparsi più o meno in tutta la massa del parenchima centrale (certe Aracee, Bambusee fra le Graminacee, Musacee, Pandanacee, Gigliacee, Palme, ecc.).

Di regola nelle Monocotiledoni le radici sono poliarche, cioè provvedute di numerosi raggi vascolari; di rado diarche od oligarche. Nel primo caso ordinariamente i raggi vascolari formano una cerchia verso la periferia e la parte centrale ampia del cilindro centrale è occupata da molti o parecchi vasi centrali. Nel secondo caso i raggi vascolari si avvicinano al centro, dove si trova pochissimo parenchima, e toccano di regola il vaso assile o i pochi vasi centrali, facendo a completo sviluppo l'impressione come se i raggi vascolari si incontrassero al centro del cilindro centrale.

Nelle radici delle Monocotiledoni è caratteristica (benchè non esclusiva) la presenza di due sorta di elementi vascolari; quelli che costituiscono i raggi vascolari, più o meno regolarmente distribuiti e che si riscontrano anche in tutte le altre radici, e si svolgono dentro al parenchima procambiale (qualche volta anche in quello periciclico); quelli centrali, che diversi per numero e per disposizione, si svolgono nel parenchima centrale. Contrariamente all'opinione generalmente seguìta, i primi vasi a differenziarsi sono quelli provenienti dagli elementi centrali; seguono poi gli elementi dei raggi vascolari in direzione centrifuga. Ma gli elementi più esterni, quelli che si credeva si formassero per i primi e che per ciò si ritenne costituissero un cosidetto *protoxilema*, sono però quelli che lignificano prima di tutti gli altri, cosicchè la lignificazione è centripeta.

Nelle radici delle Monocotiledoni non si può parlare di procambio, poichè gli elementi dei raggi vascolari, che sono fasci vascolari semplici, si svolgono per differenziazione diretta dalle cellule embrionali del meristema. Ho dato alla regione in cui essi si formano, il nome di parenchima procambiale per ricordare che in essa si differenziano i fasci vascolari.

La struttura e il modo di sviluppo degli elementi vascolari primarî nelle radici delle Monocotiledoni non sembra possano venire in sostegno della opinione recentemente esposta, all'appoggio del solo studio delle Dicotiledoni, da G. Bonnier intorno all'ordine di formazione degli elementi del cilindro centrale nella radice e nel caule.

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo.* Nota I di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Volterra.

Nel discutere (1) le recenti esperienze sulla convezione elettrica, il prof. Righi lamentava la mancanza di indicazioni precise sugli effetti prodotti dalla presenza di un conduttore in un campo variabile. Egli mi ha allora cortesemente sollecitato a studiare dal punto di vista analitico un caso semplice, che corrisponde schematicamente ad alcuno dei dispositivi usati nelle ricordate esperienze, il caso cioè di una carica elettrica, che si muove di moto uniforme parallelamente a un piano conduttore indefinito.

I risultati, cui sono pervenuto (2), hanno servito al ch. autore (3) per completare quantitativamente alcune intuizioni, che egli aveva soltanto annunziato come probabili e che il calcolo ha in tutto giustificato.

La ricerca non è dunque stata inutile. Ma essa si riferisce pur sempre a fenomeni, pressochè al limite delle quantità osservabili e per cui si richiedono in ogni caso esperienze assai delicate. Mi sono quindi proposto di studiare qualche altra questione, dello stesso tipo, ma più facilmente accessibile al controllo sperimentale.

Si presta bene il caso di una corrente alternativa (di quelle ordinarie, adoperate nell'industria), supposta sinusoidale, rettilinea, indefinita e parallela a uno schermo conduttore.

La ricerca, che ho istituita a questo scopo, sarà, se l'Accademia lo consente, esposta in tre Note.

In questa prima potrò appena (dopo alcune indispensabili premesse) assegnare il campo elettromagnetico di una corrente rettilinea di intensità variabile e porre il problema analitico delle modificazioni, prodotte da una lastra conduttrice parallela alla corrente.

Nella seconda Nota risolverò il problema rigorosamente; e nella terza trasformerò e semplificherò con opportune approssimazioni la soluzione ottenuta, in modo da renderne trasparente il significato fisico.

Ecco un saggio del risultato definitivo.

(1) Nuovo Cimento, ottobre 1901; comunicazione fatta alla Società di Fisica.

(2) In una Memoria, che trovasi presentemente in corso di stampa negli: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Ser. III, T. IV.

(3) Rendiconto della Reale Accademia di Bologna, gennaio 1902.

Sia n la frequenza della corrente; R la resistenza (espressa in unità elettromagnetiche assolute) dell'unità di superficie della lastra conduttrice; d e Δ le distanze della lastra e di un punto qualunque del campo della corrente; $\frac{1}{q} = \frac{R}{4\pi^2 n}$.

Supponiamo di considerare correnti industriali abbastanza frequenti, e lastre abbastanza conduttrici e discoste dalla corrente perchè $\frac{2}{qd} < \frac{1}{10}$ (1).

Si ha allora con sufficiente approssimazione (tanto maggiore quanto più piccolo è $\frac{2}{qd}$, ossia — caeteris paribus — quanto più grande è la frequenza), per i punti che si trovano, rispetto allo schermo conduttore, da banda opposta della corrente:

1.° La fase della forza magnetica differisce di $\frac{\pi}{2}$ da quella, che agirebbe qualora fosse rimosso lo schermo conduttore.

2.° La sua intensità massima, in un punto generico, sta a quella, che competerebbe allo stesso punto, se non ci fosse il conduttore, nel rapporto $\frac{1}{q\Delta}$. Nei punti del piano perpendicolare allo schermo passante per la corrente la forza magnetica è sempre parallela allo schermo e normale alla corrente.

Al crescere della frequenza, e quindi di q, (in causa dell'accennato fattore di riduzione $\frac{1}{q\Delta} \leq \frac{1}{qd}$) lo schermo conduttore tende a intercettare la forza magnetica.

3.° La forza elettrica è trascurabile.

Una verifica sperimentale sarebbe, a mio avviso, particolarmente interessante perchè nei risultati teorici sono implicate ipotesi non ancora messe alla prova dall'esperienza.

Infatti, in questo genere di problemi, non basta la teoria hertziana pura, ma occorre aggiungervi qualche cosa.

È ciò che si fa ricorrendo per es. a una delle teorie integrali di Maxwell o di Helmholtz (completata quest'ultima dall'ipotesi che i potenziali si propaghino colla velocità della luce).

Esse bastano e conducono agli stessi risultati (2).

(1) Per una lastra di rame, dello spessore di 1 millimetro, distante un metro dallo schermo, e una frequenza eguale a 100, si ha a un dipresso:

$$R = 16000,\ 4\pi^2 dn = 400000,\ \frac{2}{qd} = \frac{2R}{4\pi^2 dn} = 0{,}08.$$

(2) Per vero dire, io mi son qui (e nella precedente Memoria) attenuto esclusiva-

Si tratterebbe dunque di controllare un campo, comune bensì a entrambe le teorie integrali, ma non in pari tempo contenuto nel sistema differenziale di Hertz.

1. *Preliminari.* — In un dielettrico indefinito, isotropo, impolarizzabile [1] e in quiete, la cui omogeneità sia interrotta soltanto da alcune sedi Σ (isolate, a una, o a due dimensioni) di cariche e di correnti elettriche, si ha

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} L = \dfrac{dV}{dz} - \dfrac{dW}{dy}, \\ M = \dfrac{dW}{dx} - \dfrac{dU}{dz}, \\ N = \dfrac{dU}{dy} - \dfrac{dV}{dx}; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} X = -\dfrac{dF}{dx} - A\dfrac{dU}{dt}, \\ Y = -\dfrac{dF}{dy} - A\dfrac{dV}{dt}, \\ Z = -\dfrac{dF}{dz} - A\dfrac{dW}{dt}, \end{cases}$$

dove L, M, N; X, Y, Z designano al solito le componenti delle forze magnetica ed elettrica (valutate in unità elettrostatiche) rispetto ad un sistema di assi fissi orientati come in figura; A l'inversa della velocità della luce; F e (U, V, W) i potenziali elettrico e vettore, *ritardati* (cioè propagantisi con velocità $\frac{1}{A}$).

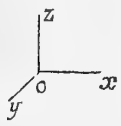


Fig. 1.

Nella loro qualità di potenziali ritardati, F, U, V, W soddisfanno alle equazioni

$$\text{(III)} \qquad \Box F = 0, \ \Box U = 0, \ \Box V = 0, \ \Box W = 0$$

$$\left(\Box \equiv \Delta_2 - A^2 \frac{d^2}{dt^2} \right),$$

e si comportano nei punti delle Σ come potenziali ordinarî delle distribuzioni corrispondenti. A priori queste possono essere qualunque, purchè soltanto (oltre a ovvie condizioni di continuità, di derivabilità ecc.) sia soddi-

---

mente alla teoria di Helmholtz. Ho però verificato che la teoria di Maxwell porterebbe ad espressioni identiche per le forze elettromagnetiche.

Questo risultato sta in generale per un campo e per un conduttore qualunque. Mi si passi per ora l'asserzione, che mi propongo di giustificare quanto prima.

[1] Di cui cioè si suppongono eguali all'unità le costanti di dielettricità e di magnetismo (potere induttore specifico e permeabilità magnetica).

sfatto il principio di conservazione dell'elettricità. Tra i potenziali ne consegue la relazione

$$\text{(IV)} \qquad A\frac{dF}{dt}+\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}=0,$$

che equivale d'altronde completamente all'accennato principio.

In virtù delle (III), (IV), le espressioni (I), (II) delle forze elettromagnetiche verificano identicamente le equazioni di Hertz (1).

È questa in sostanza la teoria conciliata di Helmholtz-Hertz.

2. *Campo elettromagnetico dovuto al tratto di corrente compreso fra un generatore e un collettore.* — Sia in O_1 il generatore, in O_2 il collettore. Supponiamo che la corrente si trasmetta da O_1 ad O_2 lungo un filo rettilineo (assimilabile al segmento O_1O_2). Sieno $y=o$, $z=d$ le equazioni della retta O_1O_2; $-l_1, o, d$; l_2, o, d le coordinate di O_1 e di O_2 ($d, l_1, l_2>0$); x, y, z le coordinate del punto potenziato P; x', o, d quelle di un generico punto (potenziante) P′ del segmento O_1O_2; $u(t)$ l'intensità della corrente in un punto determinato del filo, $x'=0$ per es., misurata in unità elettrostatiche (talchè $Au(t)$ ne è la misura in unità elettromagnetiche).

Limitandoci per semplicità al caso di una propagazione senza smorzamento con velocità eguale a quella della luce (2), l'analoga intensità in un altro punto qualunque P′ sarà $u(t-Ax')$.

Designiamo ancora con $e(x', t)$ la densità (lineare) della distribuzione elettrica nei punti P′ interni al segmento O_1O_2, con $E_1(t)$, $E_2(t)$ le cariche isolate degli estremi O_1, O_2.

La conservazione dell'elettricità esige che sia, come tosto si riconosce,

$$\frac{de}{dt}+\frac{du}{dx'}=0;$$

$$\frac{dE_1}{dt}=-u(t+Al_1), \quad \frac{dE_2}{dt}=u(t-Al_2).$$

(1) Per la dimostrazione veggasi la Nota: *Sulla riducibilità* ecc., Nuovo Cimento, agosto 1897, o, in forma semplificata (per mezzi impolarizzabili come quello, di cui qui si tratta), il primo capitolo della citata Memoria degli Annali di Tolosa.

In entrambi questi lavori la dimostrazione è data per distribuzioni continue (a tre dimensioni) di cariche e di correnti, ma, per le ragioni esposte al n. 9 della Memoria stessa, vi è implicita l'estensione a distribuzioni di qualsiasi natura, senza bisogno di verifiche dirette (sul tipo di quella, che — per le distribuzioni a due dimensioni — trovasi inserita nella Nota del Cimento).

(2) Questa ipotesi è molto opportuna per semplificare i calcoli, ma è chiaro che qualunque legge di propagazione, per cui l'intensità variasse pochissimo con x' condurrebbe sensibilmente agli stessi risultati, finchè si tratta di fenomeni svolgentisi in un campo ristretto (rispetto alla velocità della luce).

Da $\frac{de}{dt} + \frac{du}{dx'} = 0$ segue $e = \mathrm{A}u +$ una funzione arbitraria di x', che, senza pregiudizio della generalità, si può supporre eguale a zero. (In caso diverso non c'è che da aggiungere alla forza elettrica la componente dovuta a questa distribuzione *statica*).

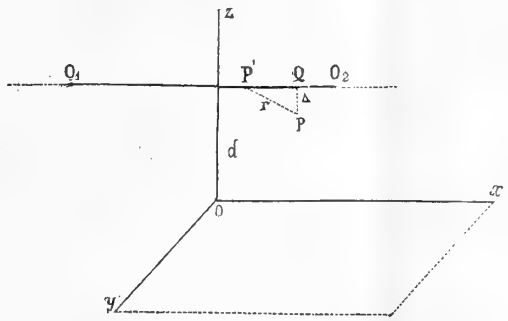


Fig. 2.

Ciò posto, i potenziali ritardati, relativi a un generico punto potenziato P, hanno le espressioni seguenti:

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}\int_{-l_1}^{l_2} \frac{u(t - \mathrm{A}x' - \mathrm{A}r)}{r}\, dx' , \quad \mathrm{V} = 0 , \quad \mathrm{W} = 0 ;$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{U} + \frac{\overline{\mathrm{E}}_1}{r_1} + \frac{\overline{\mathrm{E}}_2}{r_2} ,$$

r , r_1 , r_2 designando le distanze $\overline{\mathrm{PP}'} , \overline{\mathrm{PO}_1} , \overline{\mathrm{PO}_2} ; \overline{\mathrm{E}}_1 , \overline{\mathrm{E}}_2$ ciò che divengono $\mathrm{E}_1 , \mathrm{E}_2$ quando si cambia t in $t - \mathrm{A}r_1$, $t - \mathrm{A}r_2$ rispettivamente.

3. *Caso limite di un filo rettilineo indefinito.* — Per passare al limite, conviene aggiungere, circa la funzione u, la condizione suppletoria che abbia un senso l'integrale

$$\int \frac{u(t - \mathrm{A}x - \mathrm{A}\lambda) - u(t - \mathrm{A}x)}{\lambda}\, d\lambda$$

esteso fino all'infinito da un limite inferiore qualunque ($>$, o anche $= 0$, poichè la funzione sotto il segno resta finita anche per $\lambda = o$).

Consideriamo per un momento ancora il caso di un tratto finito.

Sia Δ la distanza di P dal filo, talchè

$$r^2 = (x' - x)^2 + \Delta^2 , \quad r_1^2 = (l_1 + x)^2 + \Delta^2 , \quad r_2^2 = (l_2 - x)^2 + \Delta^2 .$$

Ponendo

$$\lambda = r + x' - x\,,$$
$$\lambda_1 = r_1 - l_1 - x = \frac{\mathcal{A}^2}{r_1 + l_1 + x}\,, \quad \lambda'_1 = r_1 + l_1 + x\,,$$
$$\lambda_2 = r_2 + l_2 - x\,,$$
$$\mathcal{A} = \frac{u(t - \mathrm{A}x - \mathrm{A}\lambda) - u(t - \mathrm{A}x)}{\lambda}\,,$$

e assumendo come variabile di integrazione λ al posto di x', potremo scrivere:

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{A}\,d\lambda + \mathrm{A}u(t - \mathrm{A}x)\log(\lambda'_1\,\lambda_2) + 2\mathrm{A}u(t - \mathrm{A}x)\log\frac{1}{\mathcal{A}}\,.$$

A norma delle (I), (II), l'aggiunta ad U di una funzione f del solo argomento $t - \mathrm{A}x$ non reca alcun contributo alla forza magnetica, mentre incrementa di $-\mathrm{A}\dfrac{df}{dt}$ la componente X della forza elettrica. Se si aggiunge anche ad F la stessa funzione f, il campo rimane evidentemente inalterato.

È dunque indifferente risguardare come potenziali ritardati del tratto di corrente $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$, U ed F, ovvero per es.

$$\mathrm{U}' = \mathrm{U} - \mathrm{A}\int_0^{\infty} \mathcal{A}\,d\lambda - \mathrm{A}u(t - \mathrm{A}x)\log(l_1\,l_2) =$$
$$= \mathrm{A}\left\{-\int_0^{\lambda_1} \mathcal{A}\,d\lambda - \int_{\lambda_2}^{\infty} \mathcal{A}\,d\lambda + u(t - \mathrm{A}x)\log\frac{\lambda'_1}{l_1}\frac{\lambda_2}{l_2}\right\} + 2\mathrm{A}u(t - \mathrm{A}x)\log\frac{1}{\mathcal{A}}\,,$$
$$\mathrm{F}' = \mathrm{U}' + \frac{\overline{\mathrm{E}_1}}{r_1} + \frac{\overline{\mathrm{E}_2}}{r_2}\,.$$

Queste espressioni presentano sulle prime il vantaggio di ammettere limiti finiti, quando sorgente e collettore tendono all'infinito.

Infatti, per l_1, l_2 convergenti comunque all'infinito, λ_1 tende a zero, λ'_1, λ_2, r_1, r_2 all'infinito, $\dfrac{\lambda'_1}{l_1}$, $\dfrac{\lambda_2}{l_2}$ all'unità, mentre (per l'ipotesi fatta circa la funzione u) $\overline{\mathrm{E}_1}$, $\overline{\mathrm{E}_2}$ restano finiti.

È chiaro allora che la quantità in parentesi nell'espressione di U' ha per limite zero, e così $\dfrac{\overline{\mathrm{E}_1}}{r_1} + \dfrac{\overline{\mathrm{E}_2}}{r_2}$.

I potenziali del campo sono pertanto

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{U}' = 2\mathrm{A}\,u\,(t - \mathrm{A}\,x)\log\dfrac{1}{\mathcal{A}}\,, \quad \mathrm{V}' = 0\,, \mathrm{W}' = 0\,; \\ \mathrm{F}' = \mathrm{U}'\,, \end{cases}$$

e le componenti delle forze magnetica ed elettrica, posto per brevità $Au(t - Ax) = I$,

$$(2) \qquad \begin{cases} 0 \ , & 2I\frac{z-d}{\Delta^2} \ , & -2I\frac{y}{\Delta^2}; \\ 0 \ , & 2I\frac{y}{\Delta^2} \ , & 2I\frac{z-d}{\Delta^2}. \end{cases}$$

Allo stesso risultato si arriva, con ovvie modificazioni, se si suppone che sia integrabile (da un limite inferiore > 0) fino all' ∞ la funzione

$$\Delta' = \frac{u(t - Ax - A\lambda)}{\lambda} \ ,$$

anzichè la Δ.

La condizione (integrabilità della funzione Δ, ovvero della funzione Δ', in un intervallo estendentesi fino all'infinito), sotto cui sono state dimostrate queste formule, è in particolare soddisfatta per correnti costanti $I = I_0$ (si ha allora $\Delta = 0$), e per correnti sinusoidali $I = I_0 \operatorname{sen}\{2\pi n(t - Ax) + \alpha\}$ (I_0, n, α costanti), essendo allora integrabile fino all' ∞ la funzione Δ'.

In generale, se si bada che I altro non è che l'intensità (in misura elettromagnetica) della corrente nel punto Q (piede della perpendicolare abbassata dal punto potenziato P sulla corrente), si può concludere:

Le forze elettromagnetiche, dovute a una corrente rettilinea indefinita, comunque variabile, sono, in un generico punto P del campo, quelle stesse, che proverrebbero da una corrente costante di intensità eguale a quella, che è relativa al punto Q e all'istante considerato [1].

4. *Generalità sul modo di valutare l'influenza di uno schermo conduttore.* — Per tener conto degli effetti, prodotti dalla presenza di un conduttore sopra un campo elettromagnetico assegnato, basta evidentemente aggiungere ai potenziali del campo i contributi provenienti dalle distribuzioni (di cariche e di correnti), che si destano per induzione sul conduttore.

Designino F', U', V', W' i potenziali del campo dato [i quali devono naturalmente soddisfare alle equazioni (III) e (IV)], F_1, U_1, V_1, W_1 quelli (a priori incogniti), che provengono dalle distribuzioni indotte.

Per determinare F_1, U_1, V_1, W_1 — oltre a ovvie condizioni, iniziali o qualitative, di continuità, di regolarità, di comportamento all'infinito, ecc., che per brevità lascio di specificare — abbiamo:

a) le equazioni (III) e (IV), relative, possiamo dire, alla quaderna F_1, U_1, V_1, W_1;

b) le equazioni, che esprimono la legge di Ohm per la superficie conduttrice.

[1] Cfr. Poincaré, *Les oscillations électriques*, pag. 144.

Supponiamo addirittura che quest'ultima sia il piano conduttore $z = o$.

Sia R la resistenza dell'unità di superficie, espressa in unità elettromagnetiche (e quindi $A^2 R$ la misura della stessa resistenza in unità elettrostatiche). Sieno u_1 e v_1 le componenti delle correnti indotte (w_1 e quindi W_1 sono evidentemente nulli).

Le equazioni in questione (relative, si intende bene, al piano $z = o$) si scriveranno:

$$X = A^2 R u_1 \ , \ Y = A^2 R v_1 \ .$$

Le espressioni di X , Y sono a ricavarsi dalle (II), tenendo conto che

$$F = F' + F_1 \ , \ U = U' + U_1 \ , \ V = V' + V_1 \ , \ W = W' \ .$$

Dacchè U_1 e V_1 si comportano come ordinarî potenziali di densità Au_1 , Av_1 , si avrà dalla nota formula, che caratterizza le discontinuità delle derivate normali,

$$Au_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{dU_1}{d|z|} \quad , \quad Av_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|} \ ,$$

designando con $|z|$ il valore assoluto di z e convenendo d'ora innanzi di risguardare F_1 , U_1 , V_1 come funzioni di $|z|$, anzichè di z, ciò che è evidentemente giustificato dalla necessaria simmetria di queste funzioni rispetto al piano $z = o$.

Le precedenti equazioni divengono così:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d(F' + F_1)}{dx} + A \dfrac{d(U' + U_1)}{dt} = \dfrac{AR}{2\pi} \dfrac{dU_1}{d|z|} \ , \\ \dfrac{d(F' + F_1)}{dy} + A \dfrac{d(V' + V_1)}{dt} = \dfrac{AR}{2\pi} \dfrac{dV_1}{d|z|} \ . \end{cases}$$

Sarebbe facile dimostrare che, tenendo conto di tutto, F_1 , U_1 , V_1 rimangono univocamente determinati.

Ma non è ora il momento di occuparsi di teoria generale. Per il problema, che dobbiamo risolvere, l'accennata univoca esistenza risulterà a posteriori dalla effettiva determinazione delle incognite.

Lo vedremo in una prossima Nota.

Elettrochimica. — *Misura della diffusione elettrolitica, dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni.* Nota II di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio A. COSSA.

In una Nota inserita in uno dei fascicoli precedenti di questi Rendiconti, sviluppai un metodo per la misura diretta del coefficiente di diffusione e dei numeri di trasporto degli elettroliti e per la conseguente deduzione delle mobilità dei ioni nel caso della dissociazione completa dell'elettrolito. Mi propongo in questa Nota di estendere la teoria esposta, e quindi il metodo di misura, al caso più generale in cui l'elettrolito non sia completamente dissociato. Siccome il metodo esposto è specialmente conveniente per lo studio dell'influenza della concentrazione sulla diffusione e sul trasporto dei ioni, questa generalizzazione sarà certamente utile, perchè ci permetterà di eseguire le misure con soluzioni più concentrate di quelle supposte precedentemente.

Teoria per una soluzione concentrata di un solo elettrolito. — Applicando la legge elementare di Fick per l'idrodiffusione e conservando le notazioni impiegate nella Nota precedente, potremo facilmente stabilire l'equazione differenziale del fenomeno della diffusione in una soluzione di un elettrolito non completamente dissociato. Infatti, se noi ammettiamo che la concentrazione in un punto qualsiasi basti a definire lo stato di quella soluzione in quel punto, cioè il numero totale delle monadi ed il rapporto fra il numero delle molecole dissociate e quelle non dissociate, si deduce immediatamente che la quantità di sostanza S che si diffonderà attraverso la sezione q del cilindro, nell'unità di tempo sarà:

$$S = - D_1 q \frac{\partial c}{\partial x} + i\varepsilon(1 - n).$$

Il coefficiente D_1 avrà qui un valore dipendente in generale dal grado della dissociazione e sarà quindi differente dai coefficienti D e D′ precedentemente considerati. Il numero di trasporto n relativo al catione conserverà qui il significato attribuitogli da Hittorf, essendo esso indipendente dal grado di dissociazione. Esso sarà cioè il rapporto fra la quantità del catione passata dallo spazio anodico al catodico e la quantità di catione deposto. Procedendo nel modo consueto si dedurrà per il fenomeno della diffusione, l'equazione:

$$(1) \qquad \frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

I fenomeni che avvengono agli elettrodi ci forniranno come al solito due delle condizioni necessarie alla determinazione della soluzione dell'equazione (1). Sapendo infatti che il fenomeno della diffusione avviene come se dall'elettrodo $x = 0$ uscisse e dall'elettrodo $x = L$ entrasse nello strato di liquido la quantità $i\varepsilon(1 - n)$ di elettrolito nell'unità di tempo, potremo affermare che la soluzione della (1) dovrà soddisfare alle condizioni:

$$\left(D_1 \frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} = i\varepsilon(1 - n) \quad \text{per ogni tempo;} \tag{2}$$

$$\left(D_1 \frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=L} = i\varepsilon(1 - n) \quad \text{per ogni tempo.} \tag{3}$$

Infine, supponendo come precedentemente uniforme la concentrazione iniziale avremo:

$$c = c_0 \quad \text{per } t = 0. \tag{4}$$

Per potere integrare quest'equazione ci è utile di introdurre una ipotesi semplificativa, però in perfetto accordo colle condizioni esperimentali. Abbiamo precedentemente veduto e si può facilmente dimostrare anche nel caso attuale, che diminuendo la distanza fra i due elettrodi, possiamo rendere arbitrariamente piccole le differenze di concentrazione, che si riscontrano nel nostro elettrolito. Potremo così giungere ad un limite in cui praticamente saranno trascurabili le variazioni del coefficiente D_1 e di n nell'intervallo di concentrazioni considerato e quindi integrare l'equazione (1) supponendo in essa e nelle condizioni espresse dalle equazioni (2), (3) e (4) i valori di D_1 ed n costanti.

Questa semplificazione è completamente lecita, quando però si possano sperimentalmente realizzare, come nel caso nostro, le condizioni supposte dalla teoria. Questo artifizio fu spesso impiegato in tutti i rami della fisica e diede sempre buoni risultati, quando le condizioni sperimentali erano tali da giustificarlo.

Lo stato stazionario della concentrazione per una corrente di intensità i si deduce come per il caso considerato nella Nota precedente; si avrà quindi:

$$c_s = c_0 + \frac{i\varepsilon(1 - n)}{D_1 q}\left(x - \frac{L}{2}\right). \tag{5}$$

Agli elettrodi si avrà:

$$\text{Catodo:} \quad (c_s)_{x=0} = c_0 - \frac{i\varepsilon(1 - n)}{D_1 q}\frac{L}{2}$$

$$\text{Anodo:} \quad (c_s)_{x=L} = c_0 + \frac{i\varepsilon(1 - n)}{D_1 q}\frac{L}{2}.$$

Lo stato variabile delle concentrazioni quando, dopo aver raggiunto lo stato stazionario, si interrompa la corrente e si assuma quell'istante come

lo zero del tempo, si dedurrà in modo identico a quello impiegato nella Nota precedente, e si avrà quindi:

$$(6)\quad c = c_0 - \frac{4}{\pi^2}\frac{i\varepsilon(1-n)}{D_1 q} L\left\{e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t}\cos\frac{\pi}{L}x + \frac{1}{9}e^{-9\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t}\cos\frac{3\pi}{L}x + \cdots\right\}$$

Ai due elettrodi le concentrazioni saranno:

$$\text{Catodo:}\quad (c)_{x=0} = c_0 - \frac{4}{\pi^2}\frac{i\varepsilon(1-n)}{D_1 q} L\left\{e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t} + \frac{1}{9}e^{-9\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t} + \cdots\right\}$$

$$\text{Anodo:}\quad (c)_{x=L} = c_0 + \frac{4}{\pi^2}\frac{i\varepsilon(1-n)}{D_1 q}\left\{e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t} + \frac{1}{9}e^{-9\frac{\pi^2 D_1 t}{L^2}} + \cdots\right\}.$$

Per avere la forza elettromotrice della pila a concentrazione costituita dal nostro sistema elettrolitico, applichiamo come nel caso precedente la teoria osmotica della pila di Nernst, tenendo però conto della dissociazione incompleta. Indichiamo con α il grado di dissociazione e con k il numero dei ioni in cui una molecola si decompone; $1 + (k-1)\alpha$ sarà il fattore i' di Van 't Hoff. La forza elettromotrice allora, nelle ipotesi restrittive fatte relativamente alla variazione di α, sarà data dalla nota formula:

$$E = -0{,}0000866\frac{i'}{n'}\frac{v}{u+v} T \ln\frac{(c)_{x=L}}{(c)_{x=0}} \text{ Volta.}$$

Sostituendo ad i' e a $\frac{u+v}{v}$ i loro valori si avrà:

$$(7)\qquad E = -0{,}0000866\frac{1+(k-1)\alpha}{n'}(1-n) T \ln\frac{(c)_{x=L}}{(c)_{x=0}} \text{ Volta.}$$

Sostituendo in seguito per c i valori dedotti, sia per lo stato stazionario, sia per quello variabile e sviluppando il logaritmo come precedentemente, avremo rispettivamente per lo stato stazionario:

$$(8)\qquad E_s = 0{,}0001732\frac{1+(k-1)\alpha}{n' c_0}\frac{(1-n)^2}{D_1} T\frac{i\varepsilon L}{q} \text{ Volta}$$

e per lo stato variabile, dopo un tempo sufficientemente lungo:

$$(9)\quad E = 0{,}0001732,\frac{1+(k-1)\alpha}{n' c_0}\frac{8}{\pi^2}\frac{i\varepsilon L}{q} T\frac{(1-n)^2}{D_1} e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t} \text{ Volta.}$$

Quest'ultima formula vale naturalmente solo quando sia trascorso un tempo sufficientemente lungo dall' interruzione della corrente.

Finalmente determinando i decrementi logaritmici della forza elettromotrice per l'intervallo di tempo Δt avremo:

$$\ln \frac{(E)_t}{(E)_{t+\Delta t}} = \frac{\pi^2}{L^2} D_1 \Delta t \,. \tag{10}$$

Mediante le formule (8) e (10) potremo in modo identico a quello impiegato precedentemente, dedurre dalle osservazioni fatte i valori di D_1 e di n, valevoli per la concentrazione c_0 e per il grado di dissociazione α dell'elettrolito impiegato. Il valore di α si potrà determinare con uno qualsiasi dei soliti metodi, per esempio molto comodamente col metodo della misura delle conducibilità molecolari.

Le semplificazioni che noi abbiamo finora introdotte nello sviluppo della teoria corrispondono a condizioni sperimentali, che possiamo realizzare con qualsiasi grado di approssimazione.

Il metodo si presta quindi assai bene alla misura dei numeri di trasporto e del coefficiente di diffusione degli elettroliti disciolti. Vedremo in seguito come l'esperienza confermi la teoria.

Se però ci proponiamo di giungere alla determinazione delle mobilità U e V dei ioni, dobbiamo entrare in un campo assai più ipotetico ed incerto.

L'incertezza però non è inerente al metodo di misura, ma all'applicazione della teoria osmotica a soluzioni non estremamente diluite. Siccome però quasi tutte le teorie della chimica moderna sono affette da questa inesattezza, credo non del tutto prive d'interesse le poche considerazioni seguenti, quantunque meno rigorose.

Esprimiamo dapprima la quantità di elettrolito, che si diffonde nell'unità di tempo attraverso la sezione q del nostro cilindro per l'azione delle sole forze della diffusione, prendendo a base la teoria osmotica delle soluzioni, invece della legge di Fick, per quanto riguarda la parte di elettrolito dissociato. Supponendo per semplicità l'elettrolito binario ed indicando con α il grado di dissociazione e con p' la pressione osmotica dovuta alle molecole dissociate, la quantità S' di elettrolito dissociato che si diffonderà, sarà data, per le note considerazioni di Nernst, dall'equazione:

$$S' = -\frac{2UV}{U+V} q \frac{\partial p'}{\partial x} \,.$$

Se supponiamo la soluzione abbastanza diluita per potere applicare ad essa l'eguaglianza fondamentale della teoria osmotica delle soluzioni:

$$p'v = RT \,,$$

allora potremo eliminare la pressione p' introducendo in sua vece la corrispon-

dente concentrazione c'; si avrà:

$$S' = -\frac{2UV}{U+V} R T q \frac{\partial c'}{\partial x}.$$

Applicando poi la legge di Fick alla diffusione delle molecole non dissociate, aventi la concentrazione c'', ed indicando con D'' il coefficiente di diffusione di esse, definito nel modo consueto, si avrà:

$$S'' = -D'' q \frac{\partial c''}{\partial x}.$$

Ma indicando con c la concentrazione totale dell'elettrolito, sarà:

$$c' = \alpha c \quad \text{e} \quad c'' = (1-\alpha) c.$$

La quantità totale di elettrolito che si diffonde attraverso la superficie q nell'unità di tempo sarà così:

$$(11) \qquad S = -\left\{\alpha \frac{2UV}{U+V} RT + (1-\alpha) D''\right\} q \frac{\partial c}{\partial x}.$$

La quantità fra parentesi sarà quindi il coefficiente di diffusione dell'elettrolito per il grado α di dissociazione; esso sarà eguale a quello che abbiamo dedotto sperimentalmente ed indicato con D_1 nella teoria precedente.

In un intervallo di concentrazioni in cui si possa ritenere D'', U e V costanti, eseguendo due determinazioni di D_1 per i gradi di dissociazione α' ed α'', si potrà determinare separatamente D'' e $\frac{2UV}{U+V}$.

Si avrà infatti, indicando con D_1' e D_2'' i due valori del coefficiente di diffusione totale dedotti:

$$D_1' = \alpha' \frac{2UV}{U+V} RT + (1-\alpha') D''$$

$$D_1'' = \alpha'' \frac{2UV}{U+V} RT + (1-\alpha'') D''.$$

Quindi:

$$(12) \qquad \frac{2UV}{U+V} = \frac{D_1'(1-\alpha'') - D_1''(1-\alpha')}{\alpha' - \alpha''}, \quad D'' = \frac{D_1'\alpha'' - D_1''\alpha'}{\alpha'' - \alpha'}.$$

Servendosi poi del valore di n precedentemente dedotto e che nell'ipotesi della costanza di U e V sarà pure costante fra i gradi di dissociazione α' ed α'', potremo calcolare le quantità U e V. Si osservi, che l'esattezza che si può raggiungere in questa misura, può essere in alcuni casi assai limitata, perchè le quantità volute sono espresse come differenze di altre

quantità che possono essere assai grandi. In alcuni casi perciò converrà limitarsi alla determinazione del numero di trasporto e calcolare poi U e V, determinando separatamente le conducibilità molecolari e servendosi della legge di Kohlrausch.

Esempio esperimentale. — Consideriamo come esempio alcune misure eseguite su soluzioni di solfato di zinco più concentrate di quella impiegata nell' esperienza riportata nella Nota precedente. Il grado di dissociazione ammesso concorda perfettamente con quello misurato da Arrhenius.

Dal decremento logaritmico delle forze elettromotrici si calcolano, mediante la formula (10), i valori di D_1. Allora si può dai valori osservati per le forze elettromotrici stazionarie calcolare i valori di $1 - n$ e quindi di n, servendosi della formula (8).

Nella seguente tabella sono riuniti i risultati di una serie di misure. Nella prima colonna (c) sono riportati i valori delle concentrazioni in gr. mol. per litro; nella seconda l'intensità della corrente in amp.; nella terza colonna (E_s) i valori osservati della forza elettromotrice stazionaria espressi in Volta; nella quarta i valori medi dei decrementi logaritmici (Δ); nella seguente i valori calcolati del coefficiente di diffusione totale (D_1); nella sesta il grado di dissociazione (α) misurato; nella nona il valore di ($1 - n$) calcolato.

Nella settima (A) ed ottava (B) colonna sono riportati rispettivamente i valori di $\frac{2UV}{U+V}$ RT e di D''; nelle due ultime poi i valori dedotti di U e V.

Per passare da questi ultimi ai valori relativi delle mobilità u e v, basta ricordare che la relazione fra di essi è:

$$U = u \quad 1{,}036 \quad 10^{-13} \qquad V = v \quad 1{,}036 \quad 10^{-13}.$$

c	i	e_s	Δ	D_1	α	A	B	$1-n$	U	V
1/2000	$1{,}05.10^{-4}$	0.00968	0,06805	$4{,}60.10^{-6}$	0,90	—	—	0,735	—	—
1/1000	$2{,}21.10^{-5}$	0,01025	0,06070	4,10 „	0,80	$5{,}10.10^{-6}$	$0{,}06{,}10^{-6}$	0,713	$28{,}2.10^{-13}$	$70{,}0.10^{-13}$
1/500	$4{,}54.10^{-4}$	0,01055	0,05775	3,90 „	0,76	5,12 „	0,10 „	0,704	28,8 „	68,4 „
1/200	$1{,}30.10^{-3}$	0,01107	0,05180	3,51 „	0,66	4,88 „	0,083 „	0,686	28,2 „	61,7 „
1/100	$2{,}59.10^{-3}$	0,01160	0,04704	3,18 „	0,58	4,97 „	0,075 »	0,666	29,8 »	59,5 „
1/50	$5{,}22.10^{-3}$	0,01140	0,04580	3,10 „	0,51	3,70 »	0,25 „	0,651	23,0 »	43,5 „
1/20	$1{,}40.10^{-2}$	0,01145	0,04305	2,91 „	0,43	4,13 „	0,18 »	0,636	25,7 »	35,3 »

Come si vede le variazioni dei coefficienti di diffusione e dei numeri di trasporto risultano perfettamente regolari. I valori di essi sono determinati con un grado elevato di precisione. È pure assai preciso il valore che si

ottiene per $2\frac{UV}{U+V}RT$ (colonna A), mentre invece non si può ritenere che esatto relativamente all'ordine di grandezza il valore di D'' (colonna B).

I valori di U e V non vengono però influenzati da questa incertezza. Essi sono quindi un po' meno esatti dei valori di $(1-n)$, ma sono però di gran lunga più esatti dei valori di D''.

I precedenti risultati sono sufficienti per dimostrare l'attuabilità pratica di questo metodo di misura. Essi non possono però ancora riguardarsi come esempio di tutta l'esattezza cui si può giungere, perchè le misure furono eseguite cogli apparecchi di cui si disponeva e che non erano certamente i più convenienti.

Mi riservo di dare fra breve tempo una serie di misure eseguite con apparecchi speciali, e di dedurne allora alcune importanti conseguenze sperimentali.

Fisica terrestre. — *Propagazione dei terremoti.* Nota di GIULIO GRABLOVITZ, presentata dal Socio BLASERNA.

Il problema della propagazione dei terremoti è da lungo tempo oggetto di ricerche da parte degli studiosi di geodinamica, senza aver raggiunto ancora una favorevole soluzione; il che se da una parte è da ascriversi alle imperfezioni degli strumenti e dei dati, specialmente in quanto concerne la precisione cronometrica, d'altra parte è dovuto all'indole stessa del fenomeno che, nelle odierne condizioni della registrazione, si presenta in modo vago e spesso mal definito.

Senza fare distinzione d'apparecchi, nè discutere le ragioni del loro differente comportamento, è fuor di dubbio che dal complesso delle registrazioni ottenute coi metodi moderni emergono tre fasi principali, le quali riescono ben distinte nei terremoti di lontana provenienza, confuse in quelli meno lontani, sovrapposte nei vicinissimi; fra quelli il tipo per noi più comune e frequente è quello dei terremoti giapponesi, che all'ingrosso si presentano con le seguenti fasi:

1) Impulsi rapidi che giungono in Italia circa un quarto d'ora dopo il principio del terremoto all'epicentro e si protraggono per parecchi minuti.

2) Moti rallentati più ampî dei precedenti, 10 minuti dopo, ossia 25 minuti dopo il principio all'epicentro.

3) Ingresso d'oscillazioni lente (periodo 15 secondi) 30 minuti dopo la prima fase o 45 dopo il principio all'epicentro; queste oscillazioni raggiungono ordinariamente la loro massima ampiezza da 5 a 10 minuti dopo il loro ingresso e vengono precedute da oscillazioni lentissime (periodo 1 minuto) di poca ampiezza rivelate da strumenti di squisitezza speciale.

Questa terza fase si protrae a volte qualche ora, senza che se ne possa precisare l'estinzione, a misura della sensibilità degli apparecchi.

Lungi dal voler entrare nel campo della teoria di tali movimenti, sperimentalmente accertati, non mi pare superfluo accennare che in questi ultimi anni venne accettata con favore l'ipotesi delle oscillazioni longitudinali e trasversali, le prime delle quali rappresenterebbero la prima delle dette fasi, e le seconde la terza, lasciando insoluta la seconda fase, che è tanto evidente, ma che potè in addietro venire trascurata o confusa con la prima.

Comunque siasi, la presenza di tre fasi distinte è in oggi generalmente riconosciuta, anche senza considerare le oscillazioni lentissime precorritrici della terza fase, le quali specialmente nei terremoti provenienti da un quarto di cerchio massimo di distanza si accentuano agli apparecchi migliori.

Gl'intervalli fra l'inizio delle tre fasi e le loro durate crescono a misura della distanza, e conseguentemente apparisce più esteso tutto lo sviluppo del sismogramma; è logico dunque ammettere che un rapporto debba esistere fra gl'intervalli in questione e la distanza dell'epicentro. Chiunque abbia seguìto con attenzione i risultati da me esposti nel Bollettino della Società Sismologica Italiana ed altrove, avrà osservato che di frequente calcolai per approssimazione la probabile distanza dell'epicentro, come fecero anche altri, pur senza la pretesa d'elevare a metodo una formola semplicissima che, in un'epoca in cui male conoscevansi le fasi e peggio gl'istanti dei fenomeni sismici osservati, non poteva essere che grossolanamente approssimata.

Questa formola consisteva nel coefficiente di Ch 300 per ogni minuto d'intervallo fra il principio della prima fase e quello della terza fase, ed era il risultato necessario della supposizione del Cancani, che cioè le oscillazioni longitudinali dell'ipotesi Wertheim avessero la velocità di Ch 5 al secondo e le trasversali quella di 2 ½; l'Agamennone, avendo in seguito trovato altri valori per le due velocità, revocò in dubbio l'applicabilità di quel coefficiente, ma è un fatto che se al primo impulso si attribuisce una velocità *uniforme* di chilom. 8,3 a 10,6 (in media 9,45) al secondo, in base all'analisi dell'A. (V. *Il terremoto dell'India del 12 giugno 1897 registrato in Europa*, Rendiconti Lincei, 1° maggio 1898) ed al principio della terza fase quella realmente uniforme di chilom. 3,3 assegnatagli dall'Oldham (quella di 2,7 calcolata dall'A. riferendosi alla massima fase e non al principio), questi due valori combinati non darebbero un coefficiente molto differente da quello; infatti, data la distanza K dell'epicentro in chilometri, l'intervallo in minuti M tra gli arrivi delle due specie di moto sarà espresso dall'equazione:

$$M = \frac{K}{198} - \frac{K}{367}$$

da cui:

$$K = \frac{112266\,M,}{567 - 138} = 304{,}25\,M,$$

risultato ottenuto, come vedesi, da dati non miei e su terremoti avvenuti posteriormente all' adozione del suddetto coefficiente.

Nell' adottare ora l' uniformità della velocità del primo impulso, non ho fatto che tenere presente quanto l'A. recentemente insegnava nella nota in calce a pag. 55 del vol. III del Bollettino della Società Sismologica Italiana sull' inutilità dell' impiego di equazioni quadratiche. È certo che volendo considerare uniforme pure la progressione d' una serie di quadrati di

numeri intieri come 4, 9, 16, 25, 36,
si ottiene la progressione rettilinea 2, 10, 18, 26, 34,

che di poco se ne discosta, per cui avendo da fare con dati grossolani, per piccole distanze, non resta nulla di meglio da ricavare; ma su grandi distanze e con dati più attendibili forniti da osservatori competenti la cosa cangia aspetto, ed ora m' accingo a dimostrare a quali modificazioni possa andare realmente soggetto il coefficiente di chilom. 300 dietro il miglioramento dei metodi d' osservazione.

Tra gl' insigni scienziati esteri che più seriamente accolsero come argomento di studio l' intervallo che decorre dal primo impulso alla fase massima, mi piace notare il Milne, di cui sono note le pubblicazioni fatte nei rapporti annuali alla « British Association for the advancement of Science », l'Oldham, che recentemente pubblicò apposita Memoria dal titolo: *On the propagation of earthquake motion to great distances*, nelle « Philosophical Transactions of the Royal Society of London », ed il Belar, che adottò il coefficente di chilom. 300 per calcolare nei suoi bollettini la probabile distanza dell' epicentro.

I confronti fatti fra gli apprezzamenti del Belar ed i miei mi convinsero non esser cosa tanto facile il valutare l' istante esatto dell' ingresso delle oscillazioni lente, poichè sebbene i sismogrammi fossero dati da due strumenti quasi identici (pendoli orizzontali del mio sistema) e riuscissero molto analoghi, la stima della distanza riusciva spesso alquanto differente nel primo apprezzamento. Del pari nella Memoria dell'Oldham l' elenco dei quattro dati, rappresentanti il principio delle tre fasi ed il massimo della terza, offre talvolta a parità di distanza epicentrale sensibili divergenze che non possono ascriversi ad un differente modo di propagazione dell' onda sismica, ma debbono invece attribuirsi a cause strumentali o ad apprezzamento individuale.

Perciò, stante la difficoltà di apprezzamenti sicuri e le incertezze dell' ora, nonchè dell' ubicazione epicentrale, non mi parve il caso di applicare metodi rigorosi a singoli casi, nè ai risultati d' una sola stazione, pur dotata di molti e svariati apparecchi, come questa d' Ischia, ma estesi invece i calcoli ad un grande numero di dati e di stazioni, confidando nella reciproca eliminazione degli errori anzidetti.

A ciò si prestano benissimo i dati compilati dall'Oldham che riguardano i seguenti terremoti:

1. Giappone 22 marzo 1894.
2. Argentina 27 ottobre 1894.
3. Giappone 15 giugno 1896 e due repliche.
4. Giappone 31 agosto 1896.
5. India 12 giugno 1897.
6. Giappone 5 agosto 1897.
7. Turkestan 17 settembre 1897 ed una replica.

Le stazioni, di cui egli utilizzò i dati, ed il numero di questi per ogni singola stazione e fase, figurano qui appresso;

	I	II	III Pr.	III M.	Totale		I	II	III Pr.	III M.	Totale
Catania . . .	6	7	2	8	23	Charkow . .	3	2	1	0	6
Ischia . . .	9	14	10	12	45	Edimburgo .	1	1	2	0	4
Padova . . .	5	1	4	1	11	Nicolajew . .	3	5	3	1	12
Pavia	1	0	2	1	4	Potsdam . .	0	2	1	0	3
Roma	11	9	16	15	51	Shide . . .	2	2	4	3	11
Rocca di Papa .	7	12	20	18	57	Strasburgo .	2	1	0	0	3
Siena	2	2	2	2	8	Totale Estero .	11	13	11	4	39
Totale Italia .	41	45	56	57	199	Totale generale	52	58	67	61	238

Questi dati con le distanze epicentrali calcolate dall'Oldham mi servirono ai calcoli che fo seguire; secondo il diagramma dell'Oldham, il ritardo in minuti primi, in cui le varie fasi perequate succedono al primo impulso epicentrale, è dato dalla seguente tabella:

Distanze in gradi:	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
I^a fase	(2.7)	5.2	7.3	9.1	10.6	12.0	13.2	14.3	15.2	16.0	16.7	17.2	17.7
II^a »	(4.7)	8.9	12.4	15.5	18.2	20.6	22.6	24.2	25.6	26.6	27.3	27.8	28.1
III^a » Principio	(5.4)	11.1	16.6	22.3	27.8	33.5	39.0	44.8	50.3	(56.1)	(61.5)	(67.2)	(72.7)
» » Massimo	(6.5)	13.2	19.7	26.2	33.0	39.4	46.1	52.9	59.5	(66.0)	(72.7)	(79.2)	(85.7)

I valori tra parentesi al principio appartengono ai tratti punteggiati per incertezza delle curve dell'Oldham; quelli alla fine sono da me completati, perchè eccedono i limiti del diagramma; i dati su cui si basano sono compresi fra 27° 5 e 120° 9 dall'epicentro, per cui quelli appartenenti a 20° ed a 130° sono extrapolati.

Il Milne a sua volta, a pag. 66 del quinto tra i citati rapporti (1900), dà una tabella rappresentante gl'intervalli fra i tremiti preliminari e la massima fase di 20 terremoti registrati in varie stazioni estere dal 30 agosto 1896 al 20 gennaio 1900, soli 4, dei quali sono comuni con quelli trattati dall'Oldham. Tenuto conto delle sole osservazioni di Shide, Kew e Toronto, che ne costi-

tuiscono il maggior numero, e disponendole a gruppi secondo la distanza, ne ottengo le seguenti medie:

Distanza media in gradi:	22°4	37°8	58°4	80°6	99°8
Intervallo in minuti:	8.8	14.9	24.2	36.9	49.7

le quali s'accordano soddisfacentemente coi valori che dà la suesposta tabella fra la I fase ed il massimo della III, e ciò è importante se si considera che i soli 11 dati di Shide dell'elenco Oldham riguardano i 4 terremoti in comune coll'elenco del Milne, mentre gli altri 227 ne sono indipendenti.

L'Oldham tratta tutti casi in cui riescono distinte le tre fasi, mentre il Milne non considera che la massima fase in relazione al primo impulso, sopra terremoti, il più vicino dei quali ha l'epicentro a 16° di distanza. Restano dunque esclusi terremoti vicinissimi; ciò peraltro non impedisce di rilevare che mentre da distanze di un quarto di cerchio massimo il primo impulso giunge con la velocità di 10 chilometri al secondo, a minori distanze non si trova la stessa velocità, anzi presso all'epicentro si trova compresa fra 2 e 3 chilometri al secondo. Nè è a credersi che questo risultato riguardi forse terremoti di speciali località, poichè gli stessi terremoti giapponesi ed indiani che qui giungono con quella elevatissima velocità, entro l'area di maggiore scuotimento si propagano con velocità moderata, come lo dimostrano le analisi dell'Omori e dell'Oldham; e la convinzione in sì moderata velocità è tanto invalsa (e giustamente), che i più illustri sismologi nel riportare le ore all'epicentro da località circonvicine impiegano il valore di chilom. 3 al secondo, non già quello di chilom 10, benchè a loro non ignoto.

La ragione di quest'apparente anomalia mi sembra risiedere in un fatto semplicissimo; le oscillazioni della terza fase, che a grandi distanze giungono con periodo assai rallentato, rappresentano, qualunque sia la forma che loro vogliasi attribuire, movimenti assai più ampî di quelli microsismici della prima fase; questi a grandi distanze non vengono registrati che da apparecchi di forte amplificazione, quelle dai pendoli a lungo periodo; ma sfuggono entrambi alla percezione dei sensi e ad apparecchi grossolani, gli uni per la loro esiguità, le altre per la loro lentezza. Peraltro, presso all'epicentro la lunghezza dell'onda della terza fase sarà certamente di gran lunga minore, ed è forse questa la fase che si rivela di preferenza, sia ai nostri sensi, sia negli effetti sugli edificî, sia agli strumenti più grossolani. Ma vi è un'altra circostanza: come ho già asserito e come si vedrà dagli ulteriori procedimenti, la velocità della prima fase è realmente crescente; presso l'epicentro pare essere tanto moderata da essere precorsa dalla terza fase, cosicchè anche dai sismogrammi più perfetti e delicati non è il caso di rintracciare per alcuna delle tre fasi nemmeno un accenno alla velocità di 10 chilom. al secondo, che con tanta sicurezza si riscontra alla distanza di un quarto di cerchio massimo.

Mi pareva a primo aspetto che la velocità della prima fase progredisse semplicemente col quadrato della distanza, secondo le leggi della gravità ed i confronti eseguiti sembravano confermare fino ad un certo punto l'ipotesi; ulteriori e più diligenti ricerche m'hanno invece consigliato a sottomettere a calcolo i dati col supporre i tempi proporzionali ad una potenza, ancorchè frazionaria, della distanza.

La prima e la seconda fase, per le quali v'era dubbio se si dovesse ammettere la propagazione lungo la superficie o per la corda, le ho considerate sotto entrambi i punti di vista, la terza fase l'ho calcolata sulla superficie, ossia mediante la distanza numericamente espressa dal suo arco di cerchio massimo, essendo bene manifesta l'uniformità della sua propagazione secondo l'arco e non per la corda.

Date dunque:

D distanza in gradi alla superficie,

δ detta in frazione di diametro terrestre $\left(\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\text{D}\right)$,

x esponente da determinarsi,

y coefficiente della velocità,

m il ritardo in minuti rispetto all'istante epicentrale;

le formole destinate al calcolo si presentano come segue:

Per le due prime fasi in arco: $\text{D}^x\ y = m$,

» » » » » » corda: $\delta^x\ y = m$,

» la terza fase in arco: $\text{D}\ y = m$, tanto pel principio quanto per la massima ampiezza.

Disposti tutti i dati in colonna secondo la distanza, ho raggruppato quelli della I e II fase a serie di 10 od 11, creando per ogni caso cinque equazioni logaritmiche di condizione, cioè:

I e II fase in arco: $(\log \text{D})\ x + \log y = \log m$,

idem » » corda: $(\log \delta)\ x + \log y = \log m$,

e ne ho ottenuti i seguenti risultati:

I fase in arco: $x = 0.5980$, $y = 1.0236$;

» » » corda: $x = 0.6912$, $y = 19.159$;

II » » arco: $x = 0.6682$, $y = 1.2756$;

» » » corda: $x = 0.7426$, $y = 32.806$.

I valori di x si approssimano di molto alle frazioni $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, sostituendo le quali ai medesimi, i valori di y si modificano di poco, cioè:

I in arco = 1.0147, in corda = 18.930;

II » » = 1.2838, » » = 33.326.

Nel seguente quadro figurano:

a) le distanze medie in gradi;
b) i valori medî primitivi;
c) i valori calcolati col primo risultato in arco e corda;
d) i valori modificati, con accanto i rispettivi errori in centesimi di minuto:

	a	*b*	*c*		*d*	
			arco	corda	arco	corda
I^a fase	56°.69	11m.68	11m.45 + 23	11m.42 + 26	11m.44 + 24	11m.49 + 19
	67.19	12.37	12.67 — 30	12.74 — 37	12.67 — 30	12.77 — 40
	82.34	14.17	14.31 — 14	14.34 — 17	14.31 — 14	14.32 — 15
	86.09	14.55	14.70 — 15	14.71 — 16	14.70 — 15	14.67 — 12
	93.60	15.82	15.45 + 37	15.36 + 46	15.46 + 36	15.29 + 53
	Somma errori		1.19	1.42	1.19	1.39
II^a fase	40.09	14.90	15.03 — 13	14.97 — 7	15.04 — 14	14.92 — 2
	64.55	21.02	20.66 + 36	20.83 + 19	20.65 + 37	20.82 + 20
	79.19	24.22	23.68 + 54	23.72 + 50	23.67 + 55	23.74 + 48
	86.82	24.40	25.18 — 78	25.12 — 72	25.17 — 77	25.15 — 75
	88.80	25.56	25.56 — 0	25.46 + 10	25.55 + 1	25.50 + 6
	Somma errori		1.81	1.58	1.84	1.51

dal quale si scorge che l'arrotondamento delle potenze frazionarie x apporta differenze inconcludenti ed in qualche caso un vantaggio, mentre nel complesso gli errori sono tutti inferiori a $^4/_5$ di minuto. Di gran lunga maggiori risulterebbero gli errori considerando la velocità direttamente proporzionale alla distanza.

Resta a vedersi quale sia la via che più logicamente gli urti sismici percorrono, cioè se l'arco o la corda; le differenze tra gli errori mi paiono troppo esigue per decidere la questione; piuttosto gli esponenti vi si prestano sotto il punto di vista della semplicità, cioè col preferire i due esponenti rappresentati dalla frazione di $^2/_3$ che corrisponde alla radice cuba del quadrato e che sta in relazione con la corda nella prima fase, con l'arco nella seconda, fatto che mi pare logico se non dimostrato.

Il principio della terza fase mi dà per risultato un percorso uniforme di 1° in 0m 5711; il massimo della stessa 1° in 0m 6592, cui s'approssimano soddisfacentemente i valori del diagramma Oldham.

Dai valori trovati si ricava il seguente quadro riformato:

Distanze in gradi	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
I^a fase	3.7	5.9	7.7	9.3	10.7	11.9	13.1	14.1	15.0	15.8	16.6	17.2	17.7
II^a »	6.0	9.5	12.4	15.0	17.4	19.7	21.8	23.8	25.8	27.7	29.5	31.2	32.9
III^a fase (principio)	5.7	11.4	17.1	22.8	28.6	34.3	40.0	45.7	51.4	57.1	62.8	68.5	74.2
» » (massimo)	6.6	13.2	19.8	26.4	33.0	39.6	46.1	52.7	59.3	65.9	72.5	79.1	85.7

e pei primi 10°:

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
I^a fase	0.80	1.27	1.67	2.02	2.34	2.65	2.94	3.21	3.47	3.72
II^a »	1.28	2.04	2.67	3.24	3.76	4.24	4.70	5.13	5.56	5.96

Combinando le formole, risulta che la prima fase procede da principio con minor velocità della terza, in guisa che appena a chilom. 302 dall'epicentro le due fasi arrivano contemporaneamente.

Per meglio convincermi dell'inalterabilità dei coefficienti trovati per varie distanze, ho voluto scindere il calcolo, trattando separatamente i sette terremoti, e ne ho ottenuto i seguenti risultati:

	Distanze	I	II	III Pr.	III M.
	°				
7. Turkestan	41.7	20.06	1.29	0.57	0.74
5. India	65.5	19.14	1.29	0.61	0.67
1. Giappone	80.2	19.35	1.35	0.53	0.65
4. »	83.6	17.45	1.36	0.60	0.67
6. »	85.5	18.75	1.24	0.53	0.67
3. »	88.0	20.32	1.30	0.57	0.62
2. Argentina	107.4	20.70	1.14	0.54	0.67

che non rivelano alcuna legge collegata alla differente distanza media dell'epicentro dalle stazioni europee di cui si utilizzarono i dati, il segno degli errori essendo saltuario.

Con ciò sono ben lungi dal voler fissare che tali coefficienti siano gli stessi per qualsiasi natura di terreno; al contrario, sono convinto ch'essi non s'attagliano che al grosso andamento delle perturbazioni sismiche considerate su grandi distanze, in cui riesce più completa la reciproca compensazione delle anomalie. Queste potranno venir messe in evidenza soltanto da perfezionati metodi d'osservazione e la loro ricerca in oggi sarebbe prematura.

Tenuto dunque conto:

1) che nell'analisi dei terremoti nell'area ove vengono avvertiti dal pubblico, raramente si eccede il migliaio di chilometri;

2) che nei dati orarî del maggior numero di stazioni in luogo del primo impulso viene apprezzata una fase più avanzata, ed anche questa soffre ritardo nel venire rilevata;

3) che i coefficienti della velocità, considerati costanti nell'analisi di terremoti lontani, possono subire invece grandi modificazioni su piccole distanze per prevalenza di terreni più o meno favorevoli alla rapidità della propagazione;

4) che la stessa terza fase, della velocità accertata di chilom. 3 al secondo nell'area epicentrale è più sentita e precorre alle altre;

5) che la profondità dell'epicentro, trascurabile in gran parte su grandi distanze, può influire molto su distanze più brevi; è certo che occor-

rono osservazioni precise, fatte coi migliori strumenti, per dedurne quelle leggi che invano si tenta di trarre da informazioni narrative ed inesatte. Intanto mi spiego benissimo come i terremoti, studiati fino alla distanza di un migliaio di chilometri, possano dare l'illusorio risultato d'una velocità uniforme.

Riguardo poi al coefficiente di chilom. 300, è chiaro che una volta accertata la variabile velocità della prima fase, debba anch'esso divenire variabile secondo le distanze; dal quadro ricavato dalle formole si ottiene il seguente rapporto entro i limiti di distanza, da cui provengono i terremoti con tre fasi ben distinte, cioè:

Distanze	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
Rapporto	329	310	298	289	281	275	269	265	260

talchè si scorge che il grossolano coefficiente di chilom. 300 non era poi tanto distante dalla realtà.

Con ciò sono lontano dal presumere d'aver dato risultati definitivi; ho voluto semplicemente dissipare qualche equivoco e dimostrare la stretta necessità di adottare strumenti che forniscano con la maggiore nitidezza possibile il distacco delle fasi sismiche, e di procedere fino allo scrupolo nel loro campionamento cronometrico che in oggi lascia dovunque, fatte poche eccezioni, moltissimo a desiderare.

Chimica fisica. — *Sugli equilibri eterogenei fra cristalli misti di idrati salini isomorfi.* Nota I. di G. Bruni e W. Meyerhoffer (1), presentata dal Socio G. Ciamician.

Le ricerche sui fenomeni d'equilibrio eterogeneo nelle miscele ternarie in cui possono formarsi cristalli misti, sono finora relativamente scarse. Di ricerche riguardanti casi speciali accenneremo quelle di Bakhuis Roozeboom (2) sulla solubilità dei cristalli misti di sali isomorfi (le prime nelle quali fu applicata in questo campo la teoria delle fasi) e quelle di Fock (3) e Stortenbecker (4) sullo stesso argomento. Inoltre i lavori di Bruni (5) sui feno-

(1) La parte teorica di questo lavoro era già pronta fin dal giugno scorso; il desiderio di presentarla assieme ad una larga serie di risultati sperimentali ci indusse a ritardarne la publicazione. Ora però l'annunzio di una comunicazione sullo stesso soggetto presentata da R. F. Hollmann al Congresso dei naturalisti russi tenutosi a Pietroburgo il 5 gennaio scorso, ci costringono a pubblicarlo subito. Ci riserviamo di esporre in seguito i risultati delle nostre esperienze con tutti i particolari.

(2) Zeitschr. f. physik. Chemie VIII, 504, 531.

(3) Zeitschr. f. Krystallographie XXVIII, 337.

(4) Zeitschr. f. physik. Chemie XVII, 643; XXII, 60; XXXIV, 108.

(5) Gazz. chim. ital., 1897, I, 549; 1898, II, 522.

meni crioidratici nelle soluzioni miste di due corpi isomorfi, e di Bruni e Gorni (1) sulle temperature di congelamento dei miscugli di tre corpi tutti isomorfi fra di loro. Finalmente le esperienze di Hollmann (2) sulla tensione di vapore dei cristalli misti di idrati salini.

Uno di noi diede pure in una pubblicazione teoretica (3) un quadro sommario dei differenti tipi di equilibrî eterogenei che possono presentarsi nei sistemi di questa natura. Questi problemi vennero allora trattati in modo affatto generale e prescindendo dalla natura dei componenti le miscele. Fra i diversi casi possibili ve ne è però uno che merita speciale attenzione per la facilità colla quale può essere realizzato e per la frequenza con cui si presenta nella pratica: intendiamo quello di due sali isomorfi che sciolti in acqua diano ciascuno uno o più idrati, di cui quelli di composizione corrispondente pure isomorfi fra di loro. Noi ci proponiamo di considerare più da vicino questo caso; naturalmente quello che diremo potrà sempre senz'altro estendersi a tutte le miscele in cui due corpi isomorfi diano con un solvente qualsiasi dei composti d'addizione pure isomorfi fra loro.

Ad ogni idrato corrisponde, come è ben noto, una determinata temperatura alla quale esso passa nell'idrato più povero in acqua o nel sale anidro. Poichè ora tanto i sali anidri come i diversi idrati possono formare delle miscele isomorfe, si deve domandarsi come si presenteranno gli equilibrî eterogenei fra questi diversi cristalli misti e con le loro soluzioni sature. Consideriamo ora il problema nel caso più semplice.

Siano due sali A e B che formano ciascuno due diversi idrati: $A + x H_2O$, $A + y H_2O$ e rispettivamente $B + x H_2O$, $B + y H_2O$ (poniamo $x > y$; naturalmente può anche essere $y = 0$). Tanto i due idrati con x come quelli con y molecole d'acqua sono fra loro isomorfi e possono cristallizzare assieme in tutti i rapporti. I due idrati più ricchi in acqua passano in quelli più poveri a due temperature diverse che chiameremo T_A e T_B, e supporremo $T_B > T_A$. Ad ognuno dei cristalli misti con $x H_2O$ corrisponderà ora una determinata temperatura di trasformazione; come varieranno queste temperature colla composizione? Rappresentiamo sull'asse delle ordinate (fig. 1) le temperature, e su quello delle ascisse il numero di molecole di A e di B su 100 molecole della miscela. Noi possiamo anzitutto prevedere in base alla teoria delle fasi, quale sarà la natura della curva luogo delle temperature di trasformazione. Poichè tanto gli idrati con $x H_2O$ come quelli con $y H_2O$ sono miscibili in tutti i rapporti, non potremo mai avere più di quattro fasi: cristalli misti con $x H_2O$, cristalli misti con $y H_2O$, soluzione e vapore; ciò che per un sistema di tre componenti costituisce una serie di

(1) Questi Rendiconti, 1900, II, 326.
(2) Zeitschr. f. physik. Chemie, XXXVII, 193.
(3) Questi Rendiconti, 1900, II, 232.

sistemi invarianti senza alcun punto multiplo; la curva cercata sarà dunque una curva continua. Essa può però naturalmente presentare tre tipi: possono cioè tutti i suoi punti esser compresi fra T_A e T_B (curva I), oppure essa può mostrare un punto di minimo (curva II) od uno di massimo (curva III).

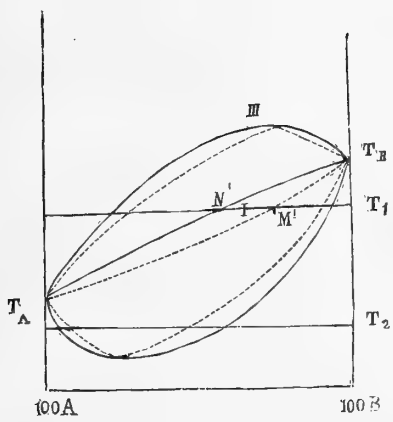


Fig. 1.

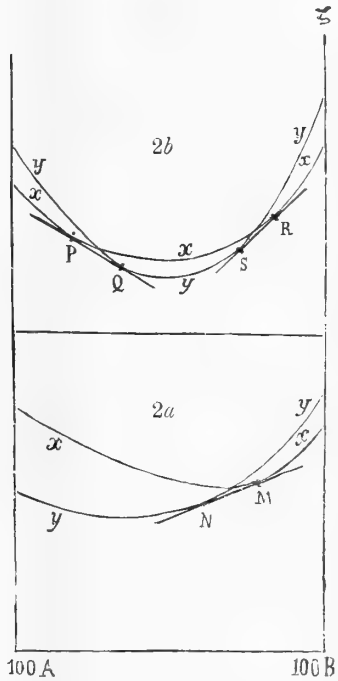


Fig. 2.

Consideriamo ora un altro lato della questione. I cristalli misti più idratati daranno luogo alla temperatura data, perdendo acqua, alla formazione di una certa quantità di soluzione satura ed a cristalli misti meno idratati: queste due nuove fasi non avranno naturalmente in generale la stessa composizione della prima; studiamo ora in che rapporto staranno fra loro le composizioni delle due sorta di cristalli. Ciò riuscirà facile seguendo lo stesso metodo che Bakhuis Roozeboom (1) applicò ai fenomeni di congelamento e di trasformazione delle miscele binarie, ricorrendo cioè ad un teorema di Gibbs secondo il quale è ad ogni temperatura stabile quel sistema pel quale la funzione ζ è minore. Portiamo perciò (fig. 2) sull'asse delle ascisse ancora la composizione delle due sorte di cristalli e sulle ordinate il valore di ζ. Ad ognuna delle due forme di cristalli corrisponderà ora ad ogni temperatura una curva dei valori di ζ. Consideriamo ciò che avverrà ad una temperatura T_1 posta fra T_A e T_B (cfr. fig. 1); a questa tempera-

(1) Zeitschr. f. physik. Chemie, XXX, 385, 413.

tura saranno per le miscele dove A è in eccesso, stabili i cristalli meno idratati, per quelle dove è in eccesso B, al contrario i cristalli più idratati. Le curve ζ relative alle due forme di cristalli misti si taglieranno perciò in un punto (fig. 2*a*); nella parte sinistra del diagramma la curva ζ degli idrati con $x\,H_2O$ sarà al disopra, nella parte destra al disotto di quella relativa agli idrati con $y\,H_2O$. Come è noto, la composizione delle due fasi in equilibrio a quella temperatura è data dai punti di contatto della tangente comune alle due curve, cioè rispettivamente da M e da N. Come si vede già dal semplice esame della figura, i cristalli con $x\,K_2O$ contengono maggior proporzione di B che non quelli con $y\,H_2O$. Pel caso in cui le temperature di trasformazione siano tutte comprese fra T_A e T_B, si può quindi enunciare la seguente regola: *I cristalli più idratati contengono in maggior proporzione di quelli meno idratati quel componente la cui temperatura di transizione è più elevata.*

Quando le temperature di trasformazione presentano un minimo, i fenomeni diventano un poco più complicati; consideriamo la temperatura T_2 (cfr. fig. 1) compresa fra T_A ed il punto di minimo: qui nelle miscele contenenti in eccesso l'uno o l'altro dei componenti, sono stabili i cristalli più idratati, alle concentrazioni medie invece quelli meno ricchi in acqua. Le due curve ζ dei due diversi idrati si tagliano perciò in due punti (fig. 2*b*). La composizione delle due fasi coesistenti nei due sistemi in equilibrio possibili a questa temperatura, sono date anche qui dai punti di contatto delle due tangenti comuni possibili alle due curve, cioè da P e Q e rispettivamente da R e S. Dalla figura si vede che in quello dei due sistemi dove A predomina, esso si trova in maggior copia nei cristalli più idratati che in quelli meno idratati; nell'altro invece è l'inverso che succede. Alla temperatura di minimo le due curve ζ si toccano naturalmente in un punto solo, e le due fasi cristalline (come pure la soluzione liquida) hanno l'identica composizione.

In base a queste considerazioni possiamo, nella figura 1 accanto alle curve piene indicanti la composizione dei cristalli più idratati che ad ogni data temperatura si trasformano, tracciare le curve a queste conjugate che esprimono la composizione dei cristalli meno ricchi in acqua che dai primi si formano; queste ultime curve sono indicate con linee tratteggiate. La regola generale di questi equilibrî è dunque la seguente: *I cristalli più idratati contengono in maggior proporzione di quelli più poveri d'acqua, quel componente la cui aggiunta al sistema provoca un innalzamento della temperatura di trasformazione* (1).

(1) Questa è del resto un caso speciale di una legge più generale che si può enunciare così: In un sistema qualunque fra due fasi in equilibrio, quella di esse che tende a sparire innalzando la temperatura contiene in maggior copia dell'altra quel componente che, aggiunto al sistema, provoca un innalzamento nella temperatura di equilibrio.

Un' altra previsione si può agevolmente fare per ciò che riguarda l' andamento delle curve di trasformazione. È noto che se in un idrato fuso si scioglie una sostanza qualunque che non possa con esso cristallizzare, se ne abbassa il punto di trasformazione, e che questi abbassamenti sono proporzionali al numero delle molecole disciolte. Si può così in modo affatto simile come per gli abbassamenti dei punti di congelamento dei corpi unici, calcolare una costante di abbassamento molecolare, che è anche qui $= 0{,}02\frac{T^2}{w}$. Ciò fu fatto ad es. da Loewenherz (1) pel sale di Glauber, e da van't Hoff e Dawson (2) pel cloruro di magnesio esaidrato.

Se invece mescoliamo alla massa fusa un sale che possa entrare in tutte due le fasi cristalline con essa in equilibrio, accadrà quello che accade nel congelamento delle soluzioni binarie da cui si separano soluzioni solide; gli abbassamenti del punto di trasformazione sono più piccoli di quelli normali avuti con sostanze non isomorfe o calcolati colla formola di van't Hoff; questi abbassamenti potranno anzi diventare addirittura negativi. Che questo ultimo caso possa accadere, che cioè il punto di equilibrio possa innalzarsi per l' aggiunta di un sale isomorfo, risulta dalle figure e dalle considerazioni già esposte. Del fatto che anche quando quest' aggiunta provoca un abbassamento questo è anormalmente piccolo, si hanno nei lavori già citati due esempi. Van't Hoff e Dawson trovarono che aggiungendo bromuro di magnesio al corrispondente cloruro con cui è isomorfo, si producono abbassamenti tre volte e mezzo più piccoli dei normali. Così pure dai dati di Loewenherz apparisce che fra le dieci sostanze (corpi organici e sali) sciolte nel sale di Glauber, gli abbassamenti più piccoli furono ottenuti col cromato di sodio, il quale forma un decaidrato ed un' anidride entrambi isomorfi coi corrispondenti del solfato. Casi di innalzamento non erano stati, per quanto noi sappiamo, finora osservati, almeno quantitativamente.

Noi abbiamo eseguito varie serie di esperienze con miscele di solfato e seleniato di sodio che formano entrambi un decaidrato ed un' anidride al tutto isomorfi. Da queste esperienze, che publicheremo dettagliatamente fra breve, risulta che l' aggiunta di solfato sodico al seleniato il cui punto di transizione è leggermente più basso (esso non era ancora stato esattamente determinato; trovasi a 30°,15 mentre quello del solfato è a 32°,4) innalza questa temperatura di trasformazione. L' aggiunta di seleniato al solfato provoca abbassamenti notevolmente minori dei normali.

Accanto a questo caso più semplice, altri più complicati possono immaginarsi: p. es. che i cristalli misti di uno o di entrambi gli idrati possano formarsi solo entro certi limiti di composizione, che uno dei sali formi accanto ai due idrati considerati altri idrati di composizione diversa, ecc. A questi

(1) Zeitschr. f. physik. Chemie, XVIII, 70.
(2) Zeitschr. f. physik. Chemie, XXVII, 598.

casi possono applicarsi considerazioni analoghe a quelle qui svolte; in tutti però si avrà che potendosi avere almeno tre fasi cristalline, le curve di trasformazione non saranno più continue, ma presenteranno dei punti multipli. Un caso assai interessante sul quale abbiamo già raccolto varie esperienze, ci è dato dalle miscele di solfato e cromato sodico. Entrambi questi sali formano un decaidrato ed un' anidride fra loro isomorfi; il cromato, inoltre, forma anche un esaidrato ed un tetraidrato. Su questo argomento speriamo di poter tornare fra non molto.

Possiamo anche porci un altro problema. Supponiamo di avere una soluzione satura accanto ai cristalli misti dei due idrati e con essi in equilibrio. Cosa accadrà se tenendo la temperatura costante noi lasciamo svaporare l'acqua? Potranno restare l'una accanto all'altro entrambe le sorta dei cristalli misti, o dovrà una di queste sparire ed in tal caso quale delle due? La cosa dipenderà dalla composizione della soluzione liquida in rapporto a quella delle due fasi solide. Per fissare le idee e limitarci al caso più semplice, supponiamo di essere nel caso di miscele presentanti la curva del tipo I (fig. 1) e che la temperatura fissata e mantenuta costante sia T_1. Le due forme di cristalli misti hanno la composizione rappresentata dai punti M′ ed N′. I cristalli x sono più ricchi in B dei cristalli y. Possiamo ora immaginarci in questo stesso diagramma, indicato il rapporto in cui nella soluzione liquida si trovano A e B. Esso ci sarà dato da un punto sulla stessa orizzontale di M′ ed N′, e possiamo prevedere tre casi, che esso si trovi cioè a destra di entrambi, od a sinistra, o fra i due. In quest'ultimo caso la soluzione è più ricca in B dei cristalli y, e meno di quelli x; essa, perdendo acqua, continuerà perciò ad accrescere entrambe le fasi cristalline e queste resteranno in equilibrio anche allorchè tutta la fase liquida sarà sparita. Se invece il punto che ci dà la composizione della soluzione è a sinistra di M′ ed N′, se cioè la soluzione è più povera in B di entrambe le sorta di cristalli, ciò non potrà più accadere; sarà necessario che man mano che l'acqua evapora, una parte dei cristalli più ricchi di B (x) si distrugga per potere compensare la mancanza in B della soluzione ed accrescere i cristalli y. Se dunque la quantità della soluzione liquida presente da principio è grande, il processo condurrà alla sparizione dei cristalli più idratati. Spariti questi, continueranno a formarsi dei cristalli meno idratati, la cui composizione rimasta finora costante andrà però variando, diventando essi progressivamente più poveri di B. Se invece la soluzione sia più ricca di B di entrambe le forme di cristalli, il processo di evaporazione isotermica potrà condurre alla sparizione dei cristalli meno idratati.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti presenta un piego suggellato inviato dal sig. Antonio Sauve, perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 marzo 1902.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo.* Nota II [1] di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio VOLTERRA.

5. *Caso del campo dovuto ad una corrente sinusoidale parallela allo schermo.* — Prendiamo nelle (1) della Nota precedente

$$u(t - Ax) = I_0 \, e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})},$$

dove

$$i = \sqrt{-1}\ , \quad \omega = 2\pi n(t - Ax) + \alpha,$$

I_0, n ed α designano costanti reali. Con questa espressione di u le parti reali dei secondi membri delle (1) forniscono i potenziali dovuti a un'ordinaria corrente sinusoidale di intensità massima I_0 e di frequenza n.

Proponiamoci di determinare (i potenziali indotti sul piano $z = 0$) F_1, U_1, V_1 nel caso che i potenziali inducenti corrispondano al valore complesso $I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})}$, sieno cioè

$$(1') \qquad \begin{cases} U' = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} \log \dfrac{1}{\Delta}, \quad V' = 0, \quad W' = 0; \\ F' = U' \end{cases}$$

(1) Vedi pag. 163.

Trovati F_1, U_1, V_1, basterà prenderne la parte reale per avere i potenziali indotti sul piano $z = 0$ dalla suddetta corrente sinusoidale, parallela al piano e distante d da esso.

È chiaro anzi tutto che, stabilito una volta il regime, le espressioni di F_1, U_1, V_1 dovranno essere della forma

$$(3) \qquad F_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} F_2, \quad U_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} U_2, \quad V_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} V_2,$$

con F_2, U_2, V_2 funzioni soltanto di $y, |z|$.

Ciò posto, le (III) e (IV) danno

$$(4) \qquad \frac{d^2F_2}{dy^2} + \frac{d^2F_2}{d|z|^2} = 0, \quad \frac{d^2U_2}{dy^2} + \frac{d^2U_2}{d|z|^2} = 0, \quad \frac{d^2V_2}{dy^2} + \frac{d^2V_2}{d|z|^2} = 0,$$

$$(5) \qquad 2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{dV_2}{dy} = 0,$$

mentre le equazioni ai limiti (V) divengono

$$2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_2}{d|z|} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dy} + 2\pi n A i V_2 - \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_2}{d|z|} = -\frac{d \log \frac{1}{\Delta}}{dy}.$$

Le tre funzioni [armoniche, in causa delle (4)] F_2, U_2, V_2 dovranno inoltre comportarsi regolarmente per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, e annullarsi (assieme alle loro derivate) al crescere indefinito di $|z|$. Queste stesse proprietà competono di conseguenza alle due combinazioni

$$2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_2}{d|z|},$$

$$\frac{dF_2}{dy} + 2\pi n A i V_2 - \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_2}{d|z|},$$

di cui le equazioni ai limiti, scritte or ora, forniscono inoltre i valori per $z = 0$:

$$0 \quad \text{e} \quad -\frac{d \log \frac{1}{\Delta}}{dy}.$$

Poniamo

$$(6) \qquad \Gamma^2 = y^2 + (|z| + d)^2 \quad (\Gamma = \Delta \text{ per } z \leq 0),$$

e osserviamo che le due funzioni 0 e $-\frac{d \log \frac{1}{\Gamma}}{dy}$, sono manifestamente ar-

moniche, regolari per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, e nulle per $|z| = \infty$. Siccome non vi possono essere due fuzioni armoniche, che prendono gli stessi valori per $z = 0$, si mantengono regolari in ogni altro punto, e si annullano per $|z| = \infty$, così dobbiamo concludere che si ha identicamente (e non soltanto per $z = 0$)

$$(7)\qquad \begin{cases} 2\pi n \mathrm{A}i(\mathrm{F}_2 - \mathrm{U}_2) + \dfrac{\mathrm{AR}}{2\pi}\dfrac{d\mathrm{U}_2}{d|z|} = 0\,, \\ \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{F}_2 + \log\dfrac{1}{\nu}\right) + 2\pi n \mathrm{A}i\,\mathrm{V}_2 - \dfrac{\mathrm{AR}}{2\pi}\dfrac{d\mathrm{V}_2}{d|z|} = 0\,. \end{cases}$$

Il nostro còmpito consiste dunque nell'integrare il sistema (completo, come tosto si riconosce) (4), (5), (7) *mediante funzioni* $\mathrm{F}_2, \mathrm{U}_2, \mathrm{V}_2$ *di* $y, |z|$, *regolari per tutti i valori reali di* y, *positivi di* $|z|$, *e nulle per* $|z| = \infty$.

6. *Calcolo di* F_2. — Moltiplichiamo la prima delle (7) per $2\pi n \mathrm{A}i$, deriviamo la seconda rispetto ad y e sommiamo. Verrà, tenendo conto della (5),

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\mathrm{F}_2 + \log\frac{1}{\nu}\right) + \mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|} = 0\,,$$

od anche, siccome $\mathrm{F}_2 + \log\dfrac{1}{\nu}$ è funzione armonica,

$$\frac{d^2}{d|z|^2}\left(\mathrm{F}_2 + \log\frac{1}{\nu}\right) - \mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|} = 0\,.$$

Integrando rispetto a $|z|$ fra un valore generico e ∞, risulta

$$\frac{d}{d|z|}\left(\mathrm{F}_2 + \log\frac{1}{\nu}\right) - \mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\mathrm{F}_2 = 0\,.$$

Facciamo, per brevità di scrittura, le posizioni

$$(8)\qquad p = 2\pi n\mathrm{A}\ ,\ q = \frac{4\pi^2 n}{\mathrm{R}}\ ,\ \mathrm{B} = \mathrm{A}^2 n\mathrm{R} = \frac{p^2}{q}\,.$$

Le equazioni (5), (7) e quelle, cui siamo testè pervenuti, potranno essere scritte:

$$(5')\qquad \frac{d\mathrm{V}_2}{dy} = pi(\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2)\,,$$

$$(7')\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d|z|}(\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2) - qi(\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2) = -\dfrac{d\mathrm{F}_2}{d|z|}\,, \\ \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{F}_2 + \log\dfrac{1}{\nu}\right) - \dfrac{p}{q}\left(\dfrac{d\mathrm{V}_2}{d|z|} - qi\,\mathrm{V}_2\right) = 0\,, \end{cases}$$

$$(9)\qquad \frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|} - \mathrm{B}i\,\mathrm{F}_2 = -\frac{d\log\dfrac{1}{\nu}}{d|z|}\,.$$

Un integrale particolare della (9) è, come si verifica subito,

$$F_2 = -i\int_0^\infty e^{-B\lambda}\frac{d\log\frac{1}{\tau}}{d|z|}\,d\lambda\,, \tag{10}$$

in cui

$$\tau^2 = y^2 + (|z| + d - i\lambda)^2 \tag{11}$$

e si suppone $B > 0$.

La funzione sotto il segno nel secondo membro della (10) è allora effettivamente integrabile fra 0 e ∞ (qualunque sieno i valori reali di y e di z).

L'integrale F_2 risulta poi funzione armonica di y , $|z|$, nulla per $|z| = \infty$, regolare per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, poichè

$$\frac{d\log\frac{1}{\tau}}{d|z|} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{|z| + d + i(y-\lambda)} + \frac{1}{|z| + d - i(y+\lambda)}\right\}$$

gode di tali proprietà in tutto l'intervallo di integrazione.

La funzione cercata F_2 *rimane definita dalla* (10).

Infatti, in causa della (9), essa potrebbe differirne soltanto per un integrale armonico della equazione

$$\frac{dF_2}{d|z|} - Bi\,F_2 = 0\,,$$

nullo per $|z| = \infty$. Ma un tale integrale è identicamente nullo.

Giova ancora osservare che, mediante una integrazione per parti, si può attribuire all'espressione di F_2 la forma

$$F_2 + \log\frac{1}{\tau} = B\int_0^\infty e^{-B\lambda}\log\frac{1}{\tau}\,d\lambda\,. \tag{10'}$$

7. *Caratteri analitici della funzione* F_2. — Per riconoscere la natura della funzione definita dall'integrale (10), prendiamo le mosse dalla formula

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi}\,d\lambda = e^{\xi}\int_\xi^\infty e^{-\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda} = -e^{\xi}\,Li e^{-\xi}\,,$$

che è, si può dire, la definizione della funzione Li (logaritmo integrale) per valori reali e positivi dell'argomento ξ.

Dalla formula di Eulero [1]

$$Li\,e^{-\xi} = C + \log\xi + \sum_1^\infty{}_m\,(-1)^m\frac{\xi^m}{m\,.\,m!} \tag{11}$$

(dove C è la nota costante 0,577 ... e pel logaritmo si intende fissata la

[1] Cfr. per es. Kronecker, *Vorlesungen über Mathematik*, B. I, pag. 213.

determinazione reale) la funzione $\mathrm{L}i\, e^{-\xi}$ rimane definita in tutto il piano complesso. Supponendolo tagliato lungo il semiasse reale negativo, la $\mathrm{L}i\, e^{-\xi}$ risulta funzione uniforme colla sola singolarità logaritmica $\xi = 0$.

Nello stesso campo (cioè in tutto il piano ad esclusione del semiasse reale negativo) è pure

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi}\, d\lambda$$

funzione analitica regolare di ξ.

Le due funzioni $\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda+\xi}\, d\lambda$, $-e^{\xi}\,\mathrm{L}i\, e^{-\xi}$ coincidono per ξ reale e positivo. Si ha dunque, per qualsiasi valore di ξ,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda+\xi} = -e^{\xi}\,\mathrm{L}i\, e^{-\xi},$$

dovendosi nel secondo membro intendere, come s'è detto, quella particolare determinazione della funzione multiforme $\mathrm{L}i$, che, senza attraversare il taglio, risulta reale, per ξ reale e positivo.

Ciò posto, la espressione (10) di F_2, scambiando λ in $\frac{\lambda}{\mathrm{B}}$ e moltiplicando sopra e sotto per i, può essere scritta

$$\mathrm{F}_2 = -\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda - \mathrm{B}\{y - i(|z|+d)} + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda + \mathrm{B}\{y + i(|z|+d)\}}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{-\mathrm{B}\{y-i(|z|+d)\}}\,\mathrm{L}i\, e^{\mathrm{B}\{y-i(|z|+d)\}} + e^{\mathrm{B}\{y+i(|z|+d)\}}\,\mathrm{L}i\, e^{-\mathrm{B}\{y+i(|z|+d)\}}\right].$$

Valendosi dello sviluppo (11), si caratterizza immediatamente il comportamento della funzione F_2 nell'intorno del valore 0 del parametro B. Si ha infatti

$$(10'') \qquad \mathrm{F}_2 = \mathrm{C} + \log \mathrm{B} - i\frac{\pi}{2} + \log \nu + \mathrm{B}\{\mathrm{Y}_1 \log \mathrm{B} + \mathrm{Y}_2\},$$

Y_1 e Y_2 designando funzioni regolari nell'intorno di $\mathrm{B} = 0$.

Ne viene che, per $\mathrm{B} = 0$, le derivate, rapporto a $y, |z|$, di F_2 coincidono colle derivate di $\log \nu$.

8. *Calcolo di* U_2 *e di* V_2. — Ritenuto $q > 0$, si verifica, come sopra, che

$$(12) \qquad \mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2 = -i\int_0^\infty e^{-q\mu}\, \frac{d\mathrm{F}_2(y, |z| - i\mu)}{d|z|}\, d\mu$$

soddisfa alla prima delle (7′) e a tutte le altre condizioni richieste, ed è l'unica funzione, che si trova in questo caso.

Collo stesso criterio si costruisce l'integrale particolare

$$(13)\quad V_2 = -pi\int_0^\infty \{U_2(y+\nu,|z|) - F_2(y+\nu,|z|)\}\,d\nu = -pi\int_y^\infty (U_2 - F_2)\,dy$$

della (5′), che è funzione armonica ecc., e fornisce in somma il cercato valore di V_2.

Di tutte le condizioni, imposte alle nostre incognite, rimane soltanto da controllare la seconda delle (7′). Si riconosce senza difficoltà che coi valori (10′), (12) e (13) essa rimane identicamente soddisfatta.

9. *Semplificazione delle espressioni trovate.* La frequenza n, finchè si tratta di correnti alternate industriali, è compresa fra 20 e 200; per scariche oscillanti, correnti di Tesla, ecc., può giungere sino a valori dell'ordine di 10^6, ma in ogni caso $B = A^2 n R$ è una quantità molto piccola (1).

Si possono quindi trascurare senza scrupolo i termini dell'ordine di B, ed anche di $B \log B$. La (10″) dà allora (prescindendo, come è lecito, dalla costante $C + \log B - i\frac{\pi}{2}$)

$$(14)\qquad F_2 + \log\frac{1}{r} = 0\,.$$

Ciò si sarebbe potuto ricavare dalla (9) facendovi $B = 0$, ma non si avrebbe avuto in tal modo esatta nozione dell'approssimazione risultante.

La formula (10″) mostra che l'errore, da cui possono essere affette F_2 e le sue derivate rispetto ad y, $|z|$, è dell'ordine di $B \log B$.

Nemmeno questo sarebbe sufficiente, volendo procedere con assoluto rigore. Bisognerebbe ancora assegnare un limite superiore dell'errore possibile nelle componenti delle forze elettromagnetiche.

Non è del resto difficile il farlo, partendo dalla considerazione delle derivate della (10′).

Si arriva alla conclusione prevista che gli errori sono effettivamente trascurabili.

Ritenuto ormai $F_2 = -\log\frac{1}{r}$, la (12), ricordando la espressione (11)

(1) Prendiamo pure $n = 10^7$ e per R il valore, che corrisponde a una lastra di argentana dello spessore di un decimillimetro, cioè a un dipresso

$$R = 20000 \times 100 = 2\,.\,10^6.$$

Sarà pur sempre

$$B = \frac{2\,.\,10^{13}}{9\,.\,10^{20}} = \frac{2}{9}\,10^{-7}.$$

di τ, si riduce a

$$U_2 - F_2 = i \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{1}{\tau}}{d|z|} d\lambda . \tag{15}$$

Scindiamo il reale dall'immaginario. Si ha

$$U_2 - F_2 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{d|z|} d\lambda - i \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} d\lambda ,$$

dove

$$\tau_1^2 = (y-\lambda)^2 + (|z|+d)^2 \ , \ \tau_2^2 = (y+\lambda)^2 + (|z|+d)^2 .$$

Si osservi che

$$-\int_y^\infty \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} dy = \log \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad -\int_y^\infty \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} dy = \operatorname{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \operatorname{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi .$$

La (13) porge quindi

$$V_2 = \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \operatorname{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi \right\} d\lambda - i \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda .$$

Le espressioni definitive dei potenziali indotti, con approssimazione valida in ogni caso, sono dunque, a tenore delle (3) (avvertendo che dobbiamo conservare nei secondi membri soltanto la parte reale):

$$\left\{ \begin{aligned} & F_1 = -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \log \frac{1}{\nu} , \\ & U_1 - F_1 = -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} d\lambda \\ & \qquad\qquad - 2 I_0 \cos \omega \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} d\lambda , \\ & V_1 = 2 I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \operatorname{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi \right\} d\lambda \\ & \qquad\qquad - 2 I_0 \cos \omega \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda , \end{aligned} \right. \tag{16}$$

dove, ricordiamolo,

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi n (t - Ax) + \alpha , \\ \nu^2 &= y^2 + (|z|+d)^2 , \\ \tau_1^2 &= (y-\lambda)^2 + (|z|+d)^2 , \\ \tau_2^2 &= (y+\lambda)^2 + (|z|+d)^2 , \end{aligned}$$

mentre le costanti p e q sono definite dalla (8).

Il campo elettromagnetico, che, in assenza di schermo conduttore, è caratterizzato dai potenziali — parte reale delle (1′) —

$$(17)\quad F' = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\Delta}\,;\ U' = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\Delta}\,,\ V' = 0\,,\ W' = 0\,,$$

lo è invece, tenendo conto dello schermo, da

$$(18)\quad F = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \left\{\log\frac{1}{\Delta} - \log\frac{1}{r}\right\};\ U = F + (U_1 - F_1)\,,\ V = V_1\,,\ W = 0\,,$$

dove bisogna sostituire per $U_1 - F_1$ e V_1 i loro valori (16).

Le componenti delle forze elettromagnetiche si hanno introducendo nelle (I) , (II) i potenziali (18). Ma le espressioni, che ne risultano, non sono ancora abbastanza comode per il calcolo numerico, nè sopratutto per acquistare un idea dell'andamento del fenomeno e fornire indicazioni ad eventuali sperimentatori.

Mostrerò in una terza Nota come a ciò si pervenga mediante uno sviluppo asintotico degli integrali, che compariscono nelle espressioni trovate.

Matematica. — *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.* Nota di Ugo Amaldi, presentata dal Socio S. Pincherle.

Seguendo il Darboux e il Lie, chiamo *cerchi geodetici* di una superficie le curve di essa, che hanno curvatura geodetica costante. È noto che se una congruenza isoterma di curve su di una superficie è composta di cerchi geodetici, lo stesso accade per la congruenza ortogonale, e che due congruenze ortogonali di cerchi geodetici sono sempre isoterme (1). Non ogni superficie contiene sistemi doppi diffatti, e si riconosce immediatamente che, se una superficie ne contiene uno, il suo elemento lineare, riferito a codesto sistema doppio come a sistema coordinato, assume la forma

$$[A]\qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{[U + V]^2}\,,$$

dove U e V sono funzioni rispettivamente della sola u e della sola v. Ora il Darboux nella III Parte delle sue « *Leçons sur la théorie générale des*

(1) Darboux, l. c. III Partie, n. 654; Bianchi, *Geometria Differenziale*, pag. 170.

surfaces » (pag. 155) propone il problema di *cercare tutte le superficie il cui elemento lineare è riducibile in diversi modi alla forma* [A], *vale a dire le superficie che ammettono più coppie di congruenze ortogonali isoterme di cerchi geodetici.* Questa questione è analoga all'altra, proposta pur essa dal Darboux e risoluta completamente dal Koenigs (1), relativa alle superficie contenenti sistemi doppi ortogonali isotermi di ellissi ed iperbole geodetiche, cioè alle superficie, il cui elemento lineare è riducibile alla forma del Liouville

$$[B] \qquad ds^2 = [U + V]\,[du^2 + dv^2]\,.$$

Il Ricci ha risoluto un problema intimamente legato a questo (2), il problema della esistenza e della determinazione dei sistemi doppi isotermi del Liouville su di una superficie di *dato* elemento lineare. Io, in questa e in altra Nota che spero mi sarà concesso l'onore di presentare a questa illustre Accademia, mi propongo di risolvere l'analogo problema pel caso dei cerchi geodetici; mi propongo cioè il problema seguente: *Data una forma differenziale quadratica positiva in due variabili*

$$\varphi = \sum_{r,s}^{1,2} a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

riconoscere se sulle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ *esistano congruenze isoterme di cerchi geodetici; e nel caso affermativo assegnare il sistema di equazioni, da cui dipende la determinazione di tutte codeste congruenze.*

Io ritrovo il risultato già noto (3) che sulle superficie a curvatura totale costante esistono ∞^4 sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici e assegno il sistema completo, dalla cui integrazione dipende la determinazione di tutti codesti sistemi doppi di curve. Escluso codesto caso, dimostro che una superficie non può ammettere più di ∞^1 sistemi doppi della specie considerata, e caratterizzo le superficie, che ne contengono un numero finito, in quanto assegno il modo per riconoscere con un numero finito d'operazioni in termini finiti se una superficie *data* goda di codesta proprietà, e per determinare, in caso affermativo, i sistemi in parola. Formo poi esplicitamente le condizioni sotto cui una data superficie contiene una semplice infinità di quei sistemi e assegno il sistema completo, la cui integrazione, quando siano soddisfatte siffatte condizioni, conduce alla determinazione di codesti sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.

(1) *Mémoire sur les lignes géodésiques,* Mém. des Savants Étrangers, t. XXXI, 1894.

(2) *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville,* Atti dell'Ist. Veneto, t. LII, 1894. « *Lezioni sulla teoria della superficie* », Cap. VI, VII.

(3) Darboux, l. c. ibidem.

I metodi che io applico sono quelli del Calcolo differenziale assoluto del Ricci (1), e anzi debbo notare esplicitamente che nei calcoli richiesti dal presente problema io non ho avuto che da ripetere, leggermente modificati, i procedimenti e gli artifici escogitati ed applicati dal Ricci pel suo caso. L'identità di notazioni che, fino che mi è stato possibile, ho cercato di osservare, renderà facile il riscontro.

Noto, infine, che se immaginiamo riferito il dato elemento lineare alle sue coordinate simmetriche

$$ds^2 = \lambda\, dx\, dy\,,$$

il problema, che io qui risolvo, equivale al seguente: *Data un'equazione lineare alle derivate parziali del second'ordine e ad invarianti uguali*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda\, z\,,$$

riconoscere se sia riducibile mediante una trasformazione $x' = \mathrm{X}(x)$, $y' = \mathrm{Y}(y)$ *alla forma*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'\, \partial y'} = \frac{z}{[\varphi(x' + y') + \psi(x' - y')]^2}$$

e nel caso affermativo assegnare il sistema di equazioni, che definisce le funzioni X *e* Y, *a ciò necessarie.*

1. Si consideri su di una superficie di elemento lineare dato $ds = \sqrt{\varphi}$ una qualsiasi coppia di congruenze ortogonali di curve. Se K è la curvatura totale della superficie (cioè della forma quadratica φ) e se indichiamo con ds_1, ds_2 gli elementi d'arco delle curve generiche delle due congruenze e con γ, (γ) le corrispondenti curvature geodetiche, abbiamo per una notissima formola del Liouville (2),

$$\frac{d(\gamma)}{ds_1} - \frac{d\gamma}{ds_2} + \gamma^2 + (\gamma)^2 + \mathrm{K} = 0, \tag{1}$$

dove $\frac{d}{ds_1}, \frac{d}{ds_2}$ indicano le derivate (di direzione sulla varietà) secondo gli archi s_1 ed s_2 delle curve delle due congruenze.

Se poi le due congruenze considerate appartengono ad un fascio isotermo, è nullo quell'invariante del fascio, che il Ricci chiama *anisotermia* di esso, abbiamo cioè

$$\frac{d\gamma}{ds_1} + \frac{d(\gamma)}{ds_2} = 0\,. \tag{2}$$

(1) Per una esposizione riassuntiva completa di codesti metodi, cfr. Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. Bd. LIV.

(2) Darboux, l. c., III Partie, n. 643; Bianchi, l. c. pag. 148, form. (6*).

Risulta di qui che le coppie ortogonali di congruenze isoterme sulla data varietà sono caratterizzate dal sistema (1) (2), al quale, ove ricorrendo allo spediente ingegnoso del Ricci, si introducano due indeterminate α e β, si può sostituire il sistema equivalente

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{ds_1} = -\beta \qquad \dfrac{d\gamma}{ds_2} = \frac{1}{2}(\alpha + \mathrm{K}) + \gamma^2 \\ \dfrac{d(\gamma)}{ds_1} = \frac{1}{2}(\alpha - \mathrm{K}) - (\gamma)^2 \qquad \dfrac{d(\gamma)}{ds_2} = \beta . \end{cases}$$

Se con λ_r $(r = 1, 2)$ indichiamo il sistema coordinato covariante a invariante algebrico uguale ad 1 delle curve di elemento lineare ds_1, il problema di determinare i sistemi doppi ortogonali isotermi della data varietà, coincide analiticamente con quello di ricercare le condizioni di integrabilità del sistema (3), ove si considerino come incognite le λ_r, γ, (γ), α e β [1], e poi, verificate siffatte condizioni, di eseguirne effettivamente l'integrazione. A raccogliere qualche contributo indiretto e modesto alla risoluzione di codesto problema veramente arduo, si può prefissare *a priori* una determinazione particolare per una delle indeterminate β o α, e poi studiare l'esistenza ed, eventualmente, la determinazione effettiva dei sistemi doppi ortogonali isotermi corrispondenti; cercare, cioè, le condizioni di integrabilità e la integrazione del sistema (3), in cui si considerino incognite le λ_r, γ, (γ) e, rispettivamente, α o β.

Sotto questa unica categoria di problemi si possono raccogliere tanto quello risoluto dal Ricci corrispondente a $\beta = 3\,\gamma\,(\gamma)$, quanto quello, di cui io qui mi occupo, il quale corrisponde a $\beta = 0$, in quanto la condizione

$$(4)\qquad \frac{d\gamma}{ds_1} = 0$$

esprime che le linee di elemento lineare ds_1 (e quindi anche le traiettorie ortogonali) sono a curvatura geodetica costante.

A risolvere uno qualsiasi di codesti problemi bisognerà cominciare col rendere *completo* il sistema (3), aggiungendovi le equazioni che si ottengono successivamente come condizioni di integrabilità di esso. Ora le due deriva-

[1] Naturalmente si devono considerare in sistema colle (3) le due equazioni che definiscono le curvature geodetiche γ e (γ) per mezzo delle λ_r

$$\gamma = \sum_{r,s}^{1,2} \lambda_2^{(r)}\, \lambda_1^{(s)}\, \lambda_{1/rs}\,, \quad (\gamma) = -\sum_{r,s}^{1,2} \lambda_1^{(r)}\, \lambda_2^{(s)}\, \lambda_{2/rs}\,;$$

cfr. Ricci et Levi-Civita, l. c. Chap. II, § 1, form. (7).

zioni intrinseche $\frac{d}{ds_1}$, $\frac{d}{ds_2}$ non sono commutabili fra loro, ma sono tali che è identicamente [1]

$$\frac{d}{ds_2}\frac{d}{ds_1} - \frac{d}{ds_1}\frac{d}{ds_2} = \gamma\frac{d}{ds_1} + (\gamma)\frac{d}{ds_2},$$

onde risultano pel sistema (3) le due condizioni di integrabilità

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds_1} + 2\dfrac{d\beta}{ds_2} = -\dfrac{d\mathrm{K}}{ds_1} + 6\beta\gamma - 2(\gamma)\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\mathrm{K}) + \gamma^2\right] \\ \dfrac{d\alpha}{ds_2} - 2\dfrac{d\beta}{ds_2} = \dfrac{d\mathrm{K}}{ds_2} + 6\beta(\gamma) + 2\gamma\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\mathrm{K}) - (\gamma)^2\right]. \end{cases}$$

Se ora si supponesse prefissata una determinazione particolare per α, si dedurrebbe di qui, come condizione di integrabilità rispetto a β, la

$$(6)\quad \frac{d^2\alpha}{ds_1^2} + \frac{d^2\alpha}{ds_2^2} + \frac{d^2\mathrm{K}}{ds_1^2} - \frac{d^2\mathrm{K}}{ds_2^2} + 5\left[(\gamma)\frac{d\alpha}{ds_1} - \gamma\frac{d\alpha}{ds_2}\right] + 5\left[(\gamma)\frac{d\mathrm{K}}{ds_1} + \gamma\frac{d\mathrm{K}}{ds_2}\right] + \\ + 4\alpha\left[\gamma^2 + (\gamma)^2\right] + 4\,\mathrm{K}\left[(\gamma)^2 - \gamma^2\right] = 0,$$

la quale, noteremo incidentalmente, assume una forma particolarmente semplice per la determinazione $\alpha = \mathrm{K}$ (o $\alpha = -\mathrm{K}$). Si verifica dalla (6), che di sistemi doppi ortogonali isotermi soddisfacenti al sistema (3) in cui sia $\alpha = \mathrm{K}$, esiste sulle superficie sviluppabili una quadrupla infinità; come pure si trova che, se su di una varietà esiste un tale sistema doppio, il suo elemento lineare, riferito ad esso, assume la forma

$$ds^2 = e^{v\varphi+\psi}\left[du^2 + dv^2\right],$$

dove φ e ψ sono funzioni arbitrarie della sola u; codesta forma di elemento lineare comprende quello delle superficie spirali di Lie e Lévy [2].

Ma lasciando da parte codesto caso, che qui non ci interessa, supponiamo invece che sia prefissato β: allora la condizione di integrabilità delle (5) rispetto ad α è data dalla

$$(7)\quad 2\left[\frac{d^2\beta}{ds_1^2} + \frac{d^2\beta}{ds_2^2}\right] + \frac{d^2\mathrm{K}}{ds_2\,ds_1} + \frac{d^2\mathrm{K}}{ds_1\,ds_2} + 10\left[(\gamma)\frac{d\beta}{ds_1} - \gamma\frac{d\beta}{ds_2}\right] + \\ + 3\left[(\gamma)\frac{d\mathrm{K}}{ds_2} - \gamma\frac{d\mathrm{K}}{ds_1}\right] - 4\beta\,\mathrm{K} + 8\beta\left[\gamma^2 + (\gamma)^2\right] = 0,$$

la quale andrà aggiunta al sistema (3) (5).

(1) Ricci et Levi-Civita, l. c. Chap. II, § 2.
(2) Darboux, l. c. IV Partie, Note VI, pag. 442.

2. Prima di procedere alla ricerca particolare che io mi sono proposto, mi sia permesso di osservare che le due determinazioni $\beta = 3\gamma(\gamma)$ e $\beta = 0$, corrispondenti rispettivamente al caso dei sistemi isotermi del Liouville e dei cerchi geodetici, sono casi particolari della determinazione $\beta = c\gamma(\gamma)$, dove c indica una costante arbitraria.

Supponendo che su di una superficie esista un sistema doppio ortogonale isotermo soddisfacente al sistema (3), sia

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2)$$

l'elemento lineare di essa, riferita a codesto sistema doppio come a sistema coordinato. Si ha allora notoriamente

$$\gamma = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v},\ (\gamma) = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}$$

$$\frac{d}{ds_1} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u},\quad \frac{d}{ds_2} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial v};$$

onde risulta dalla

$$\frac{d\gamma}{ds_1} = -c\gamma(\gamma) \tag{8}$$

che λ deve soddisfare all'equazione

$$\lambda\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} + (c-2)\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0.$$

Ma l'integrale generale di questa è, ove pongasi $c = 1 + \frac{1}{a}$,

$$\lambda = [U + V]^a$$

dove U e V sono funzioni arbitrarie rispettivamente della sola u e della sola v. Concludiamo che l'elemento lineare di una superficie su cui esista una congruenza isoterma di curve, la cui curvatura geodetica rende soddisfatta la (8), è caratterizzato dalla riducibilità alla forma

$$[C] \qquad ds^2 = [U + V]^{2a}[du^2 + dv^2],\ c = 1 + \frac{1}{a}$$

che dà, naturalmente, per $c = 3$ l'elemento lineare del Liouville e per $c = 0$ quello delle superficie con un sistema doppio ortogonale isotermo di cerchi geodetici.

Per $\beta = c\gamma(\gamma)$ la condizione di integrabilità (7) diventa

$$\frac{d^2K}{ds_2\,ds_1} + \frac{d^2K}{ds_1\,ds_2} + (3+2c)\left[(\gamma)\frac{dK}{ds_2} - \gamma\frac{dK}{ds_1}\right] + 4c(c-3)\gamma(\gamma)K = 0. \tag{9}$$

Poichè essa è identicamente soddisfatta per $K = 0$, si ha che l'elemento

lineare di una superficie sviluppabile è riducibile in ∞^4 modi alla forma [C]; e si può anche notare che per K = cost la (8) è identicamente soddisfatta solo nel caso dei sistemi isotermi di ellissi ed iperbole geodetiche o di cerchi geodetici.

Porremo qui termine a queste digressioni, per procedere oramai speditamente ai calcoli richiesti dalla risoluzione del problema proposto. Saranno essi l'oggetto di una Nota successiva.

Mineralogia. — *Sul glaucofane di Chateyroux (valle di Gressoney).* Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio STRÜVER.

Sono molto rari, a tutt'oggi, i giacimenti di glaucofane che hanno fornito cristalli terminati alle estremità dell'asse verticale. Bodewig (1) per il primo, nei cristalli di Zermatt, ha riconosciuto le forme terminali $c = \{001\}$ OP e $r = \{\bar{1}11\}$ P. Le stesse forme furono determinate dal v. Lasaulx (2) nei cristalli dell'isola Groix.

Più recentemente Colomba (3) ha descritto il glaucofane della Beaume, nell'alta valle della Dora Riparia. Ma a giudicare da quanto dice, egli non ha avuto a sua disposizione dei bei cristallli, tanto che non ha potuto misurare esattamente nemmeno l'angolo del prisma. In alcuni cristalli egli ha notato delle faccette curve, ad un'estremità di *z*, che potrebbero essere quelle di $\{\bar{1}11\}$ e $\{001\}$, ma egli stesso non si pronuncia sulla attendibilità di queste facce, che non hanno permesso nemmeno misure approssimative (4).

L'ing. S. Franchi, al quale sono lieto di esprimere anche qui la mia viva riconoscenza e gratitudine per la benevolenza, con la quale mi concede di studiare i minerali che egli possiede, ha scoperto, la scorsa estate, nei dintorni di Chateyroux dei bei cristalli di glaucofane, che egli cortesemente mi ha affidato per lo studio.

I cristalli di glaucofane tappezzano una piccola cavità in un masso di eclogite che fu trovato, come gentilmente mi ha comunicato l'ing. Franchi, presso la mulattiera che dai casali di Chateyroux, ad occidente di Fontainemore, scende al valloncello di Theilly, piccolo affluente di destra del Lys.

(1) *Ueber den Glaukophan von Zermatt.* Pogg. Ann. 1876, CLVIII, 224.

(2) *Ueber das Vorkommen und die mineralogische Zusammensetzung eines neuen glaukophangesteins von der Insel Groix.* Sitzber. niederrhein. Gesellsch. in Bonn. 1883, XII, 3.

(3) *Sulla glaucofane della Beaume.* Atti Acc. Scienze di Torino 1894, XXIX.

(4) L'ing. E. Mattirolo, del R. Ufficio Geologico, ha avuto la cortesia di mettere a mia disposizione un'abbondante raccolta di cristalli isolati dal calcare della Beaume. Essi sono bellissimi: misurano fino 8 mm. secondo l'asse *z*, ma non ne ho trovato nemmeno uno con faccette terminali.

La testata di Chateyroux, completamente levigata dall' antico ghiacciaio della valle del Lys, è pure parzialmente coperta da morenico, sicchè non si può escludere in modo assoluto che il blocco eclogitico in questione provenga da parti più alte della valle di Gressoney. Però la frequenza di lenti eclogitiche nei micascisti dei dintorni immediati di Chateyroux, i quali fanno parte di quella estesissima zona di micascisti eclogitici che vanno dalla valle dell' Orco alla valle Sesia, attraverso alla valle d'Aosta ed alle valli biellesi, rende più probabile, secondo l' ing. Franchi, che il blocco provenga dai pressi immediati di Chateyroux. E in questa stessa zona che furono trovate dal Franchi, quali forme estreme dell' eclogite, numerose masse di rocce giadeitiche o cloromelanitiche, e la eclogite del cui pirosseno sodico ho lo scorso anno pubblicata l' analisi.

La roccia nella quale si trova il glaucofane in cristalli, è un' eclogite a glaucofane povera in granato, che costituisce dei piccoli elementi subordinati. Abbondante è il pirosseno verde-chiaro, parzialmente uralitizzato e cloritizzato, che sovente è però anche inalterato.

L' anfibolo, che con piccole listerelle intramezza il pirosseno, è di colore verde un po' più scuro di quest' ultimo. Il glaucofane è anche abbondante e talora parzialmente cloritizzato, e presenta numerose inclusioni di granato, di rutilo, in bei cristalletti ed in granuli, e di sfeno. Sono interessanti delle plaghe che mostrano del glaucofane incluso in un grande individuo di pirosseno, colle traccie dei clivaggi perfettamente parallele in tutti e due i minerali. Nelle sezioni sottili della roccia si osservano talvolta, sulle liste di glaucofane, dei cristallini di glaucofane bellissimi, che lasciano riconoscere le forme $\}110\{$ $\}010\{$ $\}\bar{1}11\{$: ve ne sono poi anche altri non terminati, con le forme $\}110\{$ e $\}010\{$. Agli elementi finora notati è da aggiungere la mica bianca, discretamente frequente.

I cristalli di glaucofane, il cui studio forma l' oggetto di questa Nota, sono accompagnati da muscovite in laminette, da qualche grosso granulo di quarzo e da alcuni rari cristallini di sfeno, di colore giallo chiarissimo. In uno di essi ho potuto riconoscere al goniometro le forme $c = \}001\{$ OP, $m = \}110\{ \infty$ P, Y $= \}101\{ -$ P$\frac{1}{\infty}$, $n = \}111\{ -$ P, $l = \}\bar{1}12\{ {}^1/_2$ P e $a = \}100\{ \infty$ P$\frac{1}{\infty}$. Le forme più sviluppate sono c e n; Y è abbastanza grande, come pure a: sottilissime sono l e m. Nello sfeno di altri giacimenti $\}101\{$ è molto rara.

I cristalli di glaucofane sono neri, splendenti, talvolta molto allungati secondo l'asse z, frequentemente sono però piuttosto tozzi. Il più lungo misurava 12 mm. secondo z.

Le facce della zona [001] sono striate, con striatura sottile e rada, parallelamente all' asse verticale; sono spesso ondulate, come se i cristalli durante la loro formazione avessero subito delle pressioni, agenti dalle pareti della drusa verso l' esterno.

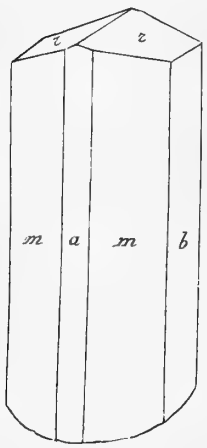
Le forme determinate sono le seguenti:

{100}	$\infty \breve{P} \infty$	h^1	a
{010}	$\infty \breve{P} \infty$	g^1	b
{110}	∞P	m	m
{$\bar{1}$11}	P	$b^1/_2$	r

Esse si riuniscono nelle seguenti combinazioni:

1) *mr*
2) *mbr*
3) *mabr*.

L'ortopinacoide è raro: quando è presente, ha però faccette abbastanza grandi. Più frequente è il clinopinacoide, talora con faccie strette, più spesso, però, discretamente grandi. L'emipiramide {$\bar{1}$11} ha faccette perfettamente piane, sono però, quasi sempre, del tutto prive di splendore. Le misure eseguite dell'angolo *mr* tolgono ogni dubbio sul simbolo di queste facce terminali.



Sovente le facce del prisma {110} hanno disuguale sviluppo: talvolta due facce parallele dominano sulle altre, cosicchè i cristalli diventano tabulari. Tre misure dell'angolo *mm* hanno dato:

55° 2′, 54° 56′, 54° 55′.

Questi valori sono abbastanza diversi da quelli fin qui trovati nel glaucofane. Infatti Strüver (1) per la gastaldite della Val d'Aosta dà 55° 35′ 30″, Bodewig 55° 16′ (Zermatt), v. Lasaulx 55° 15′ (Isola Groix), Luedecke (2) 55° 10′ (Isola di Syra). I valori da me ottenuti sono esattissimi, e rappresentano il prisma più ottuso finora trovato.

Ho potuto misurare con grande esattezza l'angolo che la seconda bisettrice c forma con la verticale su (010), impiegando l'oculare di Bertrand: come media di parecchie letture concordantissime ho trovato 4° 30′.

Il pleocroismo, bellissimo, è:

a = giallo verdastro chiarissimo, quasi incoloro;
b = violetto;
c = azzurro-celeste.

Al cannello si comporta come il glaucofane ordinario e la gastaldite.

Io ho eseguito due analisi, attaccando il minerale col carbonato sodico-potassico: la soda fu determinata col metodo di L. Smith. Col nitrito so-

(1) *Sulla gastaldite, nuovo minerale del gruppo dei bisilicati anidri.* Atti R. Acc. Lincei, 1875, II (2°), 333.

(2) *Der Glaukophan und die Glaukophan führenden Gesteine der Insel Syra.* Zeitsch. d. deutsch. geol. Gesellsch. 1876, XXVIII, 249.

dico-cobaltico si potè constatare la presenza di potassa in quantità troppo piccola per essere determinata con esattezza. L'ossido ferroso è stato determinato col metodo di Mitscherlich: questo saggio ha dimostrato che tutto il ferro si trova allo stato di sale ferroso, precisamente come nella gastaldite.

Ho anche eseguito una determinazione diretta di acqua, arroventando il minerale in un tubo da combustione previamente calcinato, e raccogliendo l'acqua che si svolgeva in un tubo a cloruro di calcio.

I cristalli analizzati erano perfettamente puri e non alterati. L' esame microscopico portato su parecchie sezioni non ha permesso di scorgere la minima traccia di alterazione o di sostanza estranea nei cristalli tappezzanti la drusa.

Frequenti alterazioni in clorite ed ossido di ferro idrato, nonchè interposizioni di scarsi granati e di laminette di mica presentano, invece, le masserelle granulari di glaucofane, che si trovano in alcuni punti della roccia.

La media dei risultati ottenuti è la seguente:

SiO_2	55,43
Al_2O_3	12,26
FeO	8,07
CaO	2,91
MgO	8,67
Na_2O	9,02
H_2O	2,87
	99,23

I risultati di questa analisi differiscono notevolmente da quelli che Cossa ha ottenuto nella gastaldite di St. Marcel. La mia analisi è invece, almeno nelle linee generali, molto vicina a quelle che Lüdecke e Schnedermann hanno pubblicato del glaucofane tipico dell' isola di Syra:

	Lüdecke
SiO_2	55,64
Al_2O_3	15,11
Fe_2O_3	3,08
FeO	6,85
MgO	7,80
MnO	0,56
CaO	2,40
Na_2O	9,34
	100,78 (1)

(1) Anche il glaucofane di Chateyroux contiene piccolissime quantità di manganese. Schnedermann trovò 12 % di Al_2O_3.

È poi quasi uguale a quella che Colomba ha fatto conoscere dei cristalli del *calcare* della Beaume.

È interessante, nei cristalli da me analizzati, la notevole percentuale di acqua. Per parecchio tempo l'acqua data da molte analisi di anfiboli fu considerata secondaria: le determinazioni del resto non avevano grande valore, essendo delle semplici perdite di peso per calcinazione. Berwerth (1) e Haefcke (2), l'hanno considerata invece come costituente originario: il primo ha ammesso che si trovi come $Si H_2 O_3$, il secondo invece, nei termini alluminiferi, come $Si H_4 O_4$. Nei miei cristalli, che sono purissimi, mi sembra difficilmente negabile che l'acqua che essi contengono sia acqua di costituzione, tanto più che il glaucofane sovente contiene acqua: Berwerth dà per i cristalli di Zermatt un tenore di acqua (2,54 %) quasi uguale a quello da me trovato nel campione di Chateyroux.

L'ipotesi di Haefcke, che, cioè, gli anfiboli alluminiferi sieno da considerarsi come miscele di ortosilicati, non è applicabile alle analisi di glaucofane finora conosciute.

La mia analisi dà la formula:

$$2\,Na_2\,Al_2\,Si_4\,O_{12}$$
$$Na\,Si\,O_3$$
$$Ca\,Si\,O_3$$
$$4\,Mg\,Si\,O_3$$
$$2\,Fe\,Si\,O_3$$
$$3\,H_2\,Si\,O_3$$

Petrografia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei.* III. *Inclusi nel tufo e nelle scorie* (3). Nota di E. Manasse, presentata dal Socio C. De Stefani.

Dal prof. De Stefani furono raccolti entro le scorie ed entro il tufo del Fondo Riccio, dei quali fu già detto in due precedenti Note (4), alcuni inclusi, che, secondo lo studio fattone, sono da riferirsi alla *trachite sanidino-augitica*, alla *trachite biotitica* e alla *trachite andesitica*. Sono tutte rocce a struttura ipocristallina con pochissima base vetrosa; e tutte rientrano, seguendo il concetto del Lacroix (5), fra le rocce incluse omogenee, fra quelle

(1) *Ueber die chemische Zusammensetzung der Amphibole* Sitzungsber. d. k. Akad. der Wissensch. Wien 1882, LXXXV (1) 153.

(2) *Ueber die chemische Constitution der Hornblende.* Inaug. Diss. Göttingen, Berlin 1890.

(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

(4) Rend. Acc. Linc. Vol. XI, 1° sem., fasc. 2 e 3, pag. 85 e 125.

(5) *Les enclaves des roches volcaniques,* Macon 1893.

rocce, cioè, che devono la loro origine allo stesso magma che formò la roccia includente.

Trachite sanidino-augitica.

Un primo incluso, raccolto nel tufo giallo sotto le scorie del Fondo Riccio all'estremità del vallone S. Angelo, ha massa fondamentale poco porosa, grigio-nera e ad occhio nudo vi si scorgono solo dei cristalli porfirici tabulari e vetrosi di sanidino.

Al microscopio questa massa fondamentale apparisce minutissima e molto povera di elementi colorati e presenta struttura ipocristallina, assai evidentemente fluidale. In sezioni molto sottili e con fortissimo ingrandimento risulta formata principalmente di una parte vetrosa incolora e di microliti feldispatici allungati pure incolori. I microliti feldispatici sono esilissimi e lunghi appena qualche centesimo di millimetro; hanno colori d'interferenza bassi e si estinguono parallelamente alla loro lunghezza; sono quindi riferibili al sanidino. Molto più scarsamente entrano a far parte della massa fondamentale dei microliti verdognoli di augite, delle laminette bruno-rossastre di biotite e dei granuli di magnetite più o meno limonitizzati. La massa fondamentale si mostra al microscopio, come già potevasi notare macroscopicamente, assai povera in pori e i pori sono sempre piccoli.

Fra i minerali porfirici il più abbondante è il sanidino. Si presenta in cristalli tabulari secondo (010), nettamente terminati, incolori e freschissimi; vi si riconoscono talora le linee di sfaldatura basale e più frequentemente delle linee di frattura irregolarmente distribuite. Tali cristalli sorpassano talora i tre millimetri in lunghezza e il mezzo millimetro in larghezza. Semplici alcuni, la maggior parte sono però geminati; comunissima è la geminazione con la legge di Carlsbad, rarissima invece con quella di Baveno. I colori d'interferenza sono bassi nel grigio-biancastro e l'estinzione, rispetto allo spigolo d'allungamento (010):(001), avviene a 0° su (001) e varia da 4° a 8° su (010). Molto raramente si riscontrano nei cristalli di sanidino delle inclusioni di vetro e di apatite e delle inclusioni gassose localizzate in certe parti dei cristalli.

Assai scarso invece è il plagioclasio: se ne incontrano nelle sezioni solo pochissimi cristalli tabulari essi pure, o colonnari, e geminati con la legge dell'albite, alla quale si associa rarissimamente quella del periclino. L'estinzione simmetrica di 19°-22° che presentano, fanno riportarli ad un'andesina basica. Un solo cristallo zonato vidi e con pochissima differenza di acidità fra le diverse zone.

Più diffusa del plagioclasio, ma sempre in cristalli di minori dimensioni, è l'augite, verde, non pleocroica e con angolo di estinzione dalla sfaldatura prismatica di 41° circa.

La biotite è rappresentata da lamine bruno-giallognole, allungate e assai alterate, onde sono frequentemente inquinate da prodotti ferruginosi.

Nè mancano in questa roccia dei grossi grani di magnetite e delle macchie, assai rare però, di limonite ed ematite. Mancano invece completamente la sodalite e l'hauina; e la polvere della roccia, trattata con acido nitrico, non dà reazione affatto nè di cloro, nè di anidride solforica.

Disgregata la roccia con carbonato sodico-potassico diede una percentuale in silice di 62,60.

Trachite biotitica.

La roccia, che ha colore rosso-cupo, fu raccolta entro le scorie del Fondo Riccio. È assai porosa e ad occhio nudo nella pasta apparentemente uniforme, con evidente struttura fluidale, si riconoscono solo fra i minerali porfirici delle lamine allungate brune di biotite.

Al microscopio la massa fondamentale, che costituisce la roccia quasi totalmente, apparisce ricca in pori di forma irregolare e generalmente ellittica. I minerali porfiricamente disseminati sono pochi e in generale di piccole dimensioni e spettano alla biotite, al sanidino, al plagioclasio, all'augite e ad un pirosseno trimetrico. Ma si hanno però delle lamine di biotite che raggiungono la lunghezza di qualche millimetro.

La massa fondamentale risulta formata a fortissimo ingrandimento da un impasto estremamente minuto di minerali che, data la piccolezza loro, non si prestano ad esatta determinazione. Probabilmente però essa è costituita per la massima parte da microliti feldispatici così piccoli da ridursi a semplici punteggiature, da squamette di biotite e da innumerevoli granuli di ematite e limonite prodotti dall'alterazione della biotite. Mi pare che sianvi pure pochi microliti di augite e di apatite. La presenza di quest'ultima specie sarebbe confermata da un saggio chimico che diede per questa roccia trachitica un tenore in anidride fosforica di 0,38 %. Male si può dire se esista una parte vetrosa, per l'addossarsi dei microliti l'uno sull'altro; in ogni modo, se esiste, è scarsissima.

Passando ai minerali porfirici, il più diffuso è la biotite in lamine frequentemente alterate e sostituite da prodotti ferruginosi, spesso rotte con spostamento di parti; in altre invece la sfaldatura è nettissima. Il sanidino è limpido, incoloro ed ha colori d'interferenza bassi. Generalmente è in cristalli piccoli, ma ne misurai uno lungo tre millimetri. Rari ne sono i geminati con legge di Carlsbad e rare le inclusioni liquide e vetrose piccolissime. Il plagioclasio è di acidità diversa, e si presenta in cristalli allungati, spesso tabulari, secondo (010). Non vidi cristalli zonati. Il più frequente è un plagioclasio basico da riportarsi alla bitownite o addirittura all'anortite. Raramente nel plagioclasio è inclusa della biotite. Il pirosseno monoclino ha colore debolmente verde, fin quasi nullo, ed angolo di estinzione di 26°-29°

dall'asse verticale; sembra doversi riferire ad un termine della serie diopside-augite; contiene inoltre inclusioni vetrose piccolissime. Riferisco infine al pirosseno trimetrico un unico cristallo a contorno non netto e di color verde, pel suo pleocroismo debole molto, per la netta sfaldatura prismatica e per l'estinzione che è rigorosamente parallela all'allungamento.

Ho indicato la roccia col nome di trachite biotitica sia perchè la biotite è fra i minerali porfirici quello che predomina, sia perchè essa entra a far parte pure essenzialmente della massa fondamentale. L'acidità della roccia è assai inferiore a quella dell'incluso precedentemente descritto. Disgregata infatti con carbonato sodico-potassico diede per la silice la percentuale di 52.74.

Trachite andesitica.

Pure questa roccia fu raccolta entro le scorie del Fondo Riccio. Il suo colore è grigio, ha cavità assai grosse, che in parte sono pori a gas, in parte sono dovute alla scomparsa di minerali porfirici preesistenti. Ad occhio nudo si scorgono porfiricamente disseminate nella massa grigia solo delle lamine di biotite e dei cristalli bianchi feldispatici fortemente caolinizzati.

Al microscopio la massa fondamentale risulta formata da un feltro di listarelle feldispatiche allungate secondo lo spigolo (001):(010), cui si associano delle piccole squamette di biotite, tanto alterate che talora si riducono soltanto a residui di ematite e magnetite limonitizzata.

Mal si giudica pel sovrapporsi delle liste feldispatiche, se esista o no una parte vetrosa nella massa fondamentale; in ogni modo se, come è probabile, è presente, è anche scarsissima. Le listarelle feldispatiche sono alterate, ed hanno dimensioni aggirantisi intorno ai $^{2}/_{10}$ o $^{3}/_{10}$ di millimetro, e accennano per la disposizione loro a struttura fluidale. Alcune risultano semplici; altre invece semplicemente geminate, ma non mancano dei cristalletti polisintetici, formati però solo da tre o quattro individui. La massima parte delle listarelle feldispatiche spettano al sanidino, le altre ad un plagioclasio acido di composizione intermedia fra l'oligoclasio e l'andesina.

Fra i cristalli porfirici oltre i feldispati e la mica nera visibili anche ad occhio nudo, si riconoscono delle grosse sezioni, talora quadrate, di magnetite.

Il feldispato è in gran parte riferibile al plagioclasio; pochi, pochissimi, sono i cristalli di sanidino. Questi cristalli feldispatici, nettamente terminati, sono profondamente torbidi e ricoperti per alterazione da una materia opaca, grigia, che ora ricuopre completamente i cristalli, ora invece lascia libera una porzione interna e un sottile orlo esterno. Non è facile appunto per la sua forte alterazione potersi pronunziare circa la natura del plagioclasio. Esso sembra però in prevalenza essere un'andesina basica; ma non mancano termini assai più basici riferibili alla bitownite o all'anortite. In alcuni cri-

stalli zonati si possono assai bene notare tutti i passaggi da un termine all'altro, con crescente acidità dal centro alla periferia.

La biotite è generalmente assai meno alterata dei feldispati, ma riassorbita spesso dalla massa fondamentale. Include sovente dell'apatite.

Altri minerali non mi riuscì scorgere nelle sezioni sottili e la roccia, trattata con acido nitrico, non diede reazione affatto nè di cloro, nè di anidride solforica, ma diede tracce evidenti di anidride fosforica. La percentuale in silice posseduta da questa trachite andesitica è di 58,60.

Chimica. — *Sulla tautomeria dell'acido piromeconico.* Nota di A. Peratoner, presentata dal Socio E. Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull'esistenza di corpi racemici in soluzione.* Nota preliminare di G. Bruni e M. Padoa (1), presentata dal Socio G. Ciamician.

L'esistenza di composti racemici venne fin qui provata solamente per lo stato solido. Per ciò che si riferisce allo stato liquido, di soluzione e di vapore, le esperienze fatte finora furono del tutto negative o quasi. Molti autori ritengono perciò che l'esistenza di molecole racemiche sia legata allo stato cristallino; non mancarono però anche quelli che sostennero la possibilità di tale esistenza anche negli altri stati d'aggregazione. Pure gli argomenti addotti, ad esempio, da Küster (2) e da Ladenburg (3) per sostenere tale tesi, vennero fortemente oppugnati da altri ricercatori (4) e non portano ad ogni modo una prova sicura.

Per istudiare la questione della possibilità che molecole racemiche non dissociate esistano in soluzione, si presentava naturalmente come il più indicato, il metodo crioscopico. E difatti, appena questo fu scoperto, non mancarono ricerche dirette a tale scopo. Citeremo quelle di Raoult (5) per l'acido racemico e pel suo sale sodico-ammonico, sciolti in acqua; di Frankland e Pickard (6) per l'etere metilico dell'acido dibenzoilglicerico inattivo in diversi

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) Berichte d. deutschen Chem Ges. XXXI, 1847.
(3) Ibidem. XXVIII, 164, 1991.
(4) Marckwald, Berichte XXXII, 1089; E. Fischer, ibidem, XXVIII, 1153.
(5) Zeitschr. f. physik. Ch. I, 186 (1887).
(6) I. Ch. Soc. *69*, 128 (1896).

solventi; di Anschütz e Pulfrich (1) per l'etere dimetilico dell'acido diacetilracemico in acido acetico; di Wallach e Pulfrich (2) per l'isonitrosodipentene, e finalmente di Adriani (3) per la canforossima inattiva, nello stesso solvente. Il risultato di tutte queste esperienze fu però che i corpi inattivi mostrano, entro i limiti degli errori d'osservazione, pesi molecolari semplici ed uguali, cioè, a quelli dei corrispondenti composti attivi. Doveva presentarsi naturale l'idea che la scomposizione delle molecole racemiche dovesse, come in tutti i casi analoghi, essere limitata dalla presenza di un eccesso di uno dei prodotti della dissociazione stessa. In base a questo giustissimo concetto, Paternò e Manuelli (4) pensarono di usare come solvente l'etere dietilico dell'acido diacetildestrotartrico, sciogliendovi il corrispondente composto racemico, ed eseguirono in tal guisa varie misure; però, come questi autori ben fanno osservare, i risultati di tali esperienze non potevano essere in nessun caso decisivi, poichè o il composto racemico resta inalterato, ed allora è una sola molecola che determina l'abbassamento; oppure la dissociazione avviene, ed in tal caso gli abbassamenti sono dati ancora da una sola molecola, e cioè da quella dell'etere levogiro, poichè il destrogiro va semplicemente ad accrescere il solvente.

Noi abbiamo però pensato che alla soluzione del problema si poteva forse arrivare determinando le grandezze molecolari di sostanze racemiche, sciogliendole in un solvente in presenza di un forte eccesso di uno dei loro componenti. All'applicazione di questo metodo molte e varie difficoltà si oppongono, e prima di tutto la non grandissima precisione che si può raggiungere coi comuni apparecchi crioscopici. Appariva poi opportuno scegliere solventi privi di potere dissociante, come gli idrocarburi ed i loro derivati alogenati. Però la scelta di questi corpi come solventi escludeva la possibilità di sperimentare su corpi racemici che contenessero carbossili od ossidrili, poichè, come è noto, tali sostanze danno già di per sè luogo a fenomeni di associazione; onde la distinzione fra le due cause di anomalie, si rendeva al tutto o pressochè impossibile. Noi scegliemmo come sostanze che tali inconvenienti non presentassero, gli eteri dimetilici degli acidi diacetiltartrico e diacetilracemico. L'esistenza di quest'ultimo come vero composto racemico, non ostante il suo punto di fusione più basso di quello dei componenti, venne dimostrata da I. H. Adriani (l. c.) in base al metodo di Roozeboom. Noi usammo come solventi il benzolo, il p.-xilolo, il bromuro d'etilene e il bromoformio. Dapprima sperimentammo su soluzioni benzoliche contenenti il composto racemico solo, di confronto con altre contenenti il solo composto tartrico. Ottenemmo i seguenti risultati:

(1) Liebigs Ann. *247*, 121 (1888).
(2) Liebigs Ann. *246*, 231 (1888).
(3) Zeitschr. f. physik. Ch. XXXIII, 459.
(4) Questi Rendiconti 1897, 1° sem., 401.

Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari (K = 51)
Composto tartrico		
0,861	0°,17	259
1,887	0,37	261
2,879	0,55	259
Composto racemico		
0,814	0,165	252
1,554	0,32	254
2,352	0,48	250

$C_{10}\ H_{14}\ O_8 = 262$

Come si vede, il composto racemico è, nelle sue soluzioni pure, completamente scisso. Passammo allora a studiare il comportamento delle soluzioni contenenti un eccesso di composto attivo. Ci era però necessario di stabilire se l'aggiunta di notevoli quantità di questa sostanza al solvente, non alterasse in modo sensibile il valore di K. A questo scopo sciogliemmo in una soluzione benzolica contenente circa il 10 % di etere tartrico, piccole quantità di difenile. Gli abbassamenti ottenuti corrisposero a valori di K oscillanti fra 52,5 e 49,4, e quindi ad una media di 51. Qui però si trattava di un corpo nuovo aggiunto alla soluzione, e quindi valeva approssimatamente la legge degli abbassamenti indipendenti. Ma si deve riflettere che sciogliendo l'etere racemico in una soluzione di un eccesso di tartrico, quelle molecole del primo che si dissociano, vanno ad accrescere la quantità del secondo; ed è noto che, per cause non del tutto definite, tutti i corpi, a concentrazioni forti, tendono a dare pesi molecolari più elevati del normale. Noi istituimmo perciò alcune esperienze nel modo seguente. Si scioglieva in benzolo una certa quantità di etere tartrico e, determinato il punto di congelamento, si assumeva questo come punto di partenza, ed aggiungendo successivamente piccole quantità dello stesso composto, si calcolavano dagli ulteriori abbassamenti avuti, i pesi molecolari corrispondenti. Ecco i risultati di queste misure.

1. Etere tartrico in benzolo (K = 51)

Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari ($C_{10}\ H_{14}\ O_8 = 262$)
Conc. iniziale = 6,03		
1,254	0°,235	272
1,952	0,355	280

2. Etere tartrico in bromuro d'etilene (K = 118)

Conc. iniziale = 3,306		
0,637	0,28	269
1,311	0,52	297
1,990	0,78	301
0,675	0,285	279
1,371	0,575	281
2,060	0,835	291

3. Etere tartrico in paraxilolo (K = 43)

Conc. iniziale = 2,88			
	0,718	0,125	247
Conc. iniziale = 1,527			
	0,502	0,08	270
	1,007	0,165	262
	1,584	0,25	272

4. Etere tartrico in bromoformio (K = 144)

Conc. iniziale = 3,23			
	0,736	0,41	259
	1,322	0,71	268
	1,971	1,00	283

Come era da prevedersi, si hanno pesi molecolari alquanto più elevati del normale e che vanno in generale crescendo colla concentrazione.

Dopo ciò, passammo alle ricerche col composto racemico, operando in modo identico a quello ora descritto pel composto attivo.

1. In benzolo (K = 51)

Concentrazioni iniziali del composto tartrico	Concentrazioni del composto racemico	Abbassamenti	Pesi molecolari (C_{10} H_{14} O_8 = 262)
6,60	1,009	0,17°	303
	1,840	0,31	303
	3,100	0,54	293
6,21	0,889	0,145	312
	1,804	0,31	297
	2,545	0,46	282

2. In p. xilolo (K = 43)

2,86	0,714	0,10	307
	1,428	0,205	299
	2,224	0,31	308
	0,445	0,07	280
	0,945	0,16	260
	1,459	0,24	261

3. In bromuro d'etilene (K = 118)

3,82	0,702	0,275	301
	1,354	0,545	293
	2,144	0,82	309
3,67	0,677	0,265	302
	1,298	0,52	294
	1,983	0,77	304

Concentrazioni iniziali del composto tartrico	Concentrazioni del composto racemico	Abbassamenti	Pesi molecolari (C_{10} H_{14} O_8 = 262)
	3. In bromuro d'etilene (K = 118)		
3,32	0,655	0°,24	322
	1,291	0,50	304
	1,912	0,755	299
3,38	0,719	0,255	333
	1,353	0,49	325
	1,991	0,74	317
	4. In bromoformio (K = 144)		
	0,553	0,31	257
	1,056	0,595	255
	1,652	0,915	260

Come si vede, nel bromoformio non può notarsi alcuna differenza fra il comportamento del composto tartrico e quello del racemico. Negli altri solventi i pesi molecolari sono notevolmente più elevati che non nel caso precedente. Il ripetersi di questo fatto in varie serie di esperienze, ci sembra possa escludere trattarsi di errori fortuiti d'osservazione. Si dovrebbe pertanto concludere che molecole racemiche non dissociate possono, in queste condizioni, esistere in soluzione. A questa conclusione ci pare che debba pure condurre l'andamento dei pesi molecolari ottenuti, i quali, anzichè andar crescendo colla concentrazione, tendono in generale a diminuire. Ciò può spiegarsi se si rifletta che, aumentando la concentrazione del composto racemico, il componente attivo va trovandosi proporzionalmente man mano in minore eccesso rispetto al primo, talchè la sua influenza nel far retrocedere la dissociazione, va anch'essa facendosi sempre più piccola.

Ad una causa di questo genere si debbono probabilmente attribuire i valori non troppo elevati ottenuti con la prima serie in soluzione di p.-xilolo, poichè la concentrazione iniziale di etere tartrico era assai più piccola che negli altri casi. Onde apportare una prova ulteriore, abbiamo voluto fare una esperienza sciogliendo dapprima in bromuro d'etilene un eccesso di composto inattivo, aggiungendovi poi successive quantità dello stesso:

	Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari (C_{10} H_{14} O_8 = 262)
Conc. iniziale = 3,43			
	0,764	0°,32	281
	1,505	0,60	296
	2,176	0,87	295

Come si vede, i risultati ottenuti sono perfettamente concordanti con quelli avuti aggiungendo composto tartrico ad una soluzione già concentrata

dello stesso. È dunque necessaria la presenza di un eccesso di composto attivo perchè si ottengano col corrispondente corpo racemico, valori anormalmente elevati.

Noi siamo ben lungi dal ritenere, colle esperienze qui riferite, esaurito l'argomento e completamente provata l'esistenza di molecole racemiche in soluzione. Ci proponiamo perciò di proseguire le esperienze in questo campo nella scala più larga che ci sarà possibile, sia impiegando nuovi solventi, sia studiando altre sostanze racemiche. Ci riserviamo pure di eseguire determinazioni di densità di vapore di composti racemici puri ed in presenza di un eccesso di uno dei loro componenti, per vedere se possa verificarsi o no la presenza di molecole non scisse allo stato gassoso.

Parassitologia. — *Sul modo di trasmissione dell'Anchilostoma duodenale.* Nota di GINO PIERI, presentata dal Socio GRASSI.

Nel Centralblatt für Bakteriologie, Parasitenkunde und Infektionskrankheiten, a p. 483 del vol. XXIV il dott. A. Loos esprimeva l'ipotesi che le larve dell'*Anchilostoma*, accanto a uno sviluppo diretto in seguito a penetrazione nell'intestino dell'uomo, posseggano anche la facoltà di introdursi attraverso la sua pelle, e giungere di qui all'intestino, per crescere ivi fino alla maturità sessuale. Questa ipotesi si aveva fatto strada nella sua mente in base specialmente alla circostanza che, dopo aver eseguito esperienze sull'*Anchilostoma* colle più grandi precauzioni per non assumere involontariamente l'infezione per via orale, egli si trovò invece abbondantemente infettato; si ricordò egli allora che un giorno, manipolando le sue culture di larve, gli era caduta una goccia di acqua contenente larve sulla pelle della mano, ed ivi si erano manifestati in breve notevoli fenomeni irritatorî.

Nel n. 18 del XXIX volume dello stesso Centralblatt, il Loos torna sull'argomento, e riporta il risultato di un suo esperimento compiuto in proposito, dal quale risulterebbe che le larve di *Anchilostoma*, venute a contatto della pelle, penetrano « specialmente nei follicoli dei peli, raramente nei canali ghiandolari, e da questi nel derma ». Egli ricollegando questa esperienza col fatto surriferito, dal quale fu indotto a formulare la sua ipotesi, ritiene di aver dimostrato come realmente si verifichi in natura, e si possa provocare artificialmente, una seconda maniera di infezione per *Anchilostoma*, quella per l'immigrazione attiva delle larve attraverso la pelle.

Certamente le conclusioni del Loos, qualora fossero state confermate dai fatti, avrebbero avuto una importanza e una portata molto maggiore di quella di una semplice osservazione scientifica: esse avrebbero fatto risorgere straordinariamente complicato il problema della protezione contro la fatale

Anchilostomiasi. L'argomento del controllo dell'esperienze del Loos si presentava perciò molto interessante, ed il prof. Battista Grassi richiamò sopra di esso la mia attenzione.

In verità il fatto di aver seguito le larve di *Anchilostoma* fino alla penetrazione nel derma non mi sembrò potesse essere sufficiente ad autorizzare il Loos a dare come fatto dimostrato la sua ipotesi. L'aver il Loos riscontrato che le larve giungono fino al derma, non prova affatto che esse debbano procedere oltre e giungere fino all'intestino. Neppure l'essersi egli trovato infetto di *Anchilostoma* può avere un serio valore dimostrativo: si pensi infatti alla grande difficoltà di mantenersi immune dall'infezione allorchè si usa simile materiale di cultura. Nulla di più naturale poi, che allorchè accadde al Loos il fatto della caduta della goccia di acqua contenente larve sulla pelle, coi conseguenti fenomeni irritatorî, egli che a tutta prima non comprese la possibile importanza del fatto, abbia potuto prima o poi portare istintivamente la mano nel luogo dove massimo era il prudore, e quindi, tenendo anche presente la possibilità nelle larve di resistere al disseccamento per un tempo relativamente lungo (1), si sia casualmente infettato; tanto più che egli confessa implicitamente di non aver usato in quei tempi la precauzione di lavarsi le mani con alcool a 90° dopo ogni contatto con i recipienti contenenti il materiale di cultura, precauzione che dice di aver adottato negli esperimenti più recenti. A questa possibilità di infezione involontaria per via orale durante le esperienze, aggiungasi nel caso del Loos anche il coefficiente importantissimo della grande facilità di assumere l'infezione con altri mezzi in un paese, come il Cairo, in cui l'anchilostomiasi è endemica.

Ad ogni modo adunque, sembrandomi molto improbabile che si potesse verificare un fenomeno talmente strano nel campo elmintologico, e ritenendo d'altra parte, come ho detto, che l'esperienza del Loos per la sua insufficienza dimostrativa fosse ben lontana dal portare delle prove positive in favore di detta ipotesi, con l'aiuto del prof. Grassi, mi accinsi a uno studio scrupoloso della questione.

Grazie alla cortesia del prof. F. Schupfer, che nelle feci di un malato della clinica medica di S. Spirito aveva riscontrato, col metodo suggerito nel 1878 dal Grassi e oggi da tutti adottato, l'infezione per *Anchilostoma*, mi fu possibile procurarmi il materiale per le esperienze.

Nel giorno 17 novembre 1901 cominciai la coltivazione delle uova nel

(1) In alcune mie esperienze in proposito io ho riscontrato finora in larve di *Anchilostoma* poste in condizioni di siccità quasi assoluta, una resistenza massima di 6 o 7 giorni. Ma su questi esperimenti, che mi propongo di rinnovare, tornerò più diffusamente nella relazione estesa e particolareggiata che intendo pubblicare in breve delle esperienze alle quali accenno più innanzi.

termostato alla temperatura di 28° — 20° C., alla quale si ottiene la massima celerità nello sviluppo, e in breve ebbi a mia disposizione molte larve.

Il giorno 4 dicembre presi da una cultura con una pipetta dell' acqua contenente numerosissime larve viventi e vivacissime, incapsulate e mature per passare nell' ospitatore definitivo. Ne sgocciolai sei goccie sulla pelle del dorso della mia mano; posso calcolare che in queste si contenessero parecchie migliaia di larve; dopo circa un' ora, allorchè furono asciugate, feci cadere altre due goccie. Quindi eseguii la stessa operazione sul professore Grassi e sul dott. Giovanni Noè, che molto gentilmente si prestarono alla mia esperienza. Sulla pelle del dorso della mano del Noè feci cadere tre goccie dell' acqua contenente larve, il cui numero sarà stato di qualche migliaio; altrettanto feci sulla pelle dell' avambraccio del prof. Grassi, il quale invece di lasciare asciugare l' acqua sul posto, la spalmò largamente sulla superficie dell' avambraccio.

L' eseguire l' esperienza su di altri, oltrechè su di me, mi sembrava indispensabile per esser sicuro del valore dei risultati; infatti se l' infezione si fosse sviluppata eventualmente in me, che ho occasione di maneggiare continuamente il materiale di studio, sarebbe stato ben difficile determinare se essa fosse dovuta alle larve penetrate per la pelle o a quelle ingerite per mera casualità (cosa che, come ognuno immagina, può verificarsi colla massima facilità); se poi l' infezione si fosse sviluppata anche nei compagni di esperienza, l' ipotesi del Loos avrebbe avuto una conferma molto importante, se non assoluta.

Le larve collocate sulla nostra pelle penetrarono indubbiamente in essa; una ispezione accurata col microscopio semplice ci persuase che dopo il disseccamento delle goccie, non esistevano più larve alla superficie della nostra epidermide. Inoltre in Noè e in me si svilupparono in breve fenomeni irritatorî locali (che in me si manifestarono più acuti, verosimilmente in rapporto all' enorme numero delle larve adoperate): gonfiore, indolenzimento della parte, bruciore ecc., fenomeni analoghi a quelli riscontrati anche da Loos e da lui descritti; essi durarono, decrescendo progressivamente di intensità, fino verso la fine di dicembre.

Debbo notare che il diligente esame delle nostre feci prima dell' esperienza, ci confermò l' essere noi completamente liberi di *Anchilostoma*. Dal giorno dell' esperienza eseguimmo sovente l' esame delle feci, e questo fu proseguito, sempre con risultato negativo rispetto alla presenza di uova di *Anchilostoma*, fino alla metà del gennaio 1902, e cioè al di là del termine di 4-5 settimane dal tentativo di infezione, nel quale avrebbe dovuto presumibilmente cominciare l' emissione delle uova qualora l' infezione avesse avuto luogo.

Pertanto il giorno 13 febbraio esaminando le mie feci, riscontrai in esse la presenza di qualche uovo di *Anchilostoma*; mi affrettai allora a verificare

se esse si riscontrassero anche nelle feci dei miei compagni di esperienza, ma in questi l'esame fu assolutamente negativo.

Attribuisco tale leggiera infezione all'ingoiamento casuale di qualche larva avvenuta durante le mie manipolazioni giornaliere del materiale di esperienza, alle quali sono costretto dalla necessità di rinnovare quotidianamente l'acqua alle mie culture di larve per mantenerle viventi. Che essa non abbia origine dal tentativo di infezione attraverso la pelle lo desumo da tre importantissime prove: 1° la non intervenuta infezione degli altri due compagni di esperienza; 2° la sua entità minima relativamente al numero sterminato di larve penetrate nella mia pelle nell'esperienza (1); 3° l'epoca dell'infezione, posteriore di molto a quella in cui avrebbero dovuto secondo ogni probabilità svilupparsi le larve penetrate nell'organismo.

Credo che queste mie prime osservazioni mi autorizzino a concludere che l'ipotesi del Loos della possibile infezione di *Anchilostoma* per immigrazione attiva delle larve attraverso la pelle, è priva di un serio fondamento scientifico. Rimarrebbe perciò stabilito che l'unica via di infezione seguita dalle larve dell'*Anchilostoma* è la via orale, come per il primo constatò il Grassi insieme coi Parona.

Resta ancora un punto da chiarirsi per dare alla mia affermazione una dimostrazione completa: il destino delle larve penetrate attraverso la pelle. A rischiarare questa importante circostanza io dirigerò le mie ulteriori ricerche.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci: Foà, Taramelli, Gaudry, Helmert, Pflueger, Weingarten, Wild.

Il Corrispondente Millosevich fa omaggio, a nome del Socio Tacchini, del vol. III, serie 3ª, delle *Memorie del R. Osservatorio del Collegio Romano*, e dà notizia dei lavori in esso contenuti.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Lucca; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona;

(1) Con un antelmintico mi sono liberato degli Anchilostomi, che ospitavo, ed ho riscontrato che erano in numero di sette.

l'Accademia di scienze naturali di Filadelfia; le Società zoologiche di Amsterdam e di Tokyo; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; la Società di scienze naturali di Emden; il Museo Teyler di Harlem; gli Osservatorii di Vienna e di Praga.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di studi superiori di Firenze; l'Accademia delle scienze di Cracovia; la Società geologica di Ottawa; l'Università di Tübingen.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 marzo 1902.

Arata P. N. — Apuntes de Quìmica. T. I-III. Buenos Aires, 1901. 8°.

Borgnino G. C. — Tyrosine & Tyrosinase. Paris, 1902. 8°.

Brédikhine T. — Sur la Comète 1901, I. St. Pétersbourg, 1901. 4°.

Clerici E. — Sulle polveri sciroccali cadute in Italia nel marzo 1901. Roma, 1901. 8°.

Delitala G. — La risoluzione del pentagono completo e sue applicazioni nella geodesia elementare. Torino, 1902. 8°.

Id. — Nuova risoluzione di problemi. Torino, 1901. 8°.

De Lorenzo G. — Considerazioni sull'origine superficiale dei vulcani. Napoli, 1902. 4°.

Id. — Un paragone tra il Vesuvio e il Vulture. Napoli, 1901. 8°.

De Toni G. B. — Della vita e delle opere di Antonio Piccone. Roma, 1902. 4°.

Foà P. — Lavori dell'Istituto di anatomia patologica. Torino, 1902. 8°.

Gaudry A. — Sur la similitude des dents de l'homme et de quelques animaux. Paris, 1901. 8°.

Helmert F. R. — Dr. Hecker's Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ocean. Berlin, 1902. 8°.

Id. — Ueber die Reduction von Lotabweichungen auf ein höher gelegenes Niveau. Stuttgart, 1902. 8°.

Jensen Chr. — Kurzer Ueberblick ueber die Thatsachen und Theorien auf dem Gebiete der atmosphärischen Polarisation. Hamburg, 1901. 8°.

Memorie dell'Osservatorio del Collegio Romano, pubblicate dal Direttore P. Tacchini. Ser. 3ª, vol. III. Roma, 1902. 4°.

Oddone E. — Del moto relativo nelle onde meccaniche terrestri. Pavia, 1902. 8°.

Orlando L. — Note di matematica. Messina, 1902. 8°.

Pflüger E. — Ueber Kalkseifen als Beweise gegen die in wässriger Lösung sich vollziehende Resorption der Fette. Bonn, 1902. 8°.

Pierantoni L. F. — Dimostrazione del Postulato di Euclide. Chieti, 1901. 8°.

Relazione sullo stato e sulla attività del Laboratorio di Entomologia agraria presso la R. Scuola Superiore di agricoltura in Portici, dalla sua fondazione a tutto l'anno 1900-1901. Roma, 1902. 8°.

Sars G. O. — An account of the Crustacea of Norway. Vol. IV. Copepoda. P. 3-4. Bergen, 1902. 8°.

Taramelli T. — Alcune osservazioni stratigrafiche nei dintorni di Varzo. Milano, 1902. 8°.

Weingarten J. — Ueber den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit. Leipzig, 1902. 8°.

Wild H. — Ueber den Föhn und Vorschlag zur Beschränkung seines Begriffs. Zürich, 1901. 4°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 marzo 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Stabilità delle configurazioni di equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione attorno ad un asse verticale.* Nota del Corrispondente G. Morera.

Laplace nel *Supplément à la théorie de l'action capillaire* (Oeuvres, tomo IV, pag. 455), dopo aver concluso che l'altezza a cui si eleva un liquido in un tubo e la forma della superficie libera dipendono unicamente dalla figura del tubo nella parte ove tal superficie si trova, osserva che in uno stesso tubo vi possono essere parecchi stati di equilibrio se la sua larghezza non è uniforme. A proposito di tali stati di equilibrio Laplace afferma che: « *lorsque la figure d'un tube capillaire diminue par nuances insensibles les diverses états d'équilibre sont alternativement stables et non stables* », affermazione che l'illustre autore tenta rendere intuitiva con talune semplici considerazioni meccaniche, che non si possono però accettare come una dimostrazione della proposizione.

L'unico autore che, per quanto a me consta, sia ritornato sulla rammentata affermazione di Laplace, è E. Mathieu nel secondo capitolo della sua pregiata *Théorie de la capillarité*, ove studia la elevazione o la depressione di un liquido in un tubo capillare di rotazione, non cilindrico, ad asse verticale, ed esamina i differenti equilibrî della colonna capillare in un tale tubo, facendone poi applicazione ad un tubo conico immerso nel liquido per la base. (Cfr. op. cit., pagg. 52-58).

Mathieu riferisce testualmente le accennate considerazioni di Laplace e soggiunge: « le raisonnement de Laplace est vague et il indispensable de le remplacer par un autre qui ait plus de précision »; ma per quanto Mathieu opportunamente invochi la funzione delle forze, non mi sembra che il suo ragionamento presenti una precisione maggiore di quello di Laplace.

Ritenendo che il tubo sia capillare, almeno nelle porzioni di esso ove cadono le superficie libere delle possibili configurazioni di equilibrio, calcolerò, trascurando termini che sono dell'ordine del quadrato del raggio, le variazioni che subisce il potenziale delle forze nel passaggio da una configurazione di equilibrio alla consecutiva, il che offrirà il mezzo di decidere facilmente della stabilità o dell'instabilità delle anzidette configurazioni.

Per fissare le idee supponiamo che il liquido sia sollevato nel tubo capillare, ossia che l'angolo di raccordo φ fra la superficie libera in una configurazione di equilibrio e la superficie interna del tubo sia ottuso.

Prendiamo come asse delle z l'asse del tubo percorso in verso ascendente e diciamo r la distanza dall'asse stesso di un punto qualunque della superficie libera, che ora è di rotazione. Diciamo ψ l'angolo che la normale interna alla superficie libera fa col raggio che dall'asse va al suo piede; ritenuto che il piano di quota zero sia il piano di livello, si ha ovviamente:

$$\text{(I)} \qquad \frac{a^2}{2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\cos\psi) = z \ (^1);$$

questa è l'equazione differenziale della superficie libera. Moltiplicata questa equazione per $2rdr$ ed integrata a partire da $r = 0$ si ottiene:

$$\text{(II)} \qquad a^2 r\cos\psi = r^2 z - \int_{z_0}^{z} r^2\, dz\,,$$

ove z_0 indica la quota del punto sull'asse di rotazione.

Denotiamo: con ϱ il raggio del parallelo secondo cui la superficie libera del liquido incontra la superficie interna del tubo, ossia il raggio della circonferenza di raccordo; e con i l'inclinazione sulla verticale della superficie interna lungo la linea di raccordo, convenendo di assumere i positivo o negativo secondochè il tubo è verso l'alto convergente oppure divergente.

Calcolando il volume U compreso fra il cilindro verticale che ha per una base l'anzidetto parallelo, la superficie libera e il piano di livello, per mezzo della (I) si trova subito:

$$U = \int_0^{\varrho} 2\pi r z dr = -\pi a^2 \varrho\cos(\varphi + i)\,,$$

(1) Si noti che secondo la notazione usata da Mathieu in questa equazione, invece della costante di capillarità a^2 si dovrebbe scrivere $2a^2$.

sicchè la quota media lungo la superficie libera risulta com'è ben noto:

$$z_m = \frac{U}{\pi \varrho^2} = - \frac{a^2 \cos(\varphi + i)}{\varrho} .$$

Applichiamo la (II) alla linea di raccordo della quale diremo z la quota, si ottiene:

$$- a^2 \varrho \cos(\varphi + i) = \varrho^2 z - \int_{z_0}^{z} r^2 \, dz$$

e quindi:

$$\int_{z_0}^{z} r^2 \, dz = \varrho^2 (z - z_m) .$$

Dalla (II), ponendo in luogo di z *la quota della linea di raccordo*, lungo la superficie libera risulta:

$$\cos \psi \leq \frac{rz}{a^2} ,$$

d'onde segue

$$\left| \frac{dz}{dr} \right| \leq \frac{rz}{\sqrt{a^4 - z^2 r^2}} ;$$

dunque:

$$z - z_0 < z \int_0^{\varrho} \frac{r dr}{\sqrt{a^4 - z^2 r^2}} \leq \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - z^2 \varrho^2}}{z}$$

$$< \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - z_m^2 \varrho^2}}{z_m} < \varrho \frac{1 + |\operatorname{sen}(\varphi + i)|}{|\cos(\varphi + i)|} ,$$

e per conseguenza

$$\int_{z_0}^{z} r^2 \, dz < \varrho^2 (z - z_0) < \varrho^3 \frac{1 + |\operatorname{sen}(\varphi + i)|}{|\cos(\varphi + i)|} .$$

Trascurando adunque un termine dell'ordine di ϱ^2 la (II) dà alla linea di raccordo:

(III) $$\varrho z = - a^2 \cos(\varphi + i) .$$

Le linee di raccordo delle superficie libere in tutte le possibili configurazioni di equilibrio si otterranno trovando i valori di ϱ e z che soddisfanno alla equazione precedente ed a quella della superficie interna del tubo. In altri termini, se in un piano meridiano qualunque si immagina tracciato il profilo della superficie interna del tubo e la curva di equazione (III), che diremo curva (c), le intersezioni di queste due linee danno i punti per cui passano le linee di raccordo.

Si osservi che se, come avviene nei tubi che si possono adoperare per verificare sperimentalmente i risultati della teoria, l'angolo i subisce delle piccole variazioni lungo il profilo meridiano, almeno nelle regioni ove esso vien tagliato dalla linea (III), quest'ultima curva (c) è con grande approssimazione una iperbola equilatera (1).

Diciamo σ'' e σ' le aree della superficie libera del liquido e della sua superficie che è in contatto delle pareti solide, il potenziale P delle forze capillari e dei pesi delle particelle liquide è, ritenendo uguale ad 1 la densità del liquido:

$$P = g\int z d\,S + \frac{\vartheta_1}{2}\sigma'' - \left(\eta_1 - \frac{\vartheta_1}{2}\right)\sigma',$$

ove ϑ_1 ed η_1 rappresentano le note costanti di capillarità ed il primo integrale va esteso a tutto il volume S occupato dal liquido.

Si ha poi:

$$\cos\varphi = -\frac{\eta_1 - \frac{\vartheta_1}{2}}{\frac{\vartheta_1}{2}} \quad ; \quad \frac{\vartheta_1}{g} = a^2,$$

quindi:

$$\text{(IV)} \qquad P = g\left[\int z d\,S + \frac{a^2}{2}(\sigma'' + \cos\varphi \,.\, \sigma')\right].$$

Calcoliamo la variazione finita ΔP che il potenziale subisce quando il liquido nel tubo capillare sale da una qualunque configurazione di equilibrio alla successiva.

Ritenendo il liquido contenuto in un vaso molto ampio, non varieranno la superficie libera del liquido all'esterno del tubo e le aree bagnate sulle pareti del vaso e sulla parete esterna del tubo, così pure non varierà $\int z d\,S$ esteso alla massa fluida situata fuori del tubo. È quindi lecito nella (IV) ritenere che il primo integrale sia esteso alla colonna liquida che sta nel tubo al di sopra del piano di livello e che σ'' e σ' rappresentino rispettivamente le aree della superficie libera del liquido nel tubo capillare e della

(1) Nelle esperienze conviene far uso di un tubo capillare di vetro foggiato a successivi coni che alternativamente si uniscono per le basi e per i vertici; un tubo cosiffatto si ottiene agevolmente da uno cilindrico scaldandolo successivamente alla fiamma in diversi punti e stirandolo.

Allora i ha piccoli valori, che oscillano attorno allo zero, e, se il tubo si immerge nell'acqua, si ha inoltre:

$$\varphi = \pi \; ; \; a^2 = 15\,.\,13 \; mm^2$$

La curva (c) ha in tal caso per equazione $\rho z = a^2 \cos i$.

superficie interna del tubo da esso bagnata. Allora σ'' è dell'ordine di ϱ^2 e quindi trascurabile, e per la stessa ragione è trascurabile il contributo recato al primo integrale dalla massa liquida del menisco. Dette: Q l'espressione che moltiplica g nell'espressione del potenziale; e $z, z+\Delta z$ le quote delle linee di raccordo delle due successive superficie libere di equilibrio, abbiamo:

$$\Delta Q = \pi \int_z^{z+\Delta z} r^2 z dz + \pi a^2 \cos\varphi \int_z^{z+\Delta z} r \frac{dz}{\cos i} .$$

Intendendo che ϱ rappresenti la distanza dall'asse del punto della curva (c) che ha la quota z per la (IV), avremo:

$$\Delta Q = \pi \int_z^{z+\Delta z} z (r - \varrho) r dz + \pi \int_z^{z+\Delta z} \left(\varrho z + a^2 \frac{\cos\varphi}{\cos i} \right) r dz .$$

Ma per la (III) l'ultimo integrale diviene

$$a^2 \int_z^{z+\Delta z} \left[\frac{\cos\varphi}{\cos i} - \cos(\varphi + i) \right] r dz = a^2 \int_z^{z+\Delta z} \operatorname{sen}(\varphi + i) \operatorname{tg} i \, . \, r dz$$

$$= - a^2 \int_z^{z+\Delta z} \operatorname{sen}(\varphi + i) r dr ;$$

per conseguenza anche quest'ultimo integrale è dell'ordine di ϱ^2 e però trascurabile nell'ordine di approssimazione prefissoci. Dunque a meno di quantità dell'ordine di ϱ^2:

$$\Delta P = g \, . \, \Delta Q = g\pi \int_z^{z+\Delta z} r (r - \varrho) z dz .$$

Se tra le due successive superficie libere di equilibrio considerate la curva (c) è interna al profilo meridiano del tubo sarà $\varrho < r$, e quindi $\Delta P > 0$, se invece è esterna sarà $\Delta P < 0$; nel primo caso il potenziale va crescendo dalla prima configurazione alla seconda e quindi quest'ultima non può essere stabile, nel secondo caso invece il potenziale va decrescendo e quindi la prima configurazione non può essere stabile.

Le configurazioni stabili sono adunque quelle nelle quali la curva (c) *percorsa nel verso ascendente attraversa il profilo meridiano del tubo pas-*

sando dall'esterno all'interno; sono instabili invece quelle nelle quali la (*c*) attraversa detto profilo dall'interno all'esterno.

In generale alla prima intersezione della (*c*) col profilo meridiano, questa curva passa dall'esterno all' interno e però la corrispondente configurazione di equilibrio è, generalmente parlando, stabile; allora la seconda configurazione di equilibrio è instabile, la terza è in generale di nuovo stabile e così via.

Se però la curva (*c*) è tangente al profilo meridiano, sia che essa in prossimità del punto di contatto rimanga all'esterno, sia che rimanga all'interno del profilo stesso, la corrispondente configurazione di equilibrio non è stabile.

Le configurazioni non stabili non sono praticamente realizzabili, e però le previsioni della teoria si possono facilmente verificare coll'esperienza.

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo.* Nota III (1) di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Volterra.

10. *Sviluppi asintotici.* — Riprendiamo l'espressione (15) di $U_2 - F_2$.

Il secondo membro, considerato come funzione del parametro q, ha, per $q = \infty$, un punto singolare essenziale. Infatti esso differisce dall'espressione rigorosa (10) di F_2 soltanto per lo scambio di B in q; ed F_2, quale funzione di B, ha effettivamente una singolarità essenziale in $B = \infty$, come risulta dalla (10″) (2).

Non sarà dunque possibile sviluppare $U_2 - F_2$ in serie di potenze di $\frac{1}{q}$, convergente nell'intorno di $\frac{1}{q} = 0$.

Però, limitandosi ai valori reali e positivi di $\frac{1}{q}$, si può stabilire la validità dello sviluppo di Taylor fino a un ordine qualsiasi e fissare il limite superiore di ciascun resto.

Ecco in qual modo.

(1) V. pag. 191.

(2) In quanto, se $B = \infty$ non fosse una singolarità essenziale di F_2, ciò accadrebbe in particolare per i valori 0, 0, 1 di y, z, d, ossia per la funzione

$$e^{iB} \mathrm{L}i\, e^{-iB} = e^{iB} \log B + e^{iB} \left\{ C - i\frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty{}_m \frac{(-i)^m B^m}{m \,.\, m!} \right\},$$

il che evidentemente non è, poichè tanto il coefficiente di log B, quanto il secondo addendo, sviluppati per potenze di B, contengono un numero infinito di termini.

Cambiando λ in $\frac{\lambda}{q}$, la (15) si può scrivere:

$$q\,(U_2 - F_2) =$$

$$-\frac{i}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q}\right)}+\frac{1}{|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q}\right)}\right\}d\lambda\,.$$

Sotto questa forma apparisce chiaramente che il secondo membro rimane finito e determinato, anche quando $\frac{1}{q}$ converge a zero (si intende, per valori reali).

Infatti il modulo della funzione sotto il segno è, per qualsiasi valore di λ, $\leq 2\frac{|z|+d}{(|z|+d)^2+y^2}\,e^{-\lambda}$, funzione evidentemente integrabile nell'intervallo $0\,,\ \infty$.

Si può anzi asserire che la funzione $U_2 - F_2$ ammette derivate di qualunque ordine, rispetto all'argomento $\frac{1}{q}$, anche nel punto $\frac{1}{q}=0$.

Infatti:

(19)
$$\frac{d^m q(U_2 - F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} =$$

$$-\frac{i^{m+1}}{2}\,m!\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^m\left\{\frac{1}{\left[|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}}+\frac{1}{\left[|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}}\right\}d\lambda$$

$$(m=0\,,1\,,2\,,\ldots)\,,$$

e il modulo della funzione sotto il segno non supera mai

$$\frac{2}{(|z|+d)^{m+1}}\,e^{-\lambda}\,\lambda^m\,.$$

L'integrale è dunque una funzione di $\frac{1}{q}$, finita e continua per ogni valore reale di $\frac{1}{q}$ $\left(\frac{1}{q}=0\,,\ \text{incluso}\right)$.

Per $\frac{1}{q}=0$, risulta in particolare

$$\frac{d^m q\,(U_2 - F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = -\frac{i^{m+1}}{2}(m!)^2\left\{\frac{1}{((|z|+d+iy)^{m+1}}+\frac{1}{(|z|+d-iy)^{m+1}}\right\},$$

od anche, avendo riguardo alle identità

$$\frac{d \log \frac{1}{\nu}}{d|z|} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{|z|+d+iy}+\frac{1}{|z|+d-iy}\right\},$$

$$\frac{d^{m+1} \log \frac{1}{\nu}}{d|z|^{m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2} m!\left\{\frac{1}{(|z|+d+iy)^{m+1}}+\frac{1}{(|z|+d-iy)^{m+1}}\right\},$$

$$\frac{d^m q(U_2-F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = -(-i)^{m+1} m! \frac{d^{m+1} \log \frac{1}{\nu}}{d|z|^{m+1}}.$$

In questa condizione di cose è chiaro che si può applicare alla funzione $q(U_2 - F_2)$ la formula di Taylor per l'intervallo $0, \frac{1}{q}$, fino a un ordine qualunque m, e scrivere di conformità

$$U_2 - F_2 = -\sum_1^m{}_s \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^s \log \frac{1}{\nu}}{d|z|^s} + R_m, \tag{20}$$

dove, usando pel resto la forma di Lagrange, si può ritenere per la (19),

$$R_m = -\frac{i^{m+1}}{2q^{m+1}} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^m \left\{\frac{1}{\left[|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q_1}\right)\right]^{m+1}}+\frac{1}{\left[|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q_1}\right)\right]^{m+1}}\right\} d\lambda$$

con $\frac{1}{q_1} > 0$.

La (20) e questa espressione di R_m valgono anche per $m = 0$, dovendosi soltanto nella (20) porre zero al posto della sommatoria.

Per qualsiasi valore di y (reale, si intende) il modulo della quantità in parentesi nell'espressione di R_m è sempre inferiore a $\frac{2}{(|z|+d)^{m+1}}$, talchè

$$R_m < \frac{m!}{q^{m+1}(|z|+d)^{m+1}} \text{ (1)}. \tag{21}$$

(1) Si può osservare che, ammettendo a priori la possibilità di uno sviluppo di $U_2 - F_2$ per potenze di $\frac{1}{q}$, la forma dello sviluppo risulta subito dalla prima equazione (7′) (nel secondo membro della quale si intende posto $-\frac{d \log \frac{1}{\nu}}{d|z|}$ in luogo di $\frac{d F_2}{d|z|}$). Però questo modo di procedere, oltre a non essere rigoroso, non permette di apprezzare l'entità del resto.

In modo perfettamente analogo, considerando le derivate di $q(U_2 - F_2)$ rapporto a y e rapporto a $|z|$, si ha

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d(U_2 - F_2)}{dy} = -\sum_1^m{}^s \dfrac{(-i)^s}{q^s} \dfrac{d^{s+1} \log \dfrac{1}{\Delta}}{d|z|^s\, dy} + R'_m, \\ \dfrac{d(U_2 - F_2)}{d|z|} = -\sum_1^m{}^s \dfrac{(-i)^s}{q^s} \dfrac{d^{s+1} \log \dfrac{1}{\Delta}}{d|z|^{s+1}} + R''_m \end{cases}$$

con

$$(23)\qquad R'_m \;,\; R''_m < \frac{(m+1)!}{q^{m+1}(|z|+d)^{m+2}}.$$

L'equazione differenziale (5′):

$$\frac{dV_2}{dy} = pi(U_2 - F_2),$$

notando che $|U_2 - F_2|$ è in ogni caso $< \dfrac{1}{qd}$ e ricordando dalle (8) che $\dfrac{p}{q} = B$, ci dà

$$\left|\frac{dV_2}{dy}\right| < \frac{B}{d}.$$

Immaginiamo di sviluppare colla formula di Taylor, arrestata dopo il primo termine, le funzioni qV_2 e $q\dfrac{dV_2}{d|z|}$, definite dalla (13) e sua derivata rapporto a $|z|$.

Troveremo dopo ovvie riduzioni

$$V_2 = B\left\{\operatorname{arctg}\frac{y}{|z|+d} - \frac{\pi}{2} + R'''\right\},$$

$$\frac{dV_2}{d|z|} = B\left\{\frac{d \log \dfrac{1}{\Delta}}{dy} + R^{IV}\right\}$$

con

$$R''' < \frac{1}{qd} \;,\; R^{IV} < \frac{1}{qd^2}.$$

Osservando che, per nessun valore reale di y, z, $\left|\dfrac{d \log \dfrac{1}{\Delta}}{dy}\right|$ può supe-

rare $\frac{1}{2}d$, risulta ancora

$$\left| V_2 \right| < B\left(\pi + \frac{1}{qd}\right),$$

$$\left|\frac{dV_2}{d|z|}\right| < B\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{qd^2}\right).$$

Noi dobbiamo naturalmente risguardare $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{qd}$ come quantità finite (nei casi pratici anzi molto minori dell'unità; cfr. il § seguente).

Per quanto s'è detto al principio del § 9, siamo ormai autorizzati a porre

(24) $$V_2 = 0 .$$

11. *Limite superiore degli errori, da cui possono essere affette le forze elettromagnetiche del campo, quando si usano gli sviluppi asintotici.* — A meno di termini contenenti B a fattore e senza riserve trascurabili, si ha, come abbiam visto,

(14) $$F_2 + \log\frac{1}{\nu} = 0 ,$$

(24) $$V_2 = 0 .$$

Quale errore può insinuarsi nelle componenti delle forze elettromagnetiche, se, per $U_2 - F_2$ e sue derivate, si introducono gli sviluppi asintotici fino a un ordine determinato, omettendo i resti?

Per riconoscerlo, osserviamo in primo luogo che, essendo, per le (3), $U_1 - F_1$ eguale alla parte reale di

$$2 I_0 e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}(U_2 - F_2),$$

si ha

$$A\left|\frac{d(U_1 - F_1)}{dt}\right| \leq 2 I_0 . 2\pi n A . |U_2 - F_2| ,$$

$$\left|\frac{d(U_1 - F_1)}{dy}\right| \leq 2 I_0 \left|\frac{d(U_2 - F_2)}{dy}\right| ,$$

$$\left|\frac{d(U_1 - F_1)}{dz}\right| \leq 2 I_0 \left|\frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|}\right| .$$

Ora, a tenore delle (I), (II) e

(18′) $F = 2 I_0 \operatorname{sen}\omega\left(\log\frac{1}{\Delta} - \log\frac{1}{\nu}\right)$; $U = F + (U_1 - F_1)$, $V = 0$, $W = 0$

(sono le (18), in cui s'è tenuto conto che $V_1 = 0$), le componenti della

forza elettrica dipendono da $U_1 - F_1$ solo per la presenza del termine $A \frac{d(U_1 - F_1)}{dt}$; le componenti della forza magnetica solo pei termini

$$\frac{d(U_1 - F_1)}{dy}, \quad \frac{d(U_1 - F_1)}{dz}.$$

Dopo ciò, le (21) e (23) mostrano che, quando si introducono per $U_2 - F_2$ e sue derivate, gli sviluppi (20) e (22), fino al termine m^{esimo}, il resto non può superare

$$2 I_0 \cdot 2 \pi n A \cdot \frac{m!}{q^{m+1} (|z| + d)^{m+1}}$$

nella componente X (l'unica delle componenti della forza elettrica, che dipende da $U_1 - F_1$), nè

$$2 I_0 \frac{(m+1)!}{q^{m+1} (|z| + d)^{m+2}}$$

in una componente magnetica.

Per avere un'idea dell'errore relativo, in una componente e in un punto generico, conviene considerare il rapporto fra l'errore assoluto e l'intensità (massima), che compete nello stesso punto alla corrispondente forza, quando manca lo schermo conduttore.

Le (2), in cui dobbiamo intendere, per I, $I_0 \operatorname{sen} \omega$, ci dicono subito che, tanto per la forza magnetica, quanto per la elettrica, tale massima intensità vale

$$\frac{2 I_0}{A}.$$

L'errore relativo non supera dunque

$$2 \pi n A \frac{m! A}{q^{m+1} (|z| + d)^{m+1}}$$

per la forza elettrica, nè

$$\frac{(m+1)! A}{q^{m+1} (|z| + d)^{m+2}}$$

per la magnetica.

Limitandosi, come è per noi sufficiente, a considerare punti in prossimità del piano mediano (piano normale allo schermo passante per la corrente), possiamo per es. supporre

$$y^2 < 3 (|z| + d)^2.$$

Si ha allora a fortiori:

Arrestando lo sviluppo asintotico al termine m^{esimo}, *la frazione trascurata di forza elettrica non può superare*

$$(25) \qquad 2 \pi n A \frac{2 \cdot m!}{q^{m+1} d^m};$$

e la frazione trascurata di forza magnetica

$$\frac{2\,(m+1)!}{q^{m+1}\,d^{m+1}}. \tag{26}$$

Facendo nella (25) $m = 0$ e ricordando dalla (8) che $q = \frac{4\pi^2 n}{R}$, risulta come errore relativo

$$\frac{AR}{\pi},$$

frazione insignificante anche nel caso di resistenze considerevoli. (Prendendo, come a § 9, una lastra di argentana di un decimillimetro, si ha all'incirca $\frac{AR}{\pi} = 0{,}00002$).

Concludiamo dunque che, *per quanto concerne la forza elettrica, è lecito ritenere senza errore sensibile*

$$U_2 - F_2 = 0.$$

Affinchè l'uso degli sviluppi asintotici di $\frac{d\,(U_2 - F_2)}{dy}$, $\frac{d\,(U_2 - F_2)}{d|z|}$ nelle componenti della forza magnetica risponda allo scopo, è necessario che, per qualche valore di m, la (26) sia una piccola frazione dell'unità; per es. dell'ordine di $\frac{1}{10}$, se si tratta di ricerche puramente qualitative; più piccola (a norma dell'esattezza richiesta), se si tratta di ricerche quantitative.

Se esiste un valore di m che conviene, ad esso — e non oltre — vanno arrestati gli sviluppi.

Affinchè in particolare si possa prendere $m = 1$ con errore non superiore all'un per cento, basterà, per la (26), che sia

$$\frac{4}{q^2 d^2} \leq \frac{1}{100},$$

cioè

$$\frac{2}{qd} \leq \frac{1}{10}, \tag{27}$$

o finalmente, in via approssimativa,

$$\frac{R}{nd} \leq 2. \tag{27'}$$

Questa condizione è soddisfatta da lastre di rame dello spessore di un millimetro ($R = 16000$), distanti un metro dalla corrente ($d = 100$), purchè la frequenza sia almeno 80.

Fissati R e d, l'errore possibile $\frac{4}{q^2 d^2}$ varia con n in ragione inversa dei

quadrati. Così ad es., per $n = 200$, esso è inferiore a $\left(\frac{80}{200}\right)^2 \frac{1}{100}$, cioè al 0,16 per cento; mentre, per $n = 60$, si può contare soltanto sopra una esattezza del $\left(\frac{80}{60}\right)^2 \frac{1}{100}$, cioè all'incirca del 2 per cento.

12. *Espressioni approssimate — Interpretazione fisica.* — Bene intesi sui limiti dell'approssimazione corrispondente ad $m = 1$, adottiamo come valore di $U_2 - F_2$, da introdursi nelle componenti della forza magnetica, il primo termine $\frac{i}{q} \frac{d \log \frac{1}{\nu}}{d|z|}$ dello sviluppo asintotico (20) (1).

Per essere $U_1 - F_1$ la parte reale di

$$2 I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} (U_2 - F_2),$$

avremo

$$U_1 - F_1 = \frac{2 I_0}{q} \cos \omega \frac{d \log \frac{1}{\nu}}{d|z|}.$$

mentre, come s'è visto, è lecito ritenere $U_2 - F_2$, e di conseguenza, $U_1 - F_1 = 0$, nel valutare le componenti della forza elettrica.

Ciò posto, le (18′), introdotte nelle (I), (II), danno, per le componenti delle forze magnetica ed elettrica,

$$(28) \quad \begin{cases} L = 0, \\ M = -2 I_0 \frac{d}{dz} \left\{ \operatorname{sen} \omega \left(\log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nu} \right) + \frac{\cos \omega}{q} \frac{d \log \frac{1}{\nu}}{d|z|} \right\}, \\ N = 2 I_0 \frac{d}{dy} \left\{ \operatorname{sen} \omega \left(\log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nu} \right) + \frac{\cos \omega}{q} \frac{d \log \frac{1}{\nu}}{d|z|} \right\}; \end{cases}$$

$$(29) \quad \begin{cases} X = 0, \\ Y = -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{d}{dy} \left\{ \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nu} \right\}, \\ Z = -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{d}{dz} \left\{ \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nu} \right\} \end{cases}$$

$$(\omega = 2 \pi n (t - Ax) + \alpha).$$

(1) Che è derivabile termine a termine, come mostrano direttamente le (22).

Considerando in particolare i punti al di là dello schermo rispetto alla corrente ($z < 0$), si ha

$$r = \Delta ,$$

e

$$-\frac{d}{dz} = \frac{d}{d|z|} .$$

Le (28), (29), eseguendo le derivazioni, divengono

$$(28') \qquad \begin{cases} L = 0 , \\ M = \dfrac{2 I_0}{q} \cos \omega \dfrac{(|z| + d)^2 - y^2}{\Delta^4} , \\ N = \dfrac{2 I_0}{q} \cos \omega \dfrac{2 (|z| + d) y}{\Delta^4} ; \end{cases}$$

$$(29') \qquad X = Y = Z = 0.$$

La forza elettrica è dunque sensibilmente intercettata dallo schermo, come (rigorosamente) ha luogo in elettrostatica.

Quanto alla forza magnetica, per acquistare un' idea adeguata della modificazione prodotta dal conduttore, giova confrontarla colla

$$(30) \qquad \begin{cases} L' = 0 , \\ M' = -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \dfrac{|z| + d}{\Delta} , \\ N' = -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \dfrac{y}{\Delta} , \end{cases}$$

che, a norma delle (2), agisce negli stessi punti ($z < 0$), quando manca lo schermo.

Sieno

$$H_0 = \frac{2 I_0}{q} \frac{1}{\Delta^4} \sqrt{\{(|z| + d)^2 - y^2\}^2 + 4 (|z| + d)^2 y^2} = \frac{2 I_0}{q} \frac{1}{\Delta^2} ,$$

$$H_0' = 2 I_0 \frac{1}{\Delta}$$

le rispettive intensità massime.

Si ha

$$(31) \qquad \frac{H_0}{H_0'} = \frac{1}{q\Delta} .$$

Lo schermo riduce dunque la intensità massima della forza magnetica (nei punti al di là) alla frazione $\dfrac{1}{q\Delta}$ *di quella che si avrebbe in sua assenza.*

Dacchè Δ non può discendere in questi punti al di sotto di d, siamo dalle osservazioni numeriche del precedente § autorizzati a concludere che, nel caso di correnti alternative industriali (entro i limiti di validità dell'approssimazione qui adottata), la presenza dello schermo riduce la forza magnetica a pochi centesimi del suo valore, per dir così, naturale; la intercetta sensibilmente per più alte frequenze (1).

Indichiamo con ϑ l'angolo che la linea d'azione della forza magnetica naturale fa coll'asse y. Le (30) e (28′) mostrano subito che, nel campo magnetico modificato dalla presenza del conduttore, l'analogo angolo (contato, a partire dall'asse y, nello stesso senso) vale 2ϑ.

Nei punti del piano mediano ($y = 0$, $\vartheta = 0$) N, e così N′, si annullano. La forza è dunque in questi punti (esista o no lo schermo) normale al piano mediano stesso.

La forza magnetica naturale (30) ha in un generico istante t, l'intensità $|\operatorname{sen} \omega| H_0'$; quella modificata dal piano conduttore $|\cos \omega| H_0$. Ai massimi dell'una corrispondono dunque i minimi dell'altra, e reciprocamente; ossia *le due fasi sono a una distanza di un quarto di periodo.*

Si osservi da ultimo che, finchè si tratta di correnti alternative industriali, si può identificare la fase ω con $2\pi nt + \alpha$, poichè allora $2\pi n A x$ non ha certo valore apprezzabile nel campo di osservazione (entro cui si suppongono naturalmente gli assi di riferimento).

Matematica. — *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.* Nota II (2) di Ugo Amaldi, presentata dal Socio S. Pincherle.

In questa Nota, facendo seguito ad altra, che, sotto analogo titolo, ha avuto di recente l'onore di essere presentata a questa illustre Accademia, completo la ricerca di cui là ho posto l'enunciato e le basi. Conservo, naturalmente, le medesime notazioni e seguito, per le formole, la numerazione.

3. Il sistema di equazioni, che caratterizza i sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici di una data superficie e del quale quindi noi dobbiamo discutere le condizioni di integrabilità, si ottiene dal sistema (3) ponendovi $\beta = 0$. Esso è dunque:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{ds_1} = 0 \qquad , \quad \dfrac{d\gamma}{ds_2} = \frac{1}{2}(\alpha + K) + \gamma^2 \\ \dfrac{d(\gamma)}{ds_1} = \frac{1}{2}(\alpha - K) - (\gamma)^2 \, , \quad \dfrac{d(\gamma)}{ds_2} = 0 \end{cases}$$

(1) Carattere questo ben noto. Cfr. Poincaré, *Les oscillations électriques*, pag. 58.

(2) V. pag. 198.

e ad esso vanno aggiunte le equazioni (5) (8) che in questo caso diventano:

$$(11)\quad \frac{d\alpha}{ds_1}=-\frac{d\mathrm{K}}{ds_1}-2(\gamma)\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\mathrm{K})+\gamma^2\right],\quad \frac{d\alpha}{ds_2}=\frac{d\mathrm{K}}{ds_2}+2\gamma\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\mathrm{K})-(\gamma)^2\right]$$

$$(12)\qquad \frac{d^2\mathrm{K}}{ds_2\,ds_1}+\frac{d^2\mathrm{K}}{ds_1\,ds_2}+3\left[(\gamma)\frac{d\mathrm{K}}{ds_2}-\gamma\frac{d\mathrm{K}}{ds_1}\right]=0\,.$$

Poichè quest' ultima per $\mathrm{K}=\text{cost.}$ è identicamente soddisfatta, il sistema (10) (11) è in tal caso completo: poichè tale sistema appartiene manifestamente alla nota classe di sistemi differenziali studiati dal Lie [1] ritroviamo il risultato già ben conosciuto [2], che sulle superficie a curvatura totale costante esistono ∞^4 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici; essi si determinano integrando il sistema completo (10) (11) [per $\mathrm{K}=\text{cost.}$].

Escluso il caso della superficie a curvatura totale costante, indichiamo con (g) e g rispettivamente le curvature geodetiche delle linee $\mathrm{K}=\text{cost.}$ e delle loro traiettorie ortogonali, e con ψ l'angolo delle linee di curvatura geodetica γ con quelle di curvatura geodetica g. Se allora poniamo:

$$h=\frac{\Delta_1\mathrm{K}}{\Delta_2\mathrm{K}}-(g)\,,$$

dove Δ_1 e Δ_2 rappresentano i ben noti parametri differenziali del primo e del secondo ordine rispettivamente, la (12) si può ridurre alla forma:

$$2\gamma\cos\psi-2(\gamma)\operatorname{sen}\psi=\frac{h-(g)}{2}\operatorname{sen}2\psi+2g\cos2\psi\,;$$

se poniamo $h-(g)=2\nu$ e introduciamo una nuova indeterminata μ, quest' ultima equazione è equivalente al sistema:

$$(13)\quad 2\gamma=(\mu+\nu)\operatorname{sen}\psi+g\cos\psi\ ,\ 2(\gamma)=(\mu-\nu)\cos\psi+g\operatorname{sen}\psi.$$

Ora ci rimane da stabilire sotto quali condizioni per la μ e la ψ le espressioni precedenti di γ e (γ) rendano soddisfatte le (10), fra cui sia eliminata la α, che nelle (13) non compare più, vale a dire le (1), (2) e la (4). Ma, se introduciamo il sistema coordinato covariante φ_r $(r=1\,,\,2)$ del fascio cui appartengono le congruenze γ e (γ) e il rispettivo sistema ortogonale canonico $\bar{\varphi}_r$, le (1), (2) sono rispettivamente equivalenti alle [3]:

$$\sum_{r,s}a^{(rs)}\,\bar{\varphi}_{rs}=\mathrm{K}\ ,\ \sum_{r,s}a^{(rs)}\,\varphi_{rs}=0\,.$$

(1) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt. Kap. 10.
(2) Darboux, l. c. III Partie, n. 655.
(3) Ricci et Levi-Civita, l. c., chap. VI, § 1.

Se indichiamo con $\frac{d}{d\sigma_2}, \frac{d}{d\sigma_1}$ le derivate intrinseche secondo le curve $K = \text{cost.}$ e le loro traiettorie ortogonali, e designiamo con q l'anisotermia del fascio definito dalle $K = \text{cost.}$, le due ultime equazioni, ove tengasi conto delle (12), dànno luogo a due equazioni indipendenti, lineari, rispetto a $\frac{d\mu}{d\sigma_1}$ e $\frac{d\mu}{d\sigma_2}$, che, risolute rispetto a codeste due derivate, dànno:

$$[I] \quad \begin{cases} \frac{d\mu}{d\sigma_1} = \left(\frac{p}{2} - \mu^2\right) \cos 2\psi - \frac{1}{2} q \operatorname{sen} 2\psi + \frac{1}{2} \mu (h + (g)) \\ \frac{d\mu}{d\sigma^2} = -\left(\frac{p}{2} - \mu_2\right) \operatorname{sen} 2\psi - \frac{1}{2} q \cos 2\psi \\ p = \frac{dh}{d\sigma_1} + \frac{d(g)}{d\sigma_1} + (h + (g))(g) - 2K \end{cases}$$

A queste equazioni aggiungiamo la rispettiva condizione di integrabilità:

$$[II] \quad \begin{cases} 2\mu q = A \operatorname{sen} 2\psi + B \cos 2\psi \\ A = \frac{1}{2} \frac{dq}{d\sigma_2} + \frac{1}{2}(h + (g))p - \frac{1}{2} \frac{dp}{d\sigma_2}, \quad B = -\frac{1}{2} \frac{dq}{d\sigma_1} + \frac{1}{2}(h + (g))q - \frac{1}{2} \frac{dp}{d\sigma_2}. \end{cases}$$

L'equazione (4), ove si tenga conto della prima delle (13), diventa:

$$[III] \quad \begin{cases} -3\mu^2 \operatorname{sen} 2\psi + 2\mu g = A' \operatorname{sen} 2\psi + B' \cos 2\psi \\ A' = 2\frac{dg}{d\sigma_2} - 2\frac{d\nu}{d\sigma_1} + \frac{1}{4}[h + 3(g)][h - (g)] + g^2 - p, \quad B' = -4\frac{dg}{d\sigma_1} - 2g\nu. \end{cases}$$

Infine dobbiamo tener conto del fatto che ψ è l'angolo di due congruenze, l'una del fascio φ_r, l'altra del fascio della congruenza $K = \text{cost.}$; applicando una relazione nota fra ψ e i sistemi coordinati covarianti dei due fasci [2] e tenendo conto delle [I] troviamo il sistema:

$$[IV] \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{d\sigma_1} = -\frac{1}{2} \mu \operatorname{sen} 2\psi + \frac{1}{2} g \\ \frac{d\psi}{d\sigma_2} = -\frac{1}{2} \mu \cos 2\psi + \frac{1}{2}(g) + \frac{1}{4}(h + (g)), \end{cases}$$

la cui condizione di integrabilità è, come è ben naturale, conseguenza delle [I].

4. Da quanto precede risulta che affinchè la varietà data contenga sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici, è necessario e sufficiente

[1] Ricci, *Lezioni* ecc., pag. 163, form. (5).

che esistano due funzioni μ e ψ, le quali soddisfacciano al sistema [I, II, III, IV]. Se questo sistema ammette soluzioni, a ciascuna di esse corrisponde sulla varietà data un sistema doppio ortogonale isotermo di cerchi geodetici, i cui sistemi coordinati covarianti si esprimono immediatamente per mezzo dell'angolo ψ e degli analoghi sistemi covarianti della congruenza $K = \text{cost.}$ e della congruenza ortogonale.

Ci resta adunque soltanto da discutere quando l'indicato sistema ammetta soluzioni.

È manifesto che le equazioni II e III non possono essere soddisfatte identicamente, vale a dire senza portare alcun legame fra μ e ψ. Esse quindi o sono distinte, o si riducono ad una sola. Nel primo caso esse definiscono μ e ψ, assegnando per codesta coppia di funzioni un numero finito di determinazioni. Se qualcuna fra queste rende soddisfatte anche le equazioni differenziali I e IV, esiste corrispondentemente a ciascuna di esse, sulla varietà data, una coppia di congruenze ortogonali isoterme di cerchi geodetici. Tralasciando di sviluppare i complicatissimi calcoli che si richiederebbero a formare esplicitamente le condizioni, sotto cui le funzioni μ e ψ definite dalle II e III rendono soddisfatte le I e IV, ci limiteremo ad osservare che il caso è teoricamente caratterizzato, in quanto, riconosciuta l'indipendenza delle II e III, si constata, mediante operazioni in numero ed in termini finiti, se sulla data varietà esistano o no sistemi doppî di cerchi geodetici (in numero finito), e in caso affermativo si determinano completamente.

Se le II e III si riducono ad una sola equazione, si riconosce subito, ponendo uguale a zero il determinante funzionale dei loro primi membri rispetto a μ e ψ, od anche mediante una semplice discussione diretta, che deve verificarsi l'uno o l'altro dei seguenti sistemi di condizioni:

a) $$A = B = q = 0$$

oppure:

b) $$A = B = A' = B' = 0.$$

Nel caso a) la $q = 0$ ci dice che sulla data varietà la congruenza di curve $K = \text{cost.}$ deve essere isoterma: le altre due equazioni dànno, come risulta dalle espressioni di A e B,

$$\frac{dp}{d\sigma_2} = 0 \quad , \quad \frac{dp}{d\sigma_1} = (h + (g))\, p \, .$$

Ma sopratutto ci importa di notare che in tal caso, la II essendo una identità, rimane a considerare la sola III.

Derivando questa secondo σ_1 e σ_2 e tenendo conto delle I e IV otteniamo le due equazioni:

$$[\mathrm{III}'] \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\mu(9\mu^2 - 3p + \mathrm{A}')\operatorname{sen} 4\psi + (\mathrm{C} - 3\mu^2(h + (g)))\operatorname{sen} 2\psi + \\ \quad + (\mathrm{D} - 5\mu^2 g)\cos 2\psi - \mathrm{B}'\mu\operatorname{sen}^2 2\psi + g(h + (g))\mu + 2\mu\frac{dg}{d\sigma_1} = 0 \\ \\ 3\mu^3(1 - 3\operatorname{sen}^2 2\psi) - \frac{\mu}{2}\mathrm{B}'\operatorname{sen} 4\psi + (\mathrm{C}' + 2\mu^2 g)\operatorname{sen} 2\psi + \\ \quad + (\mathrm{D}' - \frac{3}{2}\mu^2 h - \frac{9}{2}\mu^2(g))\cos 2\psi + \mathrm{A}'\mu\cos^2 2\psi = 0 \\ \\ \mathrm{C} = g\,\mathrm{B}' - \frac{d\mathrm{A}'}{d\sigma_1}\ ,\ \mathrm{D} = g(p - \mathrm{A}') - \frac{d\mathrm{B}'}{d\sigma_1}\ , \\ \\ \mathrm{C}' = -gp + \frac{1}{2}(h + 3(g))\mathrm{B}' - \frac{d\mathrm{A}'}{d\sigma_2}\ ,\ \mathrm{D}' = -\frac{1}{2}(h + 3(g))\mathrm{A}' - \frac{d\mathrm{B}'}{d\sigma_2} \end{cases}$$

Ora se le tre equazioni III, III′ sono incompatibili, sulla data varietà non vi sono sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici. Se sono compatibili e si riducono a due soltanto, esse definiscono un numero finito di determinazioni per la coppia di funzioni μ e ψ e possiamo constatare mediante un numero finito di operazioni in termini finiti se ad esse corrispondano effettivamente sulla varietà data sistemi doppî della specie cercata e in caso affermativo li possiamo effettivamente determinare. Se, infine, le III, III′ si riducono ad una sola equazione (la III), si riconosce, mediante una discussione che richiede calcoli alquanto laboriosi ma di nessuna intrinseca difficoltà, che si ricade nel caso *b*).

In questo caso le II, III si riducono alla $\mu = 0$ e perciò il sistema I diventa:

$$p\cos 2\psi - q\operatorname{sen} 2\psi = 0\ ,\ p\operatorname{sen} 2\psi + q\cos 2\psi = 0\ ,$$

onde risulta, insieme con le *b*), $p = q = 0$. Anche in questo caso, dunque, si tratta di superficie, su cui le curve $\mathrm{K} = \text{cost.}$ formano una congruenza isoterma. L'angolo ψ è in tal caso definito dal sistema, necessariamente completo:

$$(14) \qquad \frac{d\psi}{d\sigma_1} = \frac{1}{4}g\ ,\quad \frac{d\psi}{d\sigma_2} = \frac{3}{4}(g) + \frac{1}{4}h\ ,$$

la cui soluzione generale dipende da una costante arbitraria. Si hanno dunque sulla varietà data ∞^1 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici.

5. Concludendo la nostra ricerca, abbiamo che, *se si prescinde dalle superficie a curvatura totale costante, sulle quali esistono* ∞^4 *sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici, su di una superficie non possono esistere più di* ∞^1 *sistemi doppi siffatti. Le superficie che contengono effettivamente una semplice infinità di codesti sistemi sono caratterizzate dal sistema di equazioni intrinseche*:

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dg}{d\sigma_1}+\dfrac{d(g)}{d\sigma_2}=0 \quad , \quad \dfrac{d(g)}{d\sigma_1}+\dfrac{dh}{d\sigma_1}+(h+(g))\,(g)-2\,\mathrm{K}=0 \\ 4\dfrac{dg}{d\sigma_1}+(h-(g))\,g=0\,, \quad \dfrac{d(g)}{d\sigma_1}+\dfrac{dg}{d\sigma_2}=\mathrm{K}-\dfrac{h}{8}[h+6(g)]-\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{8}(g)^2 \end{cases}$$

Verificate queste condizioni, gli ∞^1 *sistemi doppi in parola si determinano integrando il sistema completo* (14).

Finiremo osservando che se, anzichè supporre dato l'elemento lineare, si volessero determinare tutti i ds^2 a curvatura totale non costante, su cui esistono ∞^1 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici (problema del Darboux) bisognerebbe integrare il sistema differenziale, che si ottiene aggiungendo alle (15) la formola del Liouville relativa al fascio cui appartengono le curve $\mathrm{K}=\text{cost.}$, e la nota relazione che lega l'invariante h alle curvature geodetiche g e (g) [1], cioè le due equazioni:

$$\frac{d(g)}{d\sigma_1}-\frac{dg}{d\sigma_2}+g^2+(g)^2+\mathrm{K}=0\,, \quad \frac{dh}{d\sigma_2}=\frac{dg}{d\sigma_1}+g\,(h+(g))\,.$$

Fisica. — *Ricerche di radioattività indotta.* Nota II^a di A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

1. In una Nota preliminare presentata a codesta Accademia nella seduta del 19 gennaio 1902, annunziavo che si può rendere radioattivo un corpo metallico, quando si affacciano ad essa delle punte e si pongono punte e corpo in comunicazione coi poli di una macchina elettrostatica. La mia prima disposizione consisteva nell'attivare una spirale di filo metallico, coassialmente alla quale era posto un cilindro fornito di aghi radiali. Le ricerche ulteriori furono condotte nel seguente modo.

Si prende una lastra metallica (cm. 10×14) e normalmente ad essa si pongono 3 aghi colle punte verso la lastra (ai vertici di un triangolo di 2 cm. di lato). Aghi e lastra sono posti in comunicazione coi poli di una macchina elettrostatica con un condensatore in derivazione, e si lascia funzionare questa per un certo tempo (di solito mezz'ora); la distanza fra le punte e la lastra varia a seconda della potenza della macchina; essa veniva in fatti regolata in modo da avere effluvio, senza che scoccassero scintille, e riesce quindi molta diversa a seconda del segno elettrico delle punte.

Per misurare l'attività acquistata dalla lastra, la si poneva poi in comunicazione con il polo di una batteria di elementi (il cui altro polo era a terra), mentre affacciata alla lastra era una rete metallica parallela, in comunicazione

(1) Ricci, *Lezioni* ecc., n. 43, form. (15_1).

con una coppia di quadranti di un elettrometro, di cui l'ago era mantenuto ad un potenziale costante e l'altra coppia a terra. Si misurava poi il tempo necessario perchè la rete, inizialmente al suolo, si caricasse ad un determinato potenziale.

2. Il fatto più notevole annunziato nella prima Nota si era che si poteva rendere radioattivo il corpo, anche quando questo era elettrizzato positivamente, contrariamente ai risultati di altri sperimentatori.

Le ricerche istituite colla nuova disposizione confermarono pienamente i primi risultati. Restava ora di stabilire se la radioattività così generata dipende da uno stato speciale prodotto nell'aria dall'effluvio elettrico, ovvero da uno stato preesistente nell'aria stessa, allo stesso modo della radioattività ottenuta dagli altri fisici con corpo negativo.

Potei presto stabilire che l'intensità della radioattività assunta dalla lamina positiva dipende in grande misura dallo stato dell'aria; così essa è quasi nulla operando all'aria od in una stanza colle finestre aperte; cresce assai operando in una stanza, le cui finestre sono state chiuse da parecchie ore e diventa molto grande in un locale chiuso da lungo tempo, come in una cantina.

Di più questa radioattività indotta è piccolissima, se si opera con lamina ed aghi rinchiusi in una cassa della capacità di 30 litri, come se questa proprietà dell'aria non si possa produrre in ambienti piccoli; così non si ottiene attivazione riempiendo la cassa di ossigeno o di gas illuminante. Infine l'attivazione della lamina è indipendente dalla natura del metallo.

Questi risultati provano che la radioattività prodotta con lastra positiva e punte negative affacciate, si forma in presenza di aria, la quale si trova nelle medesime condizioni, in cui si attiva un corpo negativo, e che furono studiate con così interessanti risultati da Elster e Geitel e da Rutherford. E non si può pensare ad attività prodotta, per esempio, dall'ozono o da un'altra modificazione diretta generata dall'effluvio.

3. Lasciando all'aria libera una lastra metallica, p. es. di zinco spulito, collegata ad una macchina elettrostatica, con punte affacciate ed al suolo, si osserva dopo qualche tempo un'alterazione della superficie (probabilmente un'ossidazione) che si dispone in figure a contorni molto netti e che corrispondono in tutto alle così dette figure del Kundt. Si presentava quindi spontanea l'idea di vedere se la porzione attiva della lamina fosse appunto quella, ove la superficie era alterata. Ed apposite misure all'elettrometro, ricoprendo diverse porzioni della lastra con piombo in lamina, confermavano questa supposizione. Ma ponendo la lamina metallica sopra una lastra fotografica, dopo interposto un foglio di carta nera, non ottenni indizî sicuri della cosa per la ragione che la radioattività acquistata dalla lamina, già debole per azioni fotografiche, va rapidamente descrescendo, riducendosi dopo un'ora alla metà e dopo 3 ore al quarto del valore iniziale.

4. Per ottenere degli effetti più cospicui e potere quindi studiare più sicuramente le modalità del fenomeno pensai di operare nell' aria, ma in un ambiente, in cui fosse presente l' emanazione dell' ossido di torio scoperto dal Rutherford. L' analogia fra l' aria atmosferica in luoghi chiusi e l' aria contenente questa emanazione era sufficientemente stabilita dalle ricerehe di Elster e Geitel e del Rutherford.

Posi allora sul fondo della cassa di 30 litri prima ricordata, una capsula contenente mezzo chilogramma di ossido di torio ottenuto per precipitazione coll' ammoniaca da soluzioni di nitrato di torio (provenienti da residui di reticelle Auer). La lastra e gli aghi erano disposti nell' interno della cassa ed uniti a fili adduttori ben isolati.

Richiudendo con cura la cassa, lasciando le cose a sè per circa 16 ore e poi elettrizzando per mezz' ora la lastra e gli aghi ottenni i medesimi fenomeni che nell' aria libera, ma un' attivazione molto più intensa, circa 10 volte maggiore come nelle migliori condizioni (cioè in una cantina). Si attivava la lastra sia caricandola positivamente, sia negativamente e pressochè in eguale misura.

Se invece si elettrizza la lastra appena richiusa la cassa, oppure dopo di avere rinnovata l' aria, si ottiene un' attivazione molto maggiore con lastra negativa, che non con lastra positiva.

È a notarsi però che questa attivazione in aria fresca, con lastra negativa, che più brevemente diremo attivazione negativa, è molto più debole (p. es., nel rapporto di 1 a 15) che non quella positiva o negativa, che si ottiene nelle condizioni precedenti, cioè con aria vecchia.

Esaminando ora le due faccie della lastra, si nota che, operando con aria fresca, nell' attivazione negativa si attiva anche la parte non rivolta agli aghi anzi talora più intensamente, che non quella che ha raccolto l' effluvio, mentre nel caso dell' attivazione positiva, essa è debolissima nella faccia posteriore.

Operando in aria vecchia, la faccia non rivolta agli aghi non presenta un' attivazione maggiore della naturale, cioè di quella che si ottiene senza alcun fenomeno elettrico, in un ambiente contenente le emanazioni dell'ossido di torio.

L' attivazione negativa in aria fresca ha poi questo di caratteristico, che, dopo tolta la lastra dalla cassa e di averla lasciata all' aria libera, essa seguita a crescere per alcune ore, sino a più del doppio, mentre una lastra attivata in aria vecchia, subito dopo estratta o resta stazionaria per poi cominciare a decrescere lentamente, ovvero presenta un aumento leggerissimo.

5. Dopo di avere così ottenuto una radioattività molto intensa in aria vecchia esposta alle emanazioni dell' ossido di torio, e di avere trovato che essa è molto persistente, riducendosi dopo 6 ore da 100 a 75 ed a 25 dopo 24 ore, ripresi l' esperienza fotografica tentata prima invano e di cui

al 3. Il risultato fu splendido. Si ebbero sulla lastra fotografica le figure del Kundt; la radioattività viene conferita alla lamina in quelle porzioni della superficie, in cui si ha lo scambio di elettricità fra superficie metallica ed aria ed in cui hanno luogo tutti quei fenomeni ritrovati dal Kundt e da altri sperimentatori dopo di lui. Mentre, giova ricordarlo, la lamina non impressionò la lastra fotografica, quando non era attiva elettricamente, mentre le figure di ossidazione potevano essere sopra di essa nettissime (questo mostra che i fenomeni da me osservati non hanno nulla di comune con quelli riferiti recentemente dal Villard).

Le figure del Kundt si ottengono in pochi secondi facendo avvenire l'effluvio in un' aria fumosa od in cui sieno sospese delle particelle molto leggere (p. e. ossido di magnesio ottenuto bruciando del magnesio in vicinanza); la lamina si copre di fumo o di polvere bianca in quelle porzioni della superficie, che costituiscono appunto le figure del Kundt. Viene quindi naturale alla mente il pensare che queste particelle attive contenute nell' aria si elettrizzano in vicinanza delle punte e poi vengono lanciate sulla lastra ed ivi fissate. Si intende che adopero un' immagine, non volendo in alcun modo affermare o mostrare di credere che le cose avvengano proprio così.

6. Volendo raccogliere i fenomeni osservati, si è portati a concludere che se l' emanazione dell' ossido di torio in aria fresca porta questa in uno stato tale, che si ha un' attivazione solo sopra i corpi negativi, come se si trattasse di particelle elettrizzate positivamente, che seguono le linee di forza — e questo è il fenomeno osservato dal Rutherford — invece dopo alcune ore l' aria in presenza dell'ossido di torio è in uno stato tale, che l'effluvio elettrico, che esce da una punta, rende attiva una lamina e nelle porzioni di essa su cui viene a battere. Questi risultati spiegono ora quello che si era osservato nell' aria semplice, purchè si ammetta che l'aria atmosferica ordinaria si trova, qualitativamente, nelle stesse condizioni come l' aria in presenza delle emanazioni di ossido di torio. E che nei due casi il lasciare l' aria rinchiusa produca una modificazione nell' aria stessa e non già nella lamina, risulta dall'attivazione intensa che si ottiene sopra una lastra portata in una cantina e sottoposta subito dopo al processo elettrico.

7. Ricordo ancora che collegando la lamina e gli aghi coi poli di un trasformatore Tesla, non si ottiene attivazione anche in aria vecchia contenente emanazioni toriche. Anzi la faccia esposta all' effluvio si mostrò una volta meno attiva della faccia rivolta dall' altra parte, la quale aveva l' attività naturale assunta da ogni corpo lasciato a sè per un certo tempo in vicinanza di ossido di torio.

In questa comunicazione mi sono limitato ad esporre i principali risultati ottenuti, senza riportare i dati numerici, che seguono dalle numerose misure eseguite, riservandomi di pubblicarli prossimamente. Intanto mi è grado ringraziare il signor Caboni, laureando in fisica, il quale mi ha efficacemente aiutato nelle esperienze descritte.

Chimica. — *Sulla tautomeria dell'acido piromeconico* (1). Nota di A. Peratoner, presentata dal Socio E. Paternò.

La determinazione quantitativa dei prodotti di scissione dell'acido piromeconico (2) mi indusse, alcun tempo fa, a concludere che questo acido, di cui dimostrai la costituzione di 3-ossipirone, nelle sue reazioni non si presenta solamente nella forma ossidrilica (I) finora nota, ma altresì in quella tautomerica chetonica (II).

Mi sembrò inoltre probabile, che da questa forma chetometilenica fosse da derivare l'acido nitroso-dipiromeconico, ottenuto da Ost (3) per l'azione dell'acido nitroso e considerato come prodotto di addizione dell'acido nitroso-piromeconico con una molecola di piromeconico, $C_5H_3O_3 . NO + C_5H_4O_3$.

Lo studio di questa sostanza dimostrò che la mia supposizione era esatta rivelandosi il nitroso-composto invece come isonitroso-derivato. Un'ulteriore prova della presenza del pruppo $— CH_2 — CO —$ nell'acido piromeconico la trovai nella reazione coi sali di diazocomposti.

Nella presente Nota riassumo brevemente i risultati principali della mia ricerca.

Trattavasi anzitutto di trovare un metodo agevole per la preparazione del materiale di partenza, l'acido nitroso-dipiromeconico puro, giacchè il metodo indicato da Ost, di lavorare cioè con piccole porzioni di acido piromeconico polverizzato, introducendole in soluzioni di triossido di azoto nell'etere assoluto, è faticoso e richiede tempo e spesa rilevanti. Inoltre lavorando con quantità maggiori, la formazione di un nitroderivato per l'azione ossidante dell'acido nitroso non può evitarsi; e data la grande instabilità del nitroso-composto, tale impurezza non si riesce ad eliminarla più in alcun modo.

Assai comoda invece è la preparazione, quando si operi in soluzione cloroformica e si impieghi un nitrito alchilico (4), il cui eccesso non nuoce.

Il prodotto cristallino, d'un bel giallo canario, si separa allora nel tempo di 6-8 ore, con un rendimento del 95-97 % del teoretico, senza che si libe-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Palermo.

(2) Peratoner e Leonardi, Gazzetta chimica *30* I, 539.

(3) Journal. f. prak. Chemie *19*, 195.

(4) Ho preferito al nitrito d'amile quello di etile, preparato secondo Bertoni (Gazz. chim. *12*, 441), perchè dopo si evapora rapidamente col cloroformio.

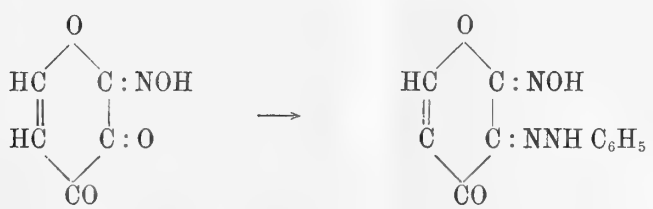
rino traccie notevoli di acido nitroso. Basta lavarlo con cloroformio per averlo puro per analisi. L'impiego di etilato sodico e di soluzione alcoolica non conduce allo scopo.

L'acido pirometeonico si comporta di fronte all'etere nitroso come alcuni composti chetometilenici e non come i fenoli. Queste sostanze, come è noto, forniscono isonitrosoderivati anche in soluzione acida, quantunque con scarso rendimento. Però ho potuto convincermi con apposite esperienze che è caratteristico il comportamento dei fenoli, i quali in contatto col nitrito alchilico anche a 0° svolgono una corrente regolare di ossidi dell'azoto, mentre gli 1, 3 — dichetoni (eteri acetil- e benzoilacetico, acetil- e benzoil-acetone) si trasformano coll'etere nitroso solo lentamente ed in piccola parte senza che si liberi acido nitroso.

Il comportamento simile dell'acido pirometeonico, faceva già arguire la formazione di un ossima — C : (NOH) — CO —. Ma a dimostrare la presenza e la posizione del gruppo isonitroso male si prestarono le reazioni che sono consigliate in casi simili. Taccio quindi i tentativi infruttuosi e noto solamente che la quistione fu risolta mediante la reazione con fenilidrazina.

A priori erano da considerarsi principalmente due casi più probabili: dovevasi cioè attendere, analogamente alle esperienze di Otto Fischer e Wacker (1) colla chinonossima, la formazione di un acido amidopirometeonico,

oppure secondo i lavori di v. Pechmann (2) quella di un'idrazossima.



La reazione, infatti, procede secondo quest'ultimo schema e va blandamente, quando si introduca il nitrosocomposto a porzioni piccole in soluzione ben raffreddata di fenilidrazina nell'acido acetico glaciale. Il prodotto della reazione inquinato da molta resina rossa è depurato con difficoltà; in ultimo si ottiene dalla soluzione xilolica un miscuglio di due sostanze cristalline,

(1) Berichte *21*, 2616.
(2) Ibidem *21*, 2992, 2994 ecc.

delle quali l'una dal p. f. 165° è costituita da aghi gialli, sottilissimi, l'altra è in fiocchi bianco-grigiastri. Non sono riuscito finora ad avere pura quest'ultima, dapoichè cristallizzando frazionatamente il miscuglio e specialmente adoperando benzolo, i fiocchi bianchi andavano mano mano trasformandosi in aghi gialli, assai simili nell'aspetto a quelli dal p. f. 165°, ma fondenti invece a 197°. Cosicchè infine ebbi una mescolanza dei due corpi giallo-chiari quasi ugualmente solubili nei solventi, sulla cui separazione faticosa non voglio qui dilungarmi.

Questi due corpi sono isomeri, conducendo l'analisi alla formola di *diidrazoni dell'acido nitrosopiromeconico*

$$C_5H_2O(:NOH).(NNH\,C_6H_5)_2$$

Mostrano l'identico comportamento chimico, del quale rilevo:

1. Entrambi sono ancora veri derivati del pirone, venendo trasformati dagli alcali in xantocomposti, gialli, poco solubili, con apertura dell'anello pironico. Trattando questi sali con acidi, le sostanze primitive si rigenerano, però solamente in parte, mentre si formano quantità non trascurabili di corpi di natura gommosa, ciò che è comune ai derivati dell'acido piromeconico.

2. Dopo riscaldamento prolungato delle loro soluzioni con acido cloridrico, queste riducono il liquido di Fehling.

3. I due residui della fenilidrazina in entrambi gli idrazoni sono legati ad atomi di carbonio contigui, dapoichè i prodotti danno la reazione degli *osazoni* di v. Pechmann (1) e per ossidazione blanda si trasformano in *osotetrazoni*.

4. Entrambe le sostanze sono inoltre *idrazossime* e per conseguenza un residuo della fenilidrazina ed il gruppo ossimidico sono ancora legati a due atomi di carbonio contigui. Ciò risulta dal fatto, che per riscaldamento sopra il loro punto di fusione, i prodotti eliminano una molecola di acqua fornendo *l'identico* prodotto di anidrificazione, che è da ritenersi come derivato dell'*osotriazolo*, e si presenta in aghi bianchi dal p. f. 242°.

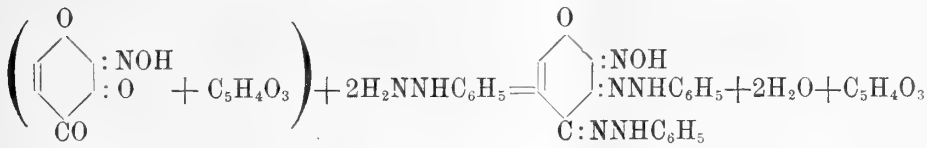
Ne segue che i due corpi isomeri devono avere l'istessa costituzione chimica, e con somma probabilità sono stereoisomeri per la presenza del gruppo ossimico.

La formazione di tutte le sostanze cennate si spiega con facilità, solo quando si ammetta che l'acido nitroso-dipiromeconico sia l'ossima di un trichetone, in cui i tre gruppi carbonilici si trovino in posizione vicinale, cioè se si considera per l'acido piromeconico anche la forma chetometilenica

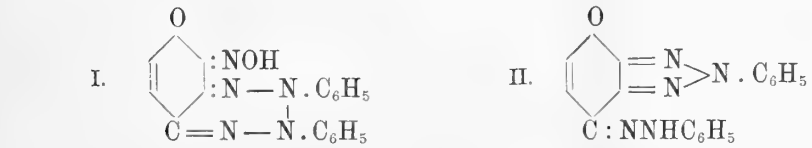
$$2\begin{matrix} HC-O-CH_2 \\ \| \quad\quad | \\ HC-CO-CO \end{matrix} + ON.OH = \left(\begin{matrix} HC-O-C:NOH \\ \| \quad\quad | \\ HC-CO-C:O \end{matrix} + C_5H_4O_3\right) + H_2O$$

(1) Berichte *21*, 2752.

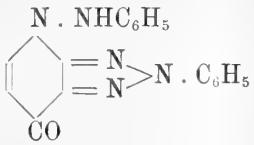
Da questa ossima ottenendosi i due osazoni stereoisomeri con eliminazione della molecola di acido piromeconico addizionata, si sarebbe indotti a ritenere che tale molecola sia legata ad uno dei gruppi carbonilici.



Dalle due diidrazo-ossime stereoisomere per ossidazione si ricavano gli osotetrazoni (I) e per eliminazione di acqua l'identico osotriazolo (II)



Tuttavia rimane dubbio se a questo derivato triazolico non sia da attribuirsi piuttosto la costituzione



secondo la quale sarebbe anche un composto piridonico.

Il fatto che esso rimane inalterato all'azione dell'idrato potassico bollente, con cui invece forma un sale poco stabile, e che per azione di acido cloridrico non elimina più fenilidrazina, dimostrerebbe che non è più nè idrazone, nè derivato pironico. Se ciò viene confermato, bisognerà ammettere che alla temperatura elevata, alla quale il composto triazolico si forma, avvenga uno scambio fra il residuo fenilidrazinico e l'atomo d'ossigeno in posizione *para*.

Nel caso presente abbiamo dunque un'analogia completa coi prodotti preparati da v. Pechmann dagli 1,2 — dichetoni, con la piccola differenza che mentre comunemente la formazione degli osotriazoli dalle idrazossime ha luogo per azione di deacquificanti o per via indiretta, nel caso attuale avviene direttamente e con facilità pel solo riscaldamento.

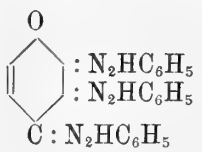
In modo simile alla fenilidrazina reagiscono sull'acido isonitrosopiromeconico anche l'idrossilammina e l'o-fenilendiammina; fornendo quest'ultima un prodotto di condensazione, viene riconfermata la esistenza dei due gruppi carbonili contigui.

L'acido pirometeconico si comporta pure come derivato chetometilenico di fronte all'acetato di diazonio. Mescolando le soluzioni acquose ghiacciate, precipita l'*idrazone*, di colore rosso sangue,

$$\begin{array}{l} HC - O - C : NNHC_6H_5 \\ \| \quad\quad\quad | \\ HC - CO - CO \end{array}$$

che può cristallizzarsi dallo xilolo o anche dall'alcool, se si eviti di riscaldare troppo. Si decompone a 175° con eliminazione repentina di carbone.

Facendo reagire questa sostanza sopra eccesso di fenilidrazina in acido acetico glaciale, si possono separare due prodotti gialli; l'uno, insolubile, è isomero dell'idrazone rosso e come questo si decompone a 175°. L'altro, il prodotto principale, che dalla soluzione acetica si depone col tempo per aggiunta di piccole quantità d'acqua, e che depurato si presenta in laminette dal p. f. 158°,5, è un *tri-idrazone* dell'acido pirometeconico, al quale, in base a quanto fu detto sopra per le diidrazo-ossime, è da assegnarsi la formula



Riferirò in seguito più estesamente sullo studio di queste sostanze.

Intanto voglio notare fin d'ora che secondo l'accordo preso coi sigg. prof. Kiliani di Friburgo e dott. Feuerstein di Mulhouse, tenterò di applicare le reazioni dell'acido pirometeconico da me studiate al *maltolo*. Questo composto, ora facilmente accessibile dopo la comunicazione del dott. Feuerstein (1), era stato considerato dal prof. Kiliani a ragione come acido metilpirometeconico (2); tuttavia la costituzione non ne fu chiarita. Ora come derivato dell'ossipirone dovrebbe fornire per scissione quantitativa con alcali, a seconda della posizione del metile:

$$\begin{array}{l} HC - O - C . CH_3 \\ \| \quad\quad\quad \| \\ HC - CO - C . OH \end{array} \qquad \begin{array}{l} HC - O - CH \\ \| \quad\quad\quad \| \\ CH_3.C - CO - C . OH \end{array}$$

acido formico (1 molecola), acido acetico (1 molecola) ed alcool acetolico, oppure acido formico (2 molecole) ed alcool metilacetolico. Ulteriori ragguagli sulla posizione del metile rispetto all'ossidrile potrebbero forse ricavarsi dall'azione dell'acido nitroso secondo le indicazioni date nella presente Nota.

(1) Berichte *34*, 1804.

(2) Kiliani u. Bazlen. Berichte *27*, 3115.

Mineralogia. — *Thomsonite e apofillite di Schiket nella Colonia Eritrea.* Nota di G. D' Achiardi [1], presentata dal Corrispondente A. D'Achiardi.

Fra le rocce raccolte dal dott. Gino Bartolommei Gioli nella Colonia Eritrea e donate al Museo di Mineralogia della R. Università di Pisa, delle quali sarà fra breve da me pubblicata una descrizione, sono alcuni campioni di un basalte nerastro amigdalare presi nelle vicinanze di Schiket, località che si trova sulla strada che da Asmara conduce a Godofelassi prima di arrivare ad Adi-Baro [2]. Di questa stessa località, e se non precisamente dello stesso luogo pur sempre del colle di Schiket, già aveva il Bucca [3] fatto conoscere un basalte con venature e sferule di calcedonio, descritto poi successivamente anche dal Sabatini [4]. Però sembra che almeno per la natura delle segregazioni secondarie nulla abbia a che fare con quello da me osservato, nel quale si hanno del pari vene e sferule amigdalari, ma, anzichè essere calcedoniose, sono di costituzione zeolitica e affine, come dimostra lo studio da me fatto e di cui rendo qui brevissimo conto.

Thomsonite, varietà färöelite.

Come riempimento delle cavità amigdalari, o disteso in frangie ondulate sulle pareti loro ove esse si allungano irregolarmente assumendo aspetto di venule, si ha quasi esclusivamente un minerale bianco, a struttura fibroso-raggiata, lucentezza sericeo-madreperlacea, che nel suo insieme richiama alla mente l'apparenza della mesole, della färöelite e della così detta sferostilbite, varietà tutte di thomsonite, descritta la prima da Berzelius [5], la seconda da Heddle [6] e nuovamente studiata e riportata a questa specie la terza dal Prior [7]. Lo studio fattone conferma la corrispondenza.

Osservando infatti al microscopio le esili fibre, che rendono aspra la superfice delle sferule da cui sporgono, si riconoscono per trimetriche con

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

[2] Baldacci, *Carta dimostrativa della Colonia Eritrea.* Mem. descritt. della Carta geol. d'Italia. Vol. VI, Roma, 1891.

[3] *Contribuzione allo studio geologico dell'Abissinia.* Att. Acc. Gioenia di Sc. Nat. Ser. IX, vol. IX, Catania, 1892.

[4] *Sopra alcune rocce della Colonia Eritrea.* Parte III. Boll. R. Com. Geol., vol. X, n. 2, Roma, 1899.

[5] Philosophical Journal, *7*, 6, 1822.

[6] Philosophical Magazine, *13*, 50, 1857; *15*, 28, 1858.

[7] *On sphaerostilbite.* Mineralogical Magazine, *12*, 54, 1898.

abito prismatico-basale a contorno rettangolare, estinzione perfettamente parallela all'allungamento loro e segno ottico positivo.

Durezza c^a. 5; peso specifico = 2,25. Al cannello ferruminatorio fonde decrepitando in uno smalto bianco e colora la fiamma in giallo.

Con acido cloroidrico a caldo dà silice gelatinosa.

L'analisi quantitativa mi dette i risultati della colonna I, riportati a 100 nella II:

	I	II
$Si\ O_2$	41,30	40,96
$Al_2\ O_3$	29,49	29,25
$Ca\ O$	11,61	11,51
$Na_2\ O$	5,11	5,07
$K_2\ O$	tracce	—
$H_2\ O$	13,32	13,21
	100,83	100,00

Gli alcali furono calcolati come se fosse solo presente il sodio, poichè il potassio potè solo avvertirsi qualitativamente alla fiamma nel prodotto della disgregazione del minerale con fluoruro ammonico dopo eliminazione della calce e dell'allumina.

L'acqua fu determinata alle temperature seguenti:

	$H_2\ O\ \%$
A 80°-85°	0,942
145°-150°	1,169
205°-210°	1,107
255°-260°	1,365
325°-330°	2,179
Per arroventamento	6,556
	13,318

Anche nella quantità di acqua perduta alle diverse temperature si ha notevole corrispondenza con le determinazioni fatte sulla mesole e sulla färöelite per le quali pure poco meno della metà se ne va solo con l'arroventamento (1).

Altra e non minore corrispondenza con le stesse varietà si ha poi nell'eccesso di silice di fronte alla costituzione ammessa come normale nella thomsonite, onde se può dubitarsi che si abbia a che fare con tipica thomsonite, nessun dubbio rimane che si tratti della stessa cosa di quelle varietà sopra citate, che furono e sono riferite a questa specie, per le quali, anche

(1) Dana, *A System of Mineralogy*, pag. 608, New-York, 1892.

se se ne dovessero distinguere, non vi ha certo ragione per indicarle con diversi nomi, ed io ho prescelto quello di färöelite, perchè l'altro più antico di mesole può ingenerar confusione con altre specie quasi egualmente denominate.

L'eccesso di anidride silicica fu da taluno attribuito a mescolanza di quarzo, ma Dana esclude giustamente questa spiegazione. Altra e migliore interpretazione può forse aversi, considerando l'acqua, in buona parte almeno, come di costituzione della molecola, nel ritenere col Clarke (1) che una porzione del silicio anzichè del gruppo $[Si\,O_4]$ debba considerarsi come facente parte del gruppo $[Si_3\,O_8]$, che del pari tetravalente può ad esso sostituirsi.

Apofillite, varietà tesselite.

Sulle frangie sferulitiche di thomsonite si osservano qua e là dei cristalletti isolati, scoloriti, cubiformi, che a prima vista potrebbero credersi di cabasia. Misurati però gli angoli, quantunque la natura delle faccie non consenta misure goniometriche rigorosamente esatte, ho sempre trovato valori vicinissimi a 90° tanto da escludere il dubbio che si trattasse di cabasia, dubbio escluso del tutto anche dal contegno ottico per l'estinzione, che è di cristalli dimetrici.

Essi spettano alla apofillite, che suole accompagnare anche la färöelite testè ricordata, ed un attento esame al microscopio dei più nitidi cristallini, fra i pochi che ho potuto esaminare, li mostra talvolta costituiti oltrechè dalle facce $\}100\{$, $\}001\{$, che sono sempre le più sviluppate e spesso le sole esistenti, anche dalle facce $\}111\{$ e da quelle pure di un prisma ditetragonale $\}m\,n\,0\{$, le une e le altre sempre però piccolissime.

Si ha quindi un abito cristallino quale in quella varietà di apofillite detta tesselite ritrovata alle isole Färöer, e quale fu anche effigiato dal Rumpf (2) e dal Dana (3) per i più semplici cristalli di questa e di altre località.

La sfaldatura è parallela a $\}001\{$ con lucentezza madreperlacea.

Durezza = 5; peso specifico = 2,2.

Anomalie ottiche evidentissime tanto sulle facce del prisma, quanto sulle basali che appariscono divise in quattro settori triangolari, nei quali talvolta si ha associazione di aree otticamente positive e negative, carattere anche questo della apofillite.

(1) *The Constitution of the Silicates.* Bull. Un. St. Geol. Surv. Washington, 1895.

(2) *Ueber den Krystallbau des Apophyllits.* Tschermak's Mitth. Bd. II Wien, 1880, tav. III, fig. 15.

(3) Op. cit., pag. 566, fig. 1.

Al cannello ferruminatorio si sfoglia, rigonfia, imbianca e fonde in smalto bianco colorando la fiamma in giallo e violetto, visibile quest'ultima colorazione eliminando la prima con vetro azzurro.

Le ricerche qualitative per via umida dettero silice gelatinosa con gli acidi; calcio abbondante e solo tracce di allumina.

Impossibile fare un' analisi quantitativa completa disponendo di pochissimi cristallini, ma i saggi ottico-cristallografici e chimici non lasciano alcun dubbio che si tratti di apofillite simile alla varietà tesselite.

Cecidologia. — *Di una nuova specie di Pinipide galligeno e della sua galla già nota a Teofrasto.* Nota del dottor A. Trotter, presentata dal Corrispondente Cuboni.

Tra le numerose galle da me raccolte in un viaggio compiuto coll' amico dott. Achille Forti di Verona nella penisola balcanica ed in Asia Minore, dal luglio all' ottobre del 1900, galle che saranno completamente illustrate in un prossimo fascicolo degli Atti della Società botanica italiana, mi colpì non poco una singolarissima della Quercia rinvenuta prima (23 agosto) in Asia Minore sul M. Olimpo nei dintorni di Brussa (su *Quercus lusitanica* Lam.) quindi, più tardi (29 settembre) in Montenegro, non lungi da Cetinje, nei paraggi di Dobisko Selo (su *Q. sessiliflora* Sm. var. *pubescens* Will.).

La struttura di questa galla è altrettento semplice, quanto curiosa e perfetta: è essa costituita a maturità di una specie di nocciolo legnoso, durissimo, ovoide, sensibilmente attenuato ai due poli, lungo 10-12 mm. largo 8-10 mm., a superficie ruvida, anzi un po' rugosa e di un colorito isabellino più o meno spiccato. Entro a questo nocciolo trovasi scavata la camera larvale, tondeggiante di 4-6 mm. di diametro. Questa galla deriva, per quanto io ho osservato, da una trasformazione del frutto — non escludo ch' essa possa talora formarsi anche a spese di una gemma — ed aderisce perciò al ramo, da cui ebbero origine tali organi, e non se ne stacca che a maturità.

Ciò però che più interessa in questa galla si è il suo fitto e completo rivestimento di peli, di un aspetto lanuginoso, peli che sono lunghi 8-12 mm. e talora anche fino a 15-20 mm., giallicci da giovani, fulvi e rossicci a maturità. Osservati con leggero ingrandimento, essi si mostrano diritti soltanto nella porzione basale, presso l'inserzione, mentre più su vanno regolarmente serpeggiando ad acuti zig-zag; ad ingrandimento più forte si vedono costituiti di una serie di cellule cilindriche, abbastanza lunghe, un po' ingrossate all' estremità, le basilari più corte, ricche di protoplasma, le terminali più allungate e povere di contenuto. È chiaro quindi che l' accrescimento dei peli è dovuto principalmente all' accrescersi delle cellule basilari.

Questo rivestimento lanoso appare assai presto nell' ontogenesi della galla, e mentre il nocciolo interno, cioè la galla propriamente detta, è appena sviluppata, avendo un diametro soltanto di 2-4 mm. (1), la chioma lanosa ha già quasi toccato l' apice del suo accrescimento. L' altra continua poi ad accrescersi lentamente fino ad assumere i caratteri già descritti. Giunto a questo punto, il nocciolo si è venuto staccando *completamente* dal suo involgio lanoso e, contemporaneamente, anche dal ramoscello a cui fino allora era rimasto congiunto, per cui esso cade a terra per il proprio peso. Il rivestimento lanoso invece, per la propria leggerezza, perdura quasi sempre per un certo tempo sulla pianta, sostenuto da qualche foglia o da qualche aderenza semplicemente meccanica col ramoscello, finchè il vento o la pioggia non disperdono anche quest' ultimo vestigio della curiosissima galla (2). In Montenegro io mi sono imbattuto in un arboscello di Quercia che era quasi tutto coperto da questi ciuffi lanosi, semplicemente sostenuti dalle foglie e dai rami, e già abbandonati dalla parte più importante della galla; e se io non avessi già saputo di che cosa si trattava, per averla prima raccolta in Asia Minore in diverse fasi di sviluppo, sarei stato ben imbarazzato nel giudicare di che si trattasse. Ai piedi dell' arboscello rinvenni poi, tra i detriti vegetali abbondantissimi i noccioli caduti, che raccolsi per allevarne il produttore.

Scorgiamo quindi in questa galla un' evoluzione morfologica e biologica curiosissima ed, a vantaggio dell' animale, dei provvedimenti protettivi semplici e ad un tempo perfetti: la larva, quando il tessuto che l' avvolge è ancor tenero e facilmente potrebbe venir trapassato dall' ovopositore di qualche insetto parassita, è validamente protetta dal cospicuo involucro lanoso che appare per l' appunto, già l' ho detto, sin dall' iniziarsi della galla, mentre quando le pareti di questa si son fatte grosse e legnose, l' involucro protettivo non è più necessario e la galla cade a terra; ma anche in quest' ultimo semplice fatto noi scorgiamo un utile provvedimento, poichè sul terreno, tra le foglie ed il musco, essa resta meglio salvaguardata dagli attacchi degli animali parassiti o predatori, ma sopratutto nel terreno le condizioni di temperatura e di umidità sono le più favorevoli allo sviluppo del produttore, quando questi specialmente abbia, com' è il caso nostro, un lungo periodo larvale.

Ho ottenuto l' insetto produttore di questa galla soltanto ai primi di marzo di quest' anno, da galle che tenevo in allevamento nel mio laboratorio e raccolte, come già ho detto, nell' estate del 1900: l' insetto è quindi ap-

(1) In questo stadio la galla è piuttosto sferica che ovoide, succosa e quindi più tenera, ed il suo colorito esterno è verde, in causa dei cloroplasti che ancora sussistono nelle parti periferiche del suo tessuto.

(2) Lo staccarsi della galla dal ramo e dall' involgio peloso, corrisponde per l'Asia Minore alla fine di agosto e primi di settembre, ad una ventina di giorni più tardi per il Montenegro.

parso nel terzo anno. Avendolo studiato ed avendo riconosciuto una nuova specie del gen. *Cynips*, do di essa una breve descrizione diagnostica:

CYNIPS THEOPHRASTEA n. sp.

Colorito *generale rossiccio-mattone; nerastre sono invece le antenne, le suture pleuriche, le tibie ed i tarsi, particolarmente degli arti posteriori: l'addome nelle sue parti laterali è invece di un colorito giallo-miele.* Pubescenza *grigiastra, non molto fitta, diffusa su tutte le parti del corpo, ad eccezione dell'addome che è un po' pubescente soltanto nelle porzioni antero-laterali ed inferiormente da ciascun lato della spinula ventrale.* Mesonoto *percorso dall'avanti all'indietro da quattro solchi lineari, nerastri, due mediali, che dal margine anteriore giungono sin quasi a metà del mesonoto, gli altri due, uno per ciascun lato, che dal margine posteriore giungono anch'essi sino circa a metà.* Fossette *dello scutello oblique, nerastre, pubescenti.* Spinula *ventrale lunga circa 5 volte la propria larghezza, cigliata al disotto.* Antenne *di 14 articoli il 3° art. è più lungo del 4°, tutti gli altri uniformemente decrescenti in lunghezza ad eccezione dell'ultimo che è un po' più lungo del penultimo; i primi quattro articoli nei punti di articolazione hanno un anello di colorazione più chiara. — Questa specie emana, toccandola, un odore di cimice abbastanza sensibile, benchè non così sgradevole.* Statura *7-8 mm.*

Se questo insetto galligeno è assolutamente nuovo, non può dirsi lo stesso della sua galla di cui la prima notizia risale anzi a più di 2000 anni addietro, essendo stato Teofrasto il primo a ricordarla nella sua *Storia delle piante:* « Produce anche (la Quercia), scrive egli, (Lib. III, cap. VII, per altri è VIII), ciò che alcuni chiamano pelo che è una pallottolina lanosa e molle, cresciuta intorno ad un nucleo più duro, e che serve per lucignolo, essendochè arde bene..... » (1). La caratterizzazione che Teofrasto dà di questa galla è così chiara e precisa che non vi ha dubbio alcuno ch'essa non sia la galla della nostra *Cynips Theophrastea.* Il Kieffer, nella sua Monografia *Les Cynepides* (p. 200), trattando degli usi a cui hanno servito o servono le galle, cita il passo di Teofrasto relativo alla nostra galla, la cui lanugine era impiegata a farne dei lucignoli, senza poterla però naturalmente identi-

(1) Dalla recente volgarizzazione italiana di F. Ferri Mancini (Roma, Loescher, 1901). Il testo greco dice così: *Φύει δὲ καὶ τὸν ὑπ' ἐνίον καλούμενον πίλον· τοῦτο δ'ἐστὶ σφαιρίον ἐριῶδες μαλακὸν περὶ πυρηνίου σκληρότητα πεφυκὸς, ᾧ χρῶνται πρὸς τοὺς λύχνους· καίεται γαρ καλῶς.....* così tradotto in latino nella ottima edizione del Wimmer (Parigi, Firmin-Didot, 1866): *Gignit etiam quem pilum nonnulli vocant, globulum lanatum mollem circa corpusculum nucleaceum durius, quo in lucernarum luminibus utuntur, quia probe flagrat.....*

ficare (1). Soltanto egli opina possa trattarsi di una galla simile per il suo rivestimento lanoso a quella di un altro cinenottero della quercia, l'*Andricus ramuli*. Conosco perfettamente quest'ultima specie, nota anche a Malpighi, ma essa per moltissimi caratteri assai importanti si differenzia assolutamente dall'altra: nell'interno anzichè un nocciolo globoso, duro, vi hanno numerosissime piccole cellette, grosse quanto un grano di miglio, che facilmente si separano le une dalle altre ognuna delle quali possiede alla sommità un proprio ciuffo di peli; questi hanno poi, nella massa, un *habitus* affatto diverso ed osservati al microscopio sono unicellulari e di un diametro doppio o triplo degli altri. Essa si sviluppa poi esclusivamente dalle infiorescenze maschili.

Recentemente avendo avuta occasione di visitare le collezioni cecidologiche della R. Stazione di Patologia vegetale di Roma, trovai con mia sorpresa in un cartoccio un gran mucchio di una lanugine rossiccia proveniente dall'Erbario Cesati, raccolta su Quercie di Sardegna, che riconobbi tosto dover appartenere alle galle della *C. Theophrastea*; ed a sicura conferma della mia supposizione, rovistando tramezzo, vi ho potuti anche rinvenire due o tre dei noccioli interni caratteristici.

Questa singolare produzione cotonosa dell'Erbario cecidologico della R. Stazione patologica romana, è quella appunto di cui ebbe a trattare brevemente la marchesa Misciatelli in una seduta della Società botanica italiana, ancora nell'anno 1895 (2), come mi fu confermato anche dal prof. Cuboni, disorientò essa non poco le persone che ebbero ad osservarla, poichè chi la raccolse in Sardegna non ebbe forse l'opportunità di notare la parte principale, cioè il nocciolo interno, o ad esso non vi annesse importanza. Ho avuto anche l'anno passato degli esemplari completi di questa galla in comunicazione dal dott. Cecconi, che li ebbe da Mottola in provincia di Lecce, per cui questa specie ci appare oramai ad un tratto con una distribuzione geografica abbastanza estesa (Asia Minore, Montenegro, Leccese, Sardegna) ed è quindi probabile ch'essa debba in seguito rinvenirsi in molte altre località del bacino mediterraneo e dell'Oriente.

(1) Io pure ne ho fatta esperienza in una piccola lampadina ad olio, ed ho veduto che questa lanugine si presta discretamente come lucignolo, potendo sostituire il cotone; è possibilissimo perciò che, ai tempi di Teofrasto, le popolazioni meno esigenti della campagna, ne traessero a tale scopo profitto, in quelle località naturalmente nelle quali queste galle si mostravano più abbondanti.

(2) Bull. Soc. bot. it. an. 1895, processo verbale, pag. 109.

Zoologia. — *Il Mollusco contagioso negli Anfibi* (1). Nota di Pio Mingazzini, presentata dal Socio Todaro.

Il Mollusco contagioso si conosceva, fino ad ora, soltanto in pochissime specie appartenenti a due classi di Vertebrati, cioè ai Mammiferi (uomo, pecora) ed agli Uccelli (colombo, pollo). Non si era sospettato nemmeno che sarebbe stato possibile di riscontrare tale forma patologica nei Vertebrati inferiori, poichè si credeva limitata ai soli Vertebrati omotermi. Invece io ho potuto trovare, in una specie di Anfibio dei dintorni di Paternò in provincia di Catania, nel *Discoglossus pictus*, una malattia dell'epidermide, che si presenta sotto la forma di noduli relativamente grandi, la quale per i suoi caratteri macroscopici si deve classificare nella categoria del Mollusco contagioso.

I *Discoglossus* infetti provengono da certe località nelle quali sembra che la malattia si propaghi con relativa facilità, perchè un gran numero di esemplari, ivi raccolti in primavera, si presentava affetto da essa. Vi erano alcuni individui lievemente attaccati, con due o tre noduli soltanto sulla loro pelle, altri invece presentavano una notevole estensione del loro tegumento ricoperta dai noduli del Mollusco contagioso. Relativamente alla distribuzione di essi, può notarsi che il dorso è molto più frequentemente infetto del ventre, e presenta noduli molto più sviluppati ed appariscenti. Sebbene non si possa riscontrare nei diversi individui infetti una vera sede di predilezione della malattia, perchè tutta quanta la superficie del corpo può essere invasa dai noduli, tuttavia si può dire che essi trovansi con maggior frequenza all'estremità anteriore verso l'apice del muso, sui margini della bocca e in vicinanza degli occhi, e nell'estremità posteriore in tutta la regione sacrale, con un massimo in vicinanza dell'ano. Meno frequentemente vengono attaccati gli arti, però mi è riuscito di trovarne qualche caso, principalmente sugli anteriori, e non sono risparmiate neppure le dita, sul cui apice ho trovato talvolta dei noduli più o meno sviluppati.

I detti noduli, quando hanno raggiunto il loro completo sviluppo, sono piuttosto grandi; hanno un diametro di quattro a sei millimetri, sono rilevati sul resto del tegumento per un'altezza di circa un millimetro, hanno forma circolare od ovale più o meno regolare. Quando due o più si formano a poca distanza, vengono a toccarsi allorchè sono sviluppati, per un tratto maggiore o minore, lungo il quale il contorno diventa rettilineo. Se molti si sviluppano contemporaneamente in diretta vicinanza, possono fondersi in modo più o meno completo, formando così una superficie nodulare a contorno

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Zoologia nella R. Università di Messina.

esterno curvilineo, nella quale è possibile in certi casi di riconoscere il numero di noduli che l'hanno originata, mentre in altri casi è impossibile, a cagione della completa fusione avvenuta. Queste superficie possono essere notevolmente estese e raggiungono talvolta più di un centimetro quadrato.

Il colorito di questi noduli nell'animale vivente è di un bianco opale, alquanto trasparente; negli animali fissati con sublimato è invece bianco candido, spiccante molto sul fondo bruno scuro o bruno verdastro della pelle del dorso dell'animale; molto meno evidenti sono quelli del ventre, perchè il loro colore è simile a quello bianco giallastro della su perficie inferiore del *Discoglossus*.

La superficie dei detti noduli è pianeggiante; essi per conseguenza si presentano come tanti dischi rilevati sulla pelle dell'animale. Quando si osserva questa superficie sui noduli già fissati e conservati in alcool, vi si vedono delle screplature. Queste sono di due sorta: in alcuni casi sono alquanto profonde, si trovano sulla superficie dei noduli complessi risultanti dalla fusione di due o più noduli semplici e si debbono interpretare come i limiti più o meno evidenti dei noduli primitivi; in altri casi sono più superficiali e poco estese: partono dal centro del nodulo semplice senza raggiungere la periferia ed allora sono l'espressione di tratti di disfacimento della parte superficiale dell'epidermide del nodulo; altre volte infine queste screpolature sono limitate al centro del nodulo ed hanno l'aspetto di un punto infossato del disco stesso.

I *Discoglossus* infetti non presentano differenze fisiologiche ed anatomiche apprezzabili, dai sani; come questi saltano, nuotano e camminano con facilità e vivacità; i loro organi interni sono integri e ben conformati. Io credo che, eccettuati i casi gravissimi, nei quali i noduli per aver ricoperto ed alterato gran parte dell'epidermide, impediscono le funzioni importantissime che questa ha negli Anfibi, causando pertanto uno stato patologico generale grave ed anche la morte, gli animali possano nei casi più comuni, d'infezione leggiera o mediocre, compiere al pari dei sani le diverse funzioni in modo normale.

Esaminata al microscopio un poco di poltiglia ottenuta raschiando la superficie dei detti noduli nell'animale vivente, si vedono le cellule epidermiche normali ed alterate e molti globuli alquanto rifrangenti, caratteristici di questa forma di Mollusco contagioso, un po' irregolari e variabili di dimensione, molto più grossi in generale di quelli della stessa malattia degli Uccelli e dei Mammiferi. Però tale esame riesce nei Batraci comparativamente più difficile di quello che sia nei Vertebrati superiori, poichè nei primi il Mollusco non forma nel derma un'introflessione a modo di follicolo, con apertura crateriforme e con una cavità contenente miriadi di tali corpi, come avviene nei secondi, ma presenta una superficie pianeggiante, con le piccole screpolature superiormente descritte, nelle quali possono trovarsi piccoli accumuli di tali corpi.

I preparati permanenti ottenuti con la triplice colorazione azzurra rossa e gialla, data dall' ematossilina Ehrlich, carminio litico *in toto* ed acido picrico sciolto o in xilolo od in essenza di trementina nelle sezioni, secondo il metodo già da me altre volte pubblicato, confermano il reperto delle osservazioni allo stato fresco, e completano le conoscenze intorno a questa particolare forma patologica dell' epidermide del *Discoglossus.* Le sezioni furono praticate trasversalmente ai noduli presi da diverse parti del corpo, come l' apice del muso, la regione orbitaria esterna, la regione dorsale, le regioni laterale e addominale, tutte dettero risultati identici. I parassiti risultarono colorati in modo differente: i giovani in azzurro intenso dall' ematossilina, gli adulti in rosso dal carminio litico e quelli più maturi, che si trovano nello strato superficiale o anche talvolta liberi sulla superficie nelle screpolature dell' epidermide, poco tinti dai due precedenti colori, ma assumenti una debole colorazione gialla dall' acido picrico. I tessuti normali dell' Anfibio seguono le leggi di colorabilità, secondo quanto produce generalmente il detto metodo: cioè l' epitelio si colora in azzurro, il connettivo in rosso vivo, i globuli sanguigni col plasma giallo e col nucleo in azzurro e via dicendo.

Sede della infezione è esclusivamente l' epidermide; anzi essa non viene in generale affetta in tutte le sue parti, poichè le glandole che ne sono una dipendenza, non di rado vengono risparmiate dal parassita e si trovano normalmente costituite al disotto del nodulo; ma in casi gravi anche diverse fra esse vengono invase dal parassita e sono riempite dalla proliferazione epiteliale che vi produce la sua presenza. Lo strato dermico sottostante, i vasi sanguigni ed i muscoli striati, che in talune regioni possono trovarsi molto vicini all' epidermide, sono generalmente di aspetto normale. Soltanto nei noduli molto sviluppati si può osservare una leggiera proliferazione del connettivo dermico interglandolare, che a forma di zaffi rialza la epidermide infetta e contribuisce a fare aumentare la rilevatezza del nodulo. In gran parte però anche nei noduli maggiori il rilievo è prodotto a spese dello strato epidermico, il quale, in seguito alla presenza del parassita, si ipertrofizza, e prolifera notevolmente, producendo l' accumulo speciale di cellule epiteliali e parassiti che caratterizza essenzialmente il nodulo.

Le sezioni eseguite sia su noduli molto grossi ed a completa evoluzione, sia su quelli assai piccoli, dimostrano che la neoformazione epiteliale è sviluppata secondo la superficie dell'epidermide e non mostra alcuna tendenza ad approfondirsi od invaginarsi nel derma sottostante. È questa una notevole differenza con tutte le altre forme di Mollusco contagioso finora conosciute, e si può indicare come una fase primitiva di tale lesione. È interessante di notare il fatto che questa forma primordiale di Mollusco si incontra appunto in una specie appartenente ad una classe di Vertebrati poco elevata, quale è quella degli Anfibi, mentre in specie appartenenti a classi superiori come negli Uccelli e nei Mammiferi, essa si presenta con caratteri più complessi.

Forse ciò sarà in parte da attribuirsi all' *habitat* diverso dei varî ospitatori, perchè gli uni vivono all' aria, ed i corpuscoli maturi del Mollusco verrebbero facilmente a soffrire il disseccamento se non fossero conservati in un ambiente umido, come la cavità del nodulo del Mollusco dei Mammiferi e degli Uccelli, mentre gli altri vivono prevalentemente nell' acqua; ma anche ammessa una tale ragione, non si può escludere quella propria della maggiore semplicità della forma patologica dovuta alle differenze specifiche del parassita e dell' ospitatore. Un tale fatto si verifica del resto anche in altre malattie parassitarie comuni a differenti classi dello stesso tipo animale.

Il nodulo, quando è molto sviluppato, si presenta limitato nettamente dal resto dell' epidermide: si vede alle due estremità della sezione un brusco rialzo dello strato epidermico, il quale va poi leggermente aumentando verso la parte centrale e presenta sulla superficie libera un contorno variamente sfrangiato, dovuto alle sfaldature irregolari di questa parte dell' epitelio, mentre nell' epidermide normale vi è un limite rettilineo netto, perchè essa si sfalda a strati continui piuttosto regolari. La differenza di altezza fra lo strato sano e lo strato infetto dell' epidermide è notevolissima; nei noduli molto sviluppati lo spessore dell' epidermide infetta è da 15 a 20 volte superiore a quello dello strato sano. Nei noduli meno sviluppati il distacco fra la parte sana e quella malata è meno brusco e si può notare un graduale rialzo dall' una all' altra.

Tutta la disposizione regolare dell' epitelio normale viene ad essere alterata dalla presenza del parassita e tale alterazione è in ragione diretta dello sviluppo del nodulo. Le cellule dei diversi strati vengono spostate, deformate, alterate nella loro costituzione per opera dei numerosissimi parassiti sparsi o nel loro corpo o fra esse, i quali in generale sono più o meno sviluppati, come succede nelle altre forme di Mollusco, a seconda dello strato più o meno profondo dell' epidermide nel quale risiedono. Le forme giovani si trovano nelle cellule più profonde e prevalentemente nello strato degli elementi cilindrici, le più avanzate nello sviluppo e le mature negli strati sempre più superficiali; però non vi ha una legge molto costante in ciò, come avviene nel Mollusco dei Vertebrati superiori, e spesso si osservano forme molto sviluppate del parassita anche negli strati più profondi, come pure si riscontrano forme abbastanza giovani verso gli strati superficiali.

Non tutte le cellule della neoformazione epiteliale vengono invase dai parassiti, anzi molte fra esse ne sono prive; tuttavia sono alterate in parte nella forma, in parte nella costituzione. Nei noduli molto sviluppati lo strato delle cellule cilindriche viene modificato nel senso che i loro nuclei non hanno più la regolare disposizione a palizzata, come nell' epitelio normale, col loro maggior diametro disposto in direzione perpendicolare alla superficie dell' epidermide, ma invece lo presentano parallelo od obliquo a questo, e sono qua e colà più numerose, mentre altrove sono assai più rade che nel-

l'epitelio normale. Soltanto gli elementi entro i quali un parassita si sviluppa vengono ben presto a morire, degenerando con grandissima rapidità il loro protoplasma e il nucleo; tutti gli altri rimangono in vita benchè siano compressi e deformati parzialmente sia dagli elementi vicini, sia dai parassiti, col loro enorme accrescimento.

Il parassita nei primi stadi della sua esistenza intraepiteliale si presenta assai piccolo, di forma sferica del diametro medio di 3-5 μ, è poco colorabile coll'ematossilina, ha un protoplasma omogeneo, alquanto rifrangente, e si può osservare qua e là nelle cellule più profonde dell'epidermide. Raggiunge ben presto maggiori dimensioni ed acquista allora la grossezza, ed in generale anche la forma, dei nuclei dell'epidermide del *Discoglossus*, ma non di rado mantiene la figura sferoidale; il suo protoplasma comincia a mostrare dei vacuoli, ma colla colorazione da me adoperata non presenta traccia di nucleo. Si tinge fortemente in azzurro coll'ematossolina, ma si distingue facilmente dai nuclei dell'epitelio perchè non presenta il caratteristico reticolo cromatico, tinto di azzurro scuro dall'ematossilina, spiccante assai bene sul fondo chiaro occupato dal succo nucleare. La cellula epiteliale, entro cui si trova incluso, degenera profondamente, ed il protoplasma alterato di questa in parte si trasforma in un liquido jalino che attornia come un alone chiaro il parassita, in parte rimane come una massa residuale attorno al nucleo, che si presenta come un piccolo corpicciolo colorabile coll'ematossilina, non più contenente il reticolo cromatico, situato in una delle estremità dell'elemento. Questo stato perdura per un certo tempo finchè non si vede più traccia della cellula che dapprima includeva il parassita e questo rimane avvolto fino ai suoi stadi più evoluti da un alone chiaro. Accrescendosi ancora maggiormente, il parassita prende in ogni caso una figura sferica, sferoidale o irregolare a contorni curvilinei, sebbene vi siano pure delle forme che anche quando sono mediocremente sviluppate conservano per lungo tempo una figura bastonciniforme e sono molto cromatofile per l'ematossilina. Allorchè il parassita però ha raggiunto determinate dimensioni, ed in generale allorchè in uno od in entrambi i diametri supera i 15 μ, perde la sua proprietà cromatofila per l'ematossilina ed acquista quella per il carminio litico, sicchè si colora dapprima in viola e le forme maggiori in rosso sempre più vivo. Il suo protoplasma si vacuolizza sempre in grado maggiore. In questo stato subisce generalmente una frammentazione irregolare in masse di forma svariatissima, le quali rimangono però sempre vicine, in modo da mostrare la figura del parassita che le ha originate; esse spesso lasciano fra loro spazî più o meno considerevoli, occupati da liquido jalino, talvolta assai stretti altre volte notevolmente grandi ed irregolari, posti a centro o verso la periferia. Infine, avendo il parassita raggiunto il *maximum* dello sviluppo intraepiteliale, che può giungere a dimensioni veramente considerevoli, come ad es. μ 104 × μ 64, diviene maturo, perde la sua cromatofilia per il carminio e assume una tinta

violacea pallidissima, la quale si cambia in giallo più o meno leggiero, se si trattano le sezioni per un tempo abbastanza corto (ad es. 5-10 minuti) con acido picrico sciolto in essenza di trementina.

Se si confronta questa forma di parassita del Mollusco contagioso con quelle che già si conoscono, dei Mammiferi e degli Uccelli, si notano le seguenti caratteristiche differenziali:

1° Il parassita del Mollusco contagioso dei vertebrati superiori determina un'infezione i cui limiti sono meglio circoscritti di quella degli Anfibi, perchè essa si svolge in un infossamento dell'epidermide, nella cui cavità cadono le forme adulte, mentre negli Anfibi queste si spargono nell'ambiente non appena sono giunte a maturità;

2° Nei vertebrati superiori il parassita determina un'infezione più completa dell'epitelio, perchè quasi tutte le cellule della neoformazione epiteliale sono invase dal parassita, mentre negli Anfibi vi sono molte cellule del nodulo non infette;

3° Il parassita del Mollusco contagioso dei vertebrati superiori, allorchè raggiunge il completo sviluppo, ha dimensioni e forma più costanti di quello degli Anfibi, e ciò probabilmente è dovuto al fatto che i parassiti del Mollusco contagioso dei vertebrati superiori rappresentano specie più evolate e più adatte al parassitismo di quella degli Anfibi. Le dimensioni del parassita adulto dei vertebrati superiori sono molto minori di quelle del parassita del *Discoglossus*; infatti le misure dei corpi del Mollusco contagioso dell'uomo, nei preparati fissati e colorati, danno le seguenti dimensioni medie: μ 27 × μ 30; quelle del piccione μ 27 × μ 36, mentre un gran numero di quelli del *Discoglossus* supera i 70 μ e non di rado i 100 μ.

CORRISPONDENZA

Il Vicepresidente Blaserna dà comunicazione di un invito dell'Università di Oxford per la celebrazione del terzo centenario della Biblioteca Bodleiana; e l'Accademia delibera di farsi rappresentare alla solenne cerimonia.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 aprile 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. Per enunciare sotto forma semplice il problema che tratto nella presente Nota, premetto le definizioni seguenti. Si consideri una superficie S flessibile ed inestendibile. Per ogni deformazione della S cangiano le sue linee assintotiche (reali od immaginarie); diciamo assintotiche *attuali* le effettive assintotiche della S, nella sua configurazione attuale, ed assintotiche *virtuali* ogni sistema di linee di S suscettibili di diventare assintotiche dopo una conveniente deformazione. Come è ben noto, dato un sistema di assintotiche virtuali, la deformazione corrispondente che deve subire la S, per renderle attuali, è pienamente determinata. Ciò premesso, ecco l'enunciato del problema di cui ci vogliamo occupare: *Trovare tutte le coppie di superficie* S, S_1 *corrispondenti l'una all'altra punto per punto, in guisa che si corrispondano le loro assintotiche attuali e inoltre a qualsiasi sistema di assintotiche virtuali di* S *corrisponda un sistema di assintotiche virtuali sopra* S_1.

Se una tale coppia di superficie esisterà, è chiaro che ogni deformazione della S trarrà seco una corrispondente deformazione della S_1, cosicchè i due problemi di trovare tutte le superficie applicabili sopra S o quelle applicabili sopra S_1 saranno perfettamente equivalenti. Diremo, per abbreviare, che le due superficie S, S_1 sono *coniugate in deformazione.*

Se le due superficie S, S_1 hanno curvatura positiva, le loro linee assintotiche, attuali o virtuali, sono immaginarie. Volendo anche in questo caso enunciare il problema sotto forma reale, basterà parlare invece della corrispondenza dei *sistemi coniugati* di S a quelli di S_1. Allora, per qualunque deformazione della S, vi ha uno ed un solo sistema attualmente coniugato (sempre reale) che si conserva coniugato dopo la deformazione; lo diremo perciò un sistema coniugato *permanente*. E potremo quindi enunciare il problema sotto l'altra forma: *Trovare le coppie di superficie* S, S_1 *che si corrispondono per sistemi coniugati, e tali di più che ad ogni sistema coniugato permanente di* S *corrisponda un sistema coniugato permanente sopra* S_1.

Avvi una soluzione ovvia del problema, che trascuriamo nel seguito. Essa si ottiene associando ad una superficie qualunque S una sua omotetica S_1.

2. Per trattare analiticamente il problema enunciato, riferiamo le due superficie supposte S, S_1 ad un sistema di coordinate curvilinee u, v, e siano

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$(1^*) \qquad ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1 dv^2$$

le rispettive espressioni dei quadrati dei loro elementi lineari. Ogni deformazione della S è individuata [1] dalla relativa seconda forma quadratica fondamentale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

La nostra ipotesi equivale a dire che deve esistere ogni volta una seconda forma fondamentale corrispondente per S_1

$$D_1 du^2 + 2D_1'\,du\,dv + D_1''\,dv^2,$$

tale che sussistano le proporzioni

$$D_1 : D_1' : D_1'' = D : D' : D''.$$

Pei calcoli seguenti conviene meglio sostituire a D, D', D'' le quantità

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

e analogamente a D_1, D_1', D_1'':

$$\Delta_1 = \frac{D_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}, \qquad \Delta_1' = \frac{D_1'}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}, \qquad \Delta_1'' = \frac{D_1''}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}.$$

[1] *Lezioni di Geometria differenziale*, cap. IV.

Si sa allora (1) che $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ sono unicamente vincolate dalla equazione di Gauss

$$\mathcal{A}\mathcal{A}'' - \mathcal{A}'^2 = \mathrm{K}, \tag{2}$$

indicando con K la curvatura totale di S, e dalle due equazioni di Codazzi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathcal{A}'}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathcal{A} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathcal{A}' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathcal{A}'' = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{A}''}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathcal{A}'}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathcal{A} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathcal{A}' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathcal{A}'' = 0, \end{cases} \tag{3}$$

i simboli di Christoffel $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ ecc. essendo costruiti per la prima forma quadratica fondamentale (1) di S.

Si ha per ipotesi

$$\mathcal{A}_1 = \lambda \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}'_1 = \lambda \mathcal{A}', \quad \mathcal{A}''_1 = \lambda \mathcal{A}'',$$

dove λ indica un conveniente fattore di proporzionalità. Intanto dalla corrispondente equazione di Gauss

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}''_1 - \mathcal{A}'^2_1 = \mathrm{K}_1$$

si trae per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = \frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}. \tag{4}$$

Questo fattore λ serba dunque invariato il suo valore per qualunqne deformazione simultanea di S, S_1.

Ora se scriviamo le equazioni (3) di Codazzi per la S e vi sottraghiamo ordinatamente le (3) stesse moltiplicate per λ, ne deduciamo le due equazioni di condizione

$$\begin{cases} \mathcal{A} \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \mathcal{A}' \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \left[\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \lambda \mathcal{A} + 2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 \right] \lambda \mathcal{A}' + \\ \qquad + \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \lambda \mathcal{A}'' = 0 \\ \mathcal{A}'' \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \mathcal{A}' \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \left[\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \lambda \mathcal{A} + 2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 \right] \lambda \mathcal{A}' + \\ \qquad + \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \lambda \mathcal{A}'' = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Siccome λ non cangia di valore, queste sono equazioni lineari omogenee in $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ che debbono aver luogo, per ipotesi, in tutte le flessioni di S, cioè per tutte le terne di valori di $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ soddisfacenti alle (2), (3).

(1) *Lezioni* ecc., pag. 90-91.

Segue di qui che le (5) debbono risolversi in identità [1], ciò che dà luogo alle 6 equazioni di condizione:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u} = 2\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1\right], & \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 \\ \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1, & \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v} = 2\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1\right] \\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1. \end{cases}$$

Osserviamo che se si supponesse costante λ, ossia costante il rapporto delle due curvature, seguirebbe dalle (6) l'eguaglianza dei valori dei corrispondenti simboli di Christoffel per S, S_1. Ma allora dalle formole (II) a pag. 51 delle Lezioni si deduce subito che saremmo nel caso ovvio escluso di due superficie omotetiche.

3. Paragonando fra loro le (6) delle due prime righe e aggiungendo le formole della terza riga, vediamo intanto che debbono essere soddisfatte le quattro condizioni seguenti:

$$(7)\quad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1 - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 \\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1. \end{cases}$$

Queste hanno un notevole significato geometrico, che si trova ricorrendo alla equazione differenziale delle geodetiche sopra S, scritta sotto la forma a pag. 150 delle Lezioni:

$$(8)\quad v'' - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} v'^3 + \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right] v'^2 + \left[2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right] v' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Qui è supposta, lungo la geodetica, espressa v in funzione di u, e gli accenti indicano derivazione rapporto a u. Le (7) esprimono che la (8) è la stessa costruita per S o per S_1, e per ciò alle geodetiche di S debbono corrispondere le geodetiche di S_1, o come diciamo per brevità: *la rappresentazione di* S *sopra* S_1 *deve essere una rappresentazione geodetica.*

Supponiamo ora inversamente che le superficie S, S_1 si corrispondano punto per punto in guisa che siano conservate le linee geodetiche, ed insieme le linee assintotiche attuali, e dimostriamo che a qualunque sistema d'assintotiche virtuali sopra S corrisponderà ancora sopra S_1 un sistema della stessa natura.

[1] Per la dimostrazione rigorosa v. il § 2 della mia Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Annali di Matematica, Serie 3ª, T. III, 1899).

Indichino infatti Δ_0, Δ'_0, Δ''_0, i valori di Δ, Δ', Δ'' per la configurazione attuale di S. I calcoli del § 2 dimostrano che Δ_0, Δ'_0, Δ''_0, soddisferanno alle (5), avendo λ^2 il valore (4). Ma poichè d'altra parte la rappresentazione di S sopra S_1 è geodetica, sussisteranno le (7) e si avrà quindi

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1$$
$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 .$$

Indicando con A il valore comune delle due prime quantità, con B quello delle due seconde, le equazioni (5) per Δ_0, , Δ'_0, Δ''_0 si scrivono

$$\Delta_0 B - \Delta'_0 A = 0 , \quad -\Delta'_0 B + \Delta''_0 A = 0.$$

Ma siccome il determinante

$$\Delta_0 \Delta''_0 - \Delta'^2_0 = K$$

non è nullo, risulta di qui $A = 0$, $B = 0$, cioè sono soddisfatte tutte le (6) e le superficie S , S_1 sono quindi coniugate in deformazione, c. d. d.

Possiamo compendiare i risultati ottenuti nel teorema: *Affinchè sopra due superficie* S , S_1, *che si corrispondono con conservazione delle linee assintotiche attuali, si corrispondano altresì tutte le assintotiche virtuali, è necessario e sufficiente che la rappresentazione di* S *sopra* S_1 *conservi le linee geodetiche.*

4. Colle considerazioni esposte sopra il problema enunciato viene ridotto alla questione seguente: *Trovare tutte le coppie di superficie* S, S_1 *che si corrispondono con conservazione delle linee geodetiche e dei sistemi coniugati.*

È ben noto come il problema di trovare le coppie di superficie rappresentabili geodeticamente l'una sull'altra (o meglio i loro ds^2) è stato risoluto dal Dini [1].

L'una e l'altra superficie (escluso il caso ovvio dell'omotetia) debbono appartenere alla classe di Liouville, e più precisamente i due sistemi ortogonali che si conservano nella rappresentazione sono costituiti da due sistemi isotermi di ellissi e di iperbole geodetiche. Qui mi limiterò a trattare il caso particolare in cui la prima e quindi anche la seconda superficie di Liouville sia applicabile sopra una superficie di rotazione, ed il detto sistema isotermo si riduca ai meridiani e paralleli.

Si troverà così una classe effettiva di superficie di rotazione, dipendenti da due costanti arbitrarie, che risolve il nostro problema. Esse possono iden-

[1] *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie sopra un'altra* (Annali di matematica, t. III, 1869). Cf. anche Darboux, *Leçons*, III[e] Partie, pag. 47.

tificarsi con quadriche di rotazione (reali od immaginarie), ovvero colle evolute delle superficie applicabili sulla sfera.

Poniamo l'elemento lineare della prima superficie S sotto la forma

$$(a)\quad ds^2 = r^2\,(du^2 + dv^2),$$

dove r è funzione della sola u. Risulta allora dalle citate ricerche del Dini (V. § 5 della Memoria) che l'elemento lineare della S_1, rappresentata geodeticamente sopra S, avrà la forma

$$ds_1^2 = \frac{r^2}{b(ar^2+b)^2}\,du^2 + \frac{r^2\,dv^2}{ar^2+b}.$$

Delle due costanti arbitrarie a, b la seconda, limitandoci come intendiamo di fare a superficie ed a rappresentazioni reali, deve essere positiva. Sostituendo alla S_1 una sua omotetica possiamo rendere $b = 1$, senza alterare la generalità; così avremo:

$$(a^*)\qquad ds_1^2 = \frac{r^2}{(ar^2+1)^2}\,du^2 + \frac{r^2}{ar^2+1}\,dv^2.$$

Si osservi ora in generale che per un ds^2 della forma

$$ds = \alpha^2\,du^2 + \beta^2\,dv^2$$

con α, β *funzioni della sola* u, i valori dei simboli di Christoffel sono i seguenti:

$$(9)\qquad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{\alpha'}{\alpha}, & \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0, & \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -\dfrac{\beta\beta'}{\alpha^2} \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0, & \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{\beta'}{\beta}, & \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = 0, \end{cases}$$

gli accenti indicando derivazione rapporto ad u. I valori di α, β per la S sono

$$\alpha = \beta = r$$

e per la S_1

$$\alpha_1 = \frac{r}{ar^2+1}, \quad \beta_1 = \frac{r}{\sqrt{ar^2+1}}.$$

Si verifica subito colle (9) che le condizioni (7) sono soddisfatte, ciò che doveva essere perchè la rappresentazione di S sopra S_1 è geodetica. Se calcoliamo poi le curvature K, K_1, abbiamo

$$-K = \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)' = \frac{1}{r^2}\left(\frac{r'}{r}\right)'$$

$$-K_1 = \frac{1}{\alpha_1\beta_1}\left(\frac{\beta_1'}{\alpha_1}\right)' = \frac{1}{r^2}\left\{(ar^2+1)\left(\frac{r'}{r}\right)' - ar'^2\right\},$$

e la (4) ci dà quindi per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = ar^2 + 1 - \frac{ar'^2}{\left(\frac{r'}{r}\right)'}. \tag{10}$$

Ora basta aggiungere p. es., le due seconde (6), che danno

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} \\ \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 0\,, \end{cases} \tag{11}$$

e soddisfatte queste, insieme alla (10), la rappresentazione di S sopra S_1, quando sieno conformate convenientemente a superficie di rotazione, conserverà altresì le linee assintotiche (o i sistemi coniugati).

Dalle (11) integrando abbiamo

$$\lambda = c\,\frac{\alpha}{\alpha_1} = c(ar^2 + 1)\,,$$

indicando con c una nuova costante arbitraria. Confrontando colla (10), si ha dunque, per determinare r, l'equazione differenziale

$$\left(\frac{r'}{r}\right)' = \frac{ar'^2}{(ar^2+1)[1 - c^2(ar^2+1)]}; \tag{12}$$

tutte le superficie di rotazione che la soddisfano danno altrettante soluzioni del problema.

Per integrare la (12) poniamo

$$\mathrm{T} = \frac{r'}{r}\,,$$

onde si può scrivere

$$\frac{d\mathrm{T}}{dr} = \frac{a\mathrm{T}r}{(ar^2+1)[1 - c^2(ar^2+1)]}$$

e quindi integrando

$$\mathrm{T}^2 = \frac{ar^2+1}{h[1 - c^2(ar^2+1)]}\,,$$

essendo h una nuova costante. Abbiamo dunque

$$rdu = \sqrt{\frac{h[1 - c^2(ar^2+1)]}{ar^2+1}}\,dr \tag{13}$$

e con una nuova quadratura si avrebbe r in funzione di u. Ma è inutile proseguire l'integrazione, poichè se sostituiamo nella (a) per rdu il valore pre-

cedente, otteniamo già per il ds^2 della superficie S la forma perfettamente determinata:

$$(A) \qquad ds^2 = \frac{h[1 - c^2(ar^2 + 1)]}{ar^2 + 1} dr^2 + r^2 dv^2 .$$

Osserviamo che se in questa cangiamo r in kr (k costante) ciò equivale a moltiplicare simultaneamente le costanti a, h per k^2; ne segue che, senza alterare la superficie, possiamo prendere il valore assoluto di una di queste costanti $= 1$.

Le superficie di rotazione (A) che risolvono il problema dipendono dunque, come si era enunciato, da due costanti arbitrarie essenziali. Consideriamo ora la seconda superficie S_1, sulla quale la S, data dalla (A), è rappresentata geodeticamente con conservazione dei sistemi coniugati. Essa avrà per la (a^*) e per la (13) l'elemento lineare

$$ds_1^2 = \frac{h[1 - c^2(ar^2 + 1)]}{(ar^2 + 1)^3} dr^2 + \frac{r^2}{ar^2 + 1} dv^2 .$$

È chiaro *a priori* che questa forma di ds^2 deve rientrare nella (A) stessa, dove soltanto saranno cangiati i valori delle costanti a, c, h. Ed in effetto, se poniamo

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{ar^2 + 1}} ,$$

la precedente diventa:

$$(A^*) \qquad ds_1^2 = \frac{-hc^2\left[1 - \frac{1}{c^2}(1 - ar_1^2)\right]}{1 - ar_1^2} dr_1^2 + r_1^2 dv^2 .$$

Come si vede, è questa la (A) stessa, cangiate a, c, h in

$$(14) \qquad a_1 = -a , \quad c_1 = \frac{1}{c} , \quad h_1 = -hc^2 .$$

5. Prendasi ora di una delle nostre superficie della classe (A) la superficie *complementare* [1] S rispetto alle geodetiche v deformate dei meridiani. Dimostreremo che questa complementare S appartiene alla sua volta alla classe (A).

Quando l'elemento lineare di una superficie S applicabile sopra una perficie di rotazione è posto sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 \quad (r = \varphi(u),$$

[1] *Lezioni* ecc., pag. 131.

quello della complementare S è dato da

$$\overline{ds}^2 = r^2\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv_1^2\,,$$

dove

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{dr}{du}\right)}\ (1).$$

Nel caso nostro abbiamo dalla (A)

$$\varrho = \sqrt{\frac{ar^2+1}{h[1-c^2(ar^2+1)]}},$$

e quindi risulta

$$\overline{ds}^2 = \frac{\frac{1}{ac^2}\left[1-c^2\left(1+\frac{\varrho^2}{hc^2}\right)\right]}{1+\frac{\varrho^2}{hc^2}}\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv_1^2\,.$$

Questa è la forma stessa (A), cangiate a, c, h in

$$\bar{a} = \frac{1}{hc^2}\,,\quad \bar{c} = c\,,\quad \bar{h} = \frac{1}{ac^2}\,,$$

ovvero moltiplicando $\bar{a}$, $\bar{h}$ per c^2 (col cangiare ϱ in $c\varrho$):

$$\bar{a} = \frac{1}{h}\,,\quad \bar{c} = c\,,\quad \bar{h} = \frac{1}{a}\,. \tag{5}$$

Se si confrontano le (14), (15) si vede subito che le operazioni rappretate da queste formole sono fra loro permutabili. Ed il significato geometrico di questo fatto sta in ciò che prendendo delle due superficie S, S_1 della classe (A), coniugate in deformazione, le rispettive complementari S, $\overline{S}_1$, queste sono nuovamente coniugate fra loro in deformazione. Per convincersene basta ricordare che sopra S, $\overline{S}$, come sopra S_1, $\overline{S}_1$, si corrispondono le assintotiche e per ciò intanto quelle di $\overline{S}$, $\overline{S}_1$. In secondo luogo si corrispondono sopra $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ le deformate dei paralleli ed egualmente le deformate dei meridiani, poichè queste corrispondono a quelle linee di S, S_1 che sono a tangenti coniugate colle rispettive deformate dei meridiani. Abbiamo dunque il teorema: *Se due superficie applicabili sopra superficie di rotazione si corrispondono geodeticamente e per sistemi coniugati, lo stesso accade delle loro due complementari.*

6. Un caso particolare notevole di coppie di superficie S, S_1 della classe (A) coniugate in deformazione si ottiene supponendo la costante $c = 1$;

(1) Veggasi la seconda edizione delle mie *Lezioni*, vol. I, pag. 296.

allora la (A) diventa

$$ds^2 = \frac{-ahr^2}{ar^2+1}dr^2 + r^2dv^2 .$$

Le due costanti a, h debbono qui avere segno contrario e senza alterare la generalità potremo fare

$$\alpha) \quad a = -1, \quad h = R^2$$

ovvero

$$\beta) \quad a = +1, \quad h = -R^2.$$

Così ponendo

$$u = \sqrt{1 \pm r^2},$$

avremo nel primo caso

$$\alpha^*) \quad ds^2 = R^2 \{du^2 + (u^2 - 1)\, dv^2\}$$

e nel secondo

$$\beta^*) \quad ds^2 = R^2 \{du^2 + (1 - u^2)\, dv^2\}.$$

L'uno e l'altro elemento lineare appartengono ad una falda dell'evoluta di una superficie a curvatura costante positiva $= \frac{1}{R^2}$, o, ciò che è lo stesso pel teorema di Bonnet, di una superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{R}$.

Applicando i risultati sopra ottenuti, avremo due coppie (S, $\bar{S}$), (S_1, $\bar{S}_1$) di tali superficie, ciascuna coppia formando l'evoluta completa di una superficie a curvatura media costante. In quale relazione fra loro stanno le due evolventi Σ, Σ_1 a curvatura media costante? Senza entrare qui nei calcoli relativi, diciamo che la Σ, Σ_1 son legate dalla trasformazione involutoria di Hazzidakis (1), cioè Σ, Σ_1 sono applicabili l'una sull'altra con conservazione delle linee di curvatura ed inversione dei raggi principali di curvatura. Inversamente siano Σ, Σ_1 due superficie a curvatura media costante, trasformate l'una dell'altra per trasformazione di Hazzidakis, e siano (S, $\bar{S}$) le due falde della evoluta di Σ e (S_1, $\bar{S}_1$) quelle di Σ_1. *Sopra due falde omologhe* S, S_1, *ovvero* $\bar{S}$, $\bar{S}_1$, *si corrisponderanno non solo i sistemi coniugati, ma anche le linee geodetiche.* Questa proprietà della trasformazione di Hazzidakis non sembra sia stata fin qui osservata.

7. Lasciando ora da parte il caso $c = 1$, già sopra considerato, proponiamoci di trovare la forma della curva meridiana per la superficie di rota- (A). Sia

$$z = \Psi(\varrho)$$

l'equazione del meridiano, l'asse di rotazione essendo l'asse delle z ed indicando ϱ il raggio del parallelo. Per determinare $\Psi(\varrho)$ dobbiamo identificare la (A) con

$$ds^2 = \left(1 + \Psi'^2(\varrho)\right)d\varrho^2 + \lambda^2 \varrho^2 dv^2,$$

(1) *Lezioni*, pag. 447.

ponendo $r = \lambda\varrho$ (λ costante). Ne deduciamo

$$\psi'^2(\varrho) = \frac{[\lambda^2 h - (1 + \lambda^2 c^2 h)] - a\lambda^2\varrho^2(1 + \lambda^2 c^2 h)}{a\lambda^2\varrho^2 + 1},$$

e se disponiamo di λ in guisa da annullare nel numeratore del secondo membro il termine indipendente da ϱ, avremo per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = \frac{1}{h(1 - c^2)},$$

che è finito essendo qui $c^2 \neq 1$.

Integrando abbiamo allora

$$z = \psi(\varrho) = \sqrt{-\frac{h}{a}}\sqrt{a\lambda^2\varrho^2 + 1},$$

onde per la superficie di rotazione (A), quando $c^2 \neq 1$, si può prendere una quadrica, che sarà del resto reale od immaginaria a seconda dei valori delle costanti.

Arrestandoci al caso reale, dovrà essere

$$h(1 - c^2) > 0$$

e le costanti a, h dovranno avere segno contrario. Se supponiamo dapprima a negativa, h positiva, potremo fare senza nuocere alla generalità

$$a = -1, \quad h = k^2, \quad \lambda^2 = \frac{1}{k^2(1 - c^2)}$$

e la costante c^2 dovrà essere naturalmente < 1. La curva meridiana è quindi l'ellisse

$$\frac{z^2}{k^2} + \frac{\varrho^2}{k^2(1 - c^2)} = 1$$

e la quadrica è un ellissoide di rotazione allungato, i cui semi-assi principale e secondario hanno le lunghezze

$$A = k, \quad B = k\sqrt{1 - c^2}.$$

Per ottenere l'altra quadrica di rotazione reale basta passare dall'attuale superficie S alla coniugata S_1 in deformazione, ciò che dà per le (14)

$$a_1 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{c}, \quad h_1 = -k^2c^2.$$

La curva meridiana ha per equazione

$$\frac{z^2}{k^2} - \frac{\varrho^2}{k^2\left(\frac{1}{c^2} - 1\right)} = 1;$$

la quadrica è adunque un iperboloide di rotazione a due falde che ha per lunghezza A, C dei semi-assi principale e secondario

$$A = k, \quad C = k\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$$

Effettivamente è facile accertarsi che fra i punti dell' ellissoide e dell' iperboloide col medesimo semi-asse principale $= A$ e coi semi-assi secondarî B, C legati dalla relazione

$$\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} = \frac{1}{A^2}$$

si può stabilire una corrispondenza geodetica che conservi i sistemi coniugati.

Queste due quadriche sono dunque coniugate in deformazione.

Siano ora S, S_1 due loro rispettive deformate simultanee. I teoremi di Guichard ci insegnano che se si fa rotolare l' ellissoide sulla superficie applicabile S o l' iperboloide sulla superficie applicabile S_1, ogni volta ciascun fuoco descriverà una superficie di curvatura media costante $= \frac{1}{A}$. Due tali superficie Σ, Σ_1 a curvatura media costante sono nuovamente trasformate l' una dell' altra per trasformazione di Hazzidakis.

A queste proprietà dell' ellissoide ed iperboloide di Guichard coniugati in deformazione ero già in parte pervenuto nella Memoria citata sopra (§ 22), ed è appunto lo studio di queste proprietà che mi ha indotto a trattare il problema generale che forma l' oggetto di questa Nota.

Astronomia. — *Osservazioni del nuovo pianetino HU 1902 fatte coll' equatoriale di 38 cm.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Le osservazioni furono fatte per mezzo del nuovo oggettivo di 38 cm. di apertura libera, donato all' osservatorio dal comm. Enrico Santoro, della cui munificenza è ben memore anche la nostra Accademia. Il dono derivò dai buoni uffici del prof. Tacchini.

L' oggettivo fu costruito dalla celebre casa Steinheil di Monaco ed è riuscito eccellente; esso potrà in avvenire rendere servigi alla scienza. Anche gli oculari vennero commessi alla medesima casa con piena mia soddisfazione. La rigorosa distanza focale è m. 5,248, e però un giro della vite del micrometro filare di Merz, che apparteneva all' antico oggettivo, mi risultò, da numerose osservazioni colla Polare e colle Plejadi (Cat. fot. Jacoby), di

Il pianetino HU è l'ultimo trovato colla fotografia dal dott. Carnera ad Heidelberg il 10 marzo decorso. Di 480 pianeti possediamo fino ad oggi elementi ellittici, e di 50 circa abbiamo o elementi circolari, o così scarse e vicine osservazioni da dover considerarli come perduti o quasi perduti.

Pianetino HU.	Grandezza 12,2	
1902 marzo 29	$9^h\ 24^m\ 15^s$	R. C. R.
α apparente pianeta	$11^h\ 11^m\ 22,^s,\ 56$	$(9^n.186)$
δ » »	$+\ 3°\ 55'\ 38''\ 0$	(0. 733)
1902 aprile 3	$9^h\ 53^m\ 44^s$	R. C. R.
α apparente pianeta	$11^h\ 8^m\ 50,^s,\ 89$	$(8^n.759)$
δ » »	$+\ 4°\ 32'\ 44''.1$	(0, 725).

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota III del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Le esperienze che descriviamo nel presente lavoro formano la continuazione di quelle menzionate nella nostra ultima pubblicazione [1] intorno a questo argomento e trattano però ancora delle trasformazioni che la luce determina nei corpi che contengono il residuo dell'acido nitrico o quello dell'acido nitroso.

Nitrobenzolo ed alcool assoluto.

La reazione che avviene per azione della luce fra il nitrobenzolo e l'alcool etilico non è stata ancora studiata in modo esauriente e però nella citata nostra recente pubblicazione abbiamo detto che su questo argomento saremmo ritornati fra breve. Noto era fin ora che, assieme ad altre sostanze, dal nitrobenzolo per azione dell'alcool si forma anilina ed aldeide acetica ed era però nostro compito di scoprire la natura degli altri corpi che si producono assieme all'anilina.

Ripetendo le prove in più larga scala ed impiegando alcool assoluto in luogo di quello acquoso, usato nella nostra vecchia esperienza di Roma, forse per quest'ultima circostanza [2], abbiamo avuto un risultato alquanto diverso. Il rendimento in prodotti basici fu migliore, ma non abbiamo potuto riscontrare la presenza di aldeide acetica. I prodotti alcalini sono costituiti prevalentemente da *chinaldina*, l'*anilina* non manca, ma si forma in quantità più piccola ed è accompagnata da altre basi che fin ora non abbiamo potuto determinare. La reazione come si vede è complicata, e però sarà necessario studiarla nuovamente su scala anche maggiore.

Alla luce vennero esposti, durante tutto l'estate, complessivamente 60 gr. di nitrobenzolo in 200 c. c. di alcool assoluto. La soluzione diventa

[1] Questi Rendiconti X, 228 (aprile 1901).

[2] Anche su ciò sarà necessario ritornare con nuove esperienze.

bruna; distillando l'alcool a b. m. non abbiamo potuto scoprire in questo la presenza d'aldeide acetica. Al residuo venne aggiunto acido cloridico e la distillazione proseguita in corrente di vapore acqueo. Così passa tutto il nitrobenzolo rimasto inalterato. Trattando con soda in eccesso e distillando nuovamente si ottengono le basi, mentre resta in dietro nel pallone alquanta resina nera e friabile. Il distillato venne portato a secco con acido cloridrico. Il rendimento fu il seguente: 50 gr. di nitrobenzolo riottenuto e 6,6 gr. di cloridrati.

La separazione della *chinaldina* riesce assai bene coll'acido cloroplatinico. Aggiungendo alla soluzione del miscuglio dei cloridrati, alquanto concentrata, una soluzione concentrata di cloruro di platino, precipita quasi tutta la chinaldina. Il cloroplatinato si purifica assai facilmente dall'acqua bollente, da cui si ebbe in aghi lunghi rossoranciati del punto di fusione 229°. I punti di fusione dei sali anche più caratteristici e comuni delle basi chinoliniche mancano quasi sempre nella letteratura. Per il cloroplatinato di chinaldina gli autori danno il punto di fusione 226° (1), ma questo dato non bastava ad accertare la natura della nostra base. Noi abbiamo preparato però dalla chinaldina pura, ottenuta col metodo ordinario, il cloroplatinato ed il cloroaurato, ed abbiamo trovato per questi due sali rispettivamente i punti di fusione 229° e 155°. Abbiamo poi trasformato parte del nostro cloroplatinato in cloroaurato ed abbiamo trovato che questo fondeva pure a 155°. I corrispondenti sali della lepidina fondono rispettivamente a 225°-226° ed a 191°-192°. La base da noi ottenuta è quindi la chinaldina.

La separazione dell'*anilina* non fu così facile per la piccola quantità di prodotto di cui disponevamo e per la presenza di altre sostanze.

Abbiamo però creduto conveniente di trasformare tutta la base non precipitata col cloruro di platino in composto acetilico allo scopo di separare l'anilina allo stato di acetanilide. Ottenemmo così realmente per ebollizione dell'alcaloide con anidride acetica un prodotto cristallino, ma esso non era formato soltanto dall'anilide acetica. Per ripetute cristallizzazioni dall'acqua bollente, abbiamo potuto separare un composto meno solubile, dal punto di fusione 174°-175°, in quantità non sufficiente per un'esauriente esame. La parte più solubile fonde a 112° ed è realmente *acetanilide*. Essa ci dette, per svaporamento con acido solforico, il solfato d'anilina che abbiamo riconosciuto alla reazione col bicromato potassico; per ultimo l'abbiamo trasformato in fenolo con nitrito sodico, da cui abbiamo preparato il tribromofenolo dal punto di fusione 94°. Le acque madri, da cui si separarono i derivati acetilici ora menzionati, contengono in assai piccola quantità un'altra base non acetilabile, e però probabilmente terziaria, diversa dalla chinaldina; essa ci dette un picrato che fondeva a 168°-169°.

(1) Beilstein IV, pag. 307.

La reazione che avviene fra il nitrobenzolo e l'alcool non si presta ad essere riassunta in una sola equazione, si potrebbe ammettere che la trasformazione principale fosse da esprimersi nel seguente modo:

$$\underset{\text{nitrobenzolo}}{C_6H_5NO_2} + 2\underset{\text{alcool}}{C_2H_6O} = \underset{\text{chinaldina}}{C_{10}H_9N} + 4H_2O,$$

ma naturalmente con ciò non si terrebbe conto dell'anilina e delle altre basi che si formano in piccola quantità. Forse queste ultime potranno dare qualche schiarimento intorno all'andamento generale del fenomeno. Inoltre è da osservarsi che il nitrobenzolo ricuperato contiene piccole quantità di un composto aldeidico, che pel suo odore ricorda i prodotti di condensazione dell'aldeide. Può darsi però che i primi prodotti, che si formano dalla coppia nitrobenzolo ed alcool, sieno anilina ed aldeide acetica, che questa si condensi ed entri in reazione coll'anilina per dare la chinaldina e le altre basi non ancora determinate. Comunque sia da interpretarsi il complicato processo, rimane assodato che la sintesi dello Skraup, che ebbe una si alta importanza per lo sviluppo di un importante capitolo della chimica organica, è una reazione che si compie spontaneamente, anche senza l'intervento di catalizzatori energici quali sono gli acidi minerali.

Nitrotoluoli ed alcool assoluto.

Il contegno dei nitrotoluoli corrisponde a quello del nitrobenzolo, noi li abbiamo esperimentati tutti e tre ed abbiamo trovato che il miglior rendimento in prodotti basici, lo si ha col *metanitrotoluolo*. Gli altri due dettero quantità di basi così esigue da non permettere uno studio ulteriore; si può tuttavia ritenere accertato che l'andamento della reazione in tutti e tre i casi è qualitativamente lo stesso: si formano le corrispondenti metilchinaldine assieme alle toluidine.

Noi abbiamo esposto alla luce durante tutto il periodo estivo 10 gr. di ciascuno dei tre nitrotoluoli sciolti sempre in 50 c. c. d'alcool assoluto. Il trattamento successivo corrisponde perfettamente a quello ora descritto pel nitrobenzolo e non ha bisogno d'essere qui riportato. Il rendimento fu il seguente: dal m- nitrotoluolo si ebbero 1,1 gr. di cloridrato (cioè circa il 10 $^0/_0$ come dal nitrobenzolo). dagli altri due invece appena la metà cioè soltanto 0,5 gr. di cloridrato. In tutti e tre i casi, l'alcool distillato non conteneva aldeide acetica.

Le basi che abbiamo potuto riconoscere fra le sostanze provenienti dal *m-nitrotoluolo* furono la corrispondente *metilchinaldina* e la *m- toluidina*.

La prima venne separata facilmente allo stato di cloroplatinato, che si scompone verso i 260° (incominciando ad annerire verso i 230°), e che si mostrò identico al prodotto ottenuto dalla m-toluidina con paraldeide ed

acido cloridrico (1). La m- toluidina si ricavò dalle acque madri, e la si riconobbe alla colorazione rossa che l'acido nitrico produce nella sua soluzione solforica ed alla colorazione rosea che si ottiene col cloruro di calce e la soluzione eterea della base libera (2).

Contegno di alcuni altri nitroderivati aromatici in soluzione alcoolica.

La reazione che si compie fra il nitrobenzolo ed i nitrotoluoli e l'alcool non sembra possedere carattere generale, almeno finora non abbiamo trovato altre sostanze contenenti il residuo dell'acido nitrico suscettibili a dare l'analoga trasformazione.

Noi abbiamo, sempre nelle stesse condizioni, sperimentato con le seguenti sostanze: l'*ortodinitrobenzolo* ed il *metadinitrobenzolo* le *tre nitraniline* e la *nitronaftalina* ed in tutti questi casi, come l'anno scorso coll'*acido picrico*, non siamo stati in grado di ottenere quantità apprezzabili di prodotti basici.

Si formano sempre piccole quantità di materie coloranti brune, ma il prodotto impiegato resta inalterato quasi per intero. Se avviene riduzione o altra trasformazione, questa deve compiersi con tale lentezza da sottrarsi alla osservazione.

Contegno dell'o-nitropiperonalio.

Il nostro amico prof. Angeli ci fece notare che l'o-nitropiperonalio, come l'aldeide o-nitrobenzoica, non dà la sua bella ed importante reazione colla nitroidrossilammina e ci invitò a studiare il comportamento alla luce dell'aldeide o-nitropiperonilica per vedere se esso fosse analogo a quello dell'aldeide o-nitrobenzoica. Lo è realmente: l'o-nitropiperonalio per azione della luce si trasforma in *acido o-nitrosopiperonilico:*

$$C_6H_3 \begin{cases} O_2CH_2 \\ CHO \\ NO_2 \end{cases} = C_6H_3 \begin{cases} O_2CH_2 \\ COOH \\ NO \end{cases}$$

ed anche qui, come coll'aldeide o-nitrobenzoica, la reazione avviene senza intervento di altre sostanze. Noi l'abbiamo studiata in soluzione benzolica, ma essa può compiersi anche in altri solventi. Impiegando l'alcool metilico od etilico si otterranno senza dubbio i corrispondenti eteri composti, come coll'aldeide o-nitrobenzoica, ma coll'o-nitropiperonalio la purificazione di queste sostanze riesce meno facilmente perchè si producono materie brune e

(1) Beilstein, IV, 329.
(2) Ibid. II, 474.

resinose. Noi ci siamo limitati per queste ragioni allo studio dell'acido nitroso-piperonilico.

Esponendo alla luce una soluzione di o-nitropiperonalio in benzolo (2 gr. in 50 c. c.), il liquido leggermente colorato in giallo, dopo breve tempo si colora in verde e dopo un giorno (l'esperienza venne fatta in dicembre) incomincia la separazione di cristalli gialli, che aderiscono alle pareti del tubo. Mentre aumenta la separazione dell'acido, il liquido va perdendo il suo colore verde e tende ad imbrunire. Non è conveniente attendere che la trasformazione sia completa, perchè l'acido nitrosopiperonilico, a differenza del nitrosobenzoico, si altera facilmente e, rimanendo a lungo esposto alla luce, diventa bruno. Per purificare il prodotto, si versa la parte liquida e si fa cristallizzare dall'etere acetico la parte solida, che aderisce alle pareti del tubo. L'acido o-nitrosopiperonilico si presenta in forma di piccoli aghetti gialli, riuniti in mammelloncini, che fondono scomponendosi fra i 160° e 165°.

È assai probabile che anche altre aldeidi aromatiche, che contengono il residuo nitrico in prossimità del gruppo aldeidico, subiscono alla luce una trasformazione simile a quella dell'aldeide o-nitrobenzoica ed o-nitropiperonilica. Sembra però che se il radicale aldeidico si trova in una catena laterale, quello nitrico non ha su di esso più alcuna influenza, perchè ad es. l'aldeide o-nitrocinnamica resta inalterata alla luce o per lo meno si modifica lentamente in altro senso.

Comportamento dell'acido o-nitrosobenzoico e dei suoi eteri composti.

Nella nostra pubblicazione dello scorso aprile [1] abbiamo fatto notare che se si lascia esposta alla luce per molto tempo l'aldeide o-nitrobenzoica in soluzione alcoolica, i cristalli di etere nitrosobenzoico, che si separano da principio, si vanno ridisciogliendo, perchè si formano altri prodotti. Su questa ulteriore trasformazione dell'acido nitrosobenzoico e dei suoi eteri siamo ora in grado di dare ulteriori schiarimenti.

Anzitutto vogliamo dire che l'acido o-nitrosobenzoico in soluzione benzolica resta quasi completamente inalterato anche se esposto alla luce per tutto il periodo estivo. Da 2 gr. di aldeide o-nitrobenzoica, sciolta in 10 c.c. di benzolo, abbiamo ottenuto, dopo nove mesi di insolazione, 1,85 gr. di acido nitrosobenzoico. Il resto era formato da materia resinosa nerastra. In soluzione alcoolica, metilica o etilica, la cosa è invece assai diversa, e tanto partendo direttamente dall'aldeide nitrobenzoica, che dall'etere (etilico) nitrosobenzoico, si ottiene una soluzione intensamente colorata in bruno rossastro, che contiene un'assai complicato miscuglio di sostanze. Noi abbiamo studiato

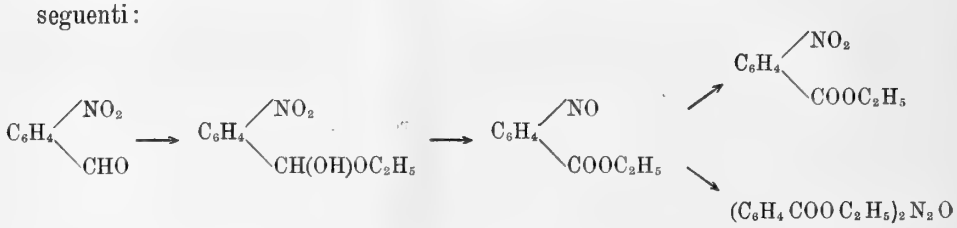
[1] L. c.

segnatamente i prodotti che si ottengono dalla soluzione di aldeide o-nitrobenzoica in alcool etilico, ma anche in questo caso non siamo certamente riusciti a determinare tutti i composti formatisi. L'alcool non sembra prendere parte alla reazione perchè non si formano quantità sensibili di aldeide; le sostanze che abbiamo potuto riconoscere sono le seguenti: l'*etere dietilico dell'acido azossibenzoldicarbonico* e l'*etere dell'acido nitrobenzoico*, inoltre poi l'*acido azossibenzoldicarbonico* e probabilmente anche piccole tracce di *etere antranilico*.

Quantitativamente predominano i due primi, il terzo si forma un po' più scarsamente; ma oltre a questi corpi si ottiene in notevole quantità una materia resinosa e sciropposa non determinabile.

Questa scomposizione dell'etere dell'acido o-nitrosobenzoico in soluzione alcoolica presenta la più grande analogia con quella del nitrosobenzolo colla liscivia di soda studiata assai accuratamente da Bamberger (1). Egli ottenne, assieme a molte altre sostanze, prevalentemeute azossibenzolo e nitrobenzolo. Come egli fa giustamente osservare, si tratta qui di un processo di reciproca riduzione ed ossidazione e secondo tutte l'esperienze che abbiamo fatto fin ora, sono appunto questi i processi che la luce favorisce.

Le trasformazioni principali che si compiono dall'o- nitrobenzaldeide in *soluzione alcoolica* per azione prolungata della luce, sarebbero dunque le seguenti:



Ma oltre ai prodotti principali qui accennati, assai probabilmente molti altri se ne formeranno, come insegna lo studio fatto dal Bamberger sul contegno del nitrosobenzolo. L'alcool, si vede, esercita un'azione catalitica analoga a quella della soda caustica, ma mentre il primo a freddo ed all'oscurità sarebbe un debolissimo catalizzatore, l'azione della luce ne accresce l'attività. Molto probabilmente lo farà anche la temperatura. Per avere completo il quadro bisognerebbe studiare l'azione dell'alcool sul nitrobenzolo alla luce e quello degli alcali sull'acido nitrosobenzoico.

Noi abbiamo lasciato esposto alla luce per tutta l'estate un tubo contenente 10 gr. di o-nitrobenzaldeide sciolti in 100 c.c. d'alcool assoluto. I cristalli che si formano da principio, come s'è detto, a poco a poco si vanno ridisciogliendo mentre il liquido prende un colore rossastro sempre più cupo; alla fine diventa quasi nero, ma i cristalli dell'etere nitrosobenzoico, colla

(1) Berichte 33, 1939 (1900).

concentrazione impiegata, non si sciolgono completamente; la parte dell'etere rimasta inalterata era di 1,9 gr. Distillando l'alcool, che non contiene quantità apprezzabili d'aldeide, resta indietro uno sciroppo rossobruno, che, a poco a poco, in parte si solidifica (8,5 gr.). Esso venne estratto a caldo successivamente con etere petrolico e con benzolo.

La parte solubile nell'etere petrolico è un olio intensamente colorato in rosso, in cui si vanno formando dei cristalli. Questi vennero liberati con carbonato sodico da una piccola quantità di una materia acida, che non abbiamo potuto ottenere in quantità sufficiente per essere riconosciuta, e poi purificati dall'etere petrolico. Si presentano in forma di prismi ramificati, lievemente colorati in carnicino, che fondono a 81-82°. Essi hanno la composizione dell'*etere dietilico dell'acido o-azossibenzoldicarbonico* (oppure *o- azossibenzoico*) e sebbene questo etere non sia stato ancora descritto, non v'ha dubbio che tale debba essere la loro costituzione. La parte oleosa dell'estratto coll'etere petrolico, venne distillata a pressione ridotta e passò a 17 mm. a 155-160°. Malgrado la distillazione l'olio mantiene un intenso colore rosso, che è dovuto ad una impurità, perchè esso è formato prevalentemente dall'*etere etilico dell'acido o-nitrobenzoico* e da piccole quantità di *etere etilico dell'acido o-amidobenzoico*. Trattando la soluzione eterea del prodotto con acido cloridrico gassoso, quest'ultimo si separa in forma di cloridrato. La quantità di materia ottenuta non era tale da potere essere analizzata, ma crediamo di non andare errati affermando che fra i prodotti di trasformazione dell'etere nitrosobenzoico si trovi anche l'etere antranilico. Esso corrisponderebbe all'anilina, che Bamberger ebbe, pure in quantità piccola, dal nitrosobenzolo. L'etere etilico dell' acido o-nitrobenzoico fonde a 30° (1), ma a noi sembrò più conveniente di passare all'acido ed analizzare quest'ultimo. L'abbiamo ottenuto dall'etere per idrolisi con acido cloridrico e purificato dall'acqua bollente. L'acido o- nitrobenzoico ricavato in quantità relativamente cospicua, fondeva a 148° in corrispondenza con Widmann, che trovò 147°.

La parte del prodotto solubile nel benzolo è formata da una materia bruna resinosa da cui non abbiamo potuto ottenere sostanze cristallizzate.

Finalmente il residuo insolubile nell'etere petrolico e nel benzolo costituisce una materia solida grigiastra, da cui per trattamento con alcool metilico e nero animale, abbiamo potuto ottenere una sostanza cristallizzata in in tavolette appena leggermente colorate in giallo, che fondono con decomposizione a 248°. Essa ha la composizione dell'*acido o-azossibenzoldicarbonico*, a cui corrisponde per tutte le sue proprietà (2). La formazione di

(1) Balstein 2, 1230.

(2) L'acido o- azossibenzoldicarbonico (oppure o-azossibenzoico) (Beilstein, IV, 1343) è descritto da Armaschewsky come una sostanza cristallizzata in tavole colorate in *giallo*

questo acido è dovuta senza dubbio all'acido o-nitrosobenzoico, che si produce sempre assieme al suo etere etilico, in quantità più o meno grande, quale prodotto primario d'insolazione dell'aldeide o-nitrobenzoica, anche in soluzione alcoolica. Dopo quanto s'è detto, si sarebbe potuto aspettarsi di riscontrare fra i prodotti di ulteriore trasformazione, anche l'acido o-nitrobenzoico; ma questo sembra mancare, e però bisogna ammettere che l'acido nitrosobenzoico riducendosi ad acido azossibenzoico ceda parte del suo ossigeno all'etere nitrosobenzoico per dare l'etere nitrobenzoico, che è realmente dopo la resina il prodotto che si forma in quantità maggiore.

Anatomia. — *Sopra gli organi renali delle Salpidi.* Nota del Socio Todaro.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Micro-fotografie di fibre muscolari a luce semplice e polarizzata, allo stato di riposo e di contrazione.* Nota del Socio straniero Th. W. Engelmann.

Prego l'Accademia dei Lincei di accettare alcune *micro-fotografie di fibre muscolari*, che mi sembrano essere non senza valore, perchè dimostrano alcuni fatti importanti per la dottrina della contrazione muscolare.

Le fibre muscolari volontarie o striate sono composte principalmente da fibrille tenuissime, che nella contrazione si raccorciano senza cambiamento di volume. In ciascuna di queste fibrille si può distinguere, regolarmente alternantisi, due sorta di segmenti: isotropi o monorifrangenti, e anisotropi o birifrangenti. Esistono anche altre differenze fisiche, chimiche e morfologiche fra i due. Nella sostanza isotropa si distinguono p. e. ancora quattro differenti sostanze.

La fotografia N. I mostra questa struttura complicata, come si presenta in luce ordinaria al microscopio, in una fibra muscolare di uno scarabeo allo stato di riposo.

La figura N. II mostra la stessa fibra; a sinistra in luce ordinaria, a destra in luce polarizzata. Si vede che gli strati di sostanza isotropa sono molto più alti che le strie birifrangenti. Ciò vuol dire che allo stato di riposo la più gran parte del volume delle fibrille muscolari è isotropa.

---

bruno, che fonderebbero secondo Homolka a 237-242°. Noi abbiamo preparato il composto secondo le indicazioni di Pietro Griess (Berichte 7, 1611) dell'acido o-nitrobenzoico, e l'abbiamo ottenuto con proprietà perfettamente identiche a quelle sopraindicate.

Ma questo cambia durante la contrazione. Quanto più la fibra si accorcia, tanto più il volume della sostanza anisotropa (V_a) aumenta e diminuisce il volume della sostanza isotropa (V_i). Il volume totale delle due sostanze resta lo stesso.

Questi fatti fondamentali sono illustrati dalla fotografia N. III. Essa mostra una fibra muscolare dello scarabeo *Chrysomela coerulea* che contiene un'onda di contrazione. A destra si vede l'immagine a luce polarizzata (fra due prismi di Nicol incrociati), a sinistra a luce ordinaria.

Il rapporto V_i/V_a, che nello stato di riposo ha un valore di 1,5 a 2,0, diminuisce fino a 0,3 e anche meno nello stato di contrazione massima.

A un certo raccorciamento corrisponde sempre un medesimo valore del detto rapporto.

La fotografia N. IV mostra una fibra in contrazione molto avanzata. Il rapporto volumetrico anzi detto è circa 0,3. Ma si vede ancora un altro fatto importante, cioè: il potere rifrangente della sostanza anisotropa è molto meno grande che quello della sostanza isotropa. Nello stato di riposo ha luogo il contrario, come mostrano le fotografie N. I e II.

Si può provare che durante la contrazione la sostanza anisotropa, in misura dell'aumento di volume e della diminuzione del potere rifrangente, diviene più molle e più estensibile, mentre che la sostanza isotropa diviene più dura e meno estensibile.

Queste alterazioni di volume, di potere rifrangente, di solidità e di estensibilità opposte nelle due sostanze, si spiegano colla ipotesi, che nella contrazione ha luogo un passaggio di acqua dalla sostanza isotropa nella sostanza anisotropa. La sostanza anisotropa si gonfia per imbibizione d'acqua, sostratta alla sostanza isotropa.

La fotografia N. V, infine, mostra che le alterazioni ora descritte, s'iniziano nelle terminazioni nervose. Si vede una *collina nervosa* (N) da cui parte un'onda di contrazione. La contrazione è la più avanzata immediatamente sotto la collina nervosa, e va degradando dal margine sinistro al margine destro della fibra (*contrazione laterale*).

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

Matematica. — *Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno.* Nota del dott. I. Boggio, presentata dal Socio V. Cerruti.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Le deformazioni del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti.* Nota del prof. R. MARCOLONGO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Fisica. — *Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua.* Nota preventiva di A. MARCACCI, presentata dal Socio LUCIANI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull' influenza di basse temperature sulla variazione di resistenza del selenio per effetto della luce.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Socio BLASERNA.

È da tempo (1) noto che uno strato di selenio, quando sia stato sottoposto ad uno speciale trattamento (2), gode della proprietà che la sua resistenza elettrica diminuisce notevolmente se esso viene colpito da un raggio di luce.

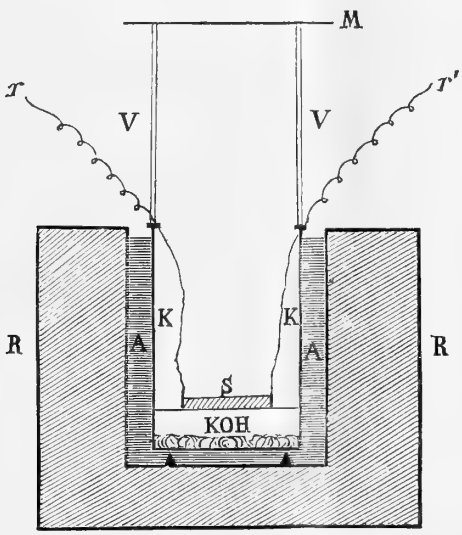
Le spiegazioni che sogliono darsi di questo abbassamento di resistenza per effetto della luce sono varie: Siemens (3) crede che questa specie di selenio che presenta la notevole proprietà sia costituita da un miscuglio di due modificazioni allotropiche, una conduttrice metallicamente, l' altra cristallina e che l' azione della luce consista in una trasformazione di quest' ultima modificazione, ancora sussistente, nella prima. Hesehus (4) ammette pure il miscuglio di due modificazioni, ma crede che la luce ne dissoci una e questa allora conduca meglio l' elettricità. Bidwell (5) ed altri, notando che il selenio puro non conduce e che d' altra parte il trattamento per rendere sensibili alla luce i preparati di selenio necessita il portare dei metalli in contatto con questo, credono che la conducibilità del selenio sia da ascriversi al fatto che in esso ordinariamente si trovano impurità metalliche e che la luce renda possibile la formazione di seleniuri metallici conduttori.

(1) Sill. Journ. 5, 1873, pag. 301.
(2) Beibl. 5, pag. 316.
(3) Pogg. Ann. 159, pag. 117.
(4) J. de la Soc. phys. chim. russe, 1884, pag. 146.
(5) Phil. Mag. (5), 20, pag. 178, 1885.

Più complicate ancora sono le teorie di Uljanin (1) e di Kalischer (2) che tendono a spiegare oltre questo fenomeno anche il comportamento del selenio esposto alla luce rispetto ad altri fenomeni.

Ho pensato che avrebbe potuto essere di qualche interesse pel decidere fra queste varie teorie, il vedere come questo fenomeno si comportasse a basse temperature come quella d'ebollizione dell'aria liquida, alla quale, per esempio, la quasi totalità delle reazioni chimiche non avvengono più, e che in ogni modo la ricerca avrebbe anche di per sè presentato qualche interesse.

A tale scopo mi sono fatto costruire dal noto meccanico Richard Müller-Uri di Braunschweig una cellula al selenio di piccole dimensioni e che presentasse un notevole abbassamento di resistenza sotto l'influenza della



luce. Questa cellula presenta una superficie sensibile di circa 2 cm. quadrati; in essa il selenio è steso su una lastra di lavagna fra dei sottili fili di rame.

Per poter portare questa cellula alla temperatura di ebollizione dell'aria liquida, mi sono costruito un recipiente speciale il cui disegno è riportato nella qui annessa figure.

Un recipiente di latta cilindrico R a doppie pareti, con l'intercapedine fra queste riempita di lana ben secca, pressata e poi chiusa a stagno, serve a contenere l'aria liquida A. Entro questa trovasi immerso un secondo recipiente K cilindrico di latta, contenente sul fondo dei pezzi di potassa caustica e un po' più su un diaframma a sfregamento dolce, tutto bucherellato che sostiene la cellula al selenio S. Superiormente questo recipiente K termina in un manicotto V di vetro, masticiato al sottostante K; attraverso due fori

(1) Wied. Ann. 34, pag. 247, 1888.
(2) Wied. Ann. 32, pag. 108, 1887.

nella masticiatura passano i due reofori r_1 r' della cellula S. Il manicotto V di vetro è chiuso poi superiormente da una lamina M di mica ben trasparente, che serve mediante un'altra masticiatura a chiudere ermeticamente il recipiente cilindrico così formato e in cui viene a trovarsi la cellula al selenio. La potassa caustica, assorbendo l'anidride carbonica e l'umidità contenuta nell'aria, preservava dal pericolo che queste venissero condensate dalla bassa temperatura e formassero nell'interno del recipiente una nube assorbente i raggi luminosi. Di più, grazie a quel collare di vetro V, non si avevano al l'esterno delle superfici metalliche irraggianti.

Come sorgente di luce mi servii di un arco voltaico a mano alimentato da una corrente alternante a 50 Volta.

Quest'arco trovavasi situato sopra la lamina di mica M, e la luce da esso emanante veniva concentrata mediante una lente propria sulla superficie sensibile del selenio.

La cellula era inserita nel circuito di un elemento Warren de la Rue contenente un galvanometro Déprez et d'Arsonval di 100 Ohm. di resistenza, fortemente shuntato ed un interruttore.

Il metodo seguito per determinare la resistenza della cellula è in fondo quello di sostituzione, unico applicabile in misure per loro natura poco precise di quantità troppo variabili da un momento all'altro.

Si dava allo shunt un conveniente valore e poi si leggevano le deviazioni al galvanometro, quando si chiudeva il circuito colla cellula illuminata o con la cellula non illuminata; e questa operazione si fece per varî valori dello shunt, sia quando la cellula trovavasi alla temperatura ordinaria, sia quando trovavasi alla temperatura d'ebollizione dell'aria liquida.

In ultimo poi si determinò la sensibilità del galvanometro sostituendo alla cellula a selenio una resistenza di 5000 Ohm, e variando eventualmente lo shunt al galvanometro in modo da poter avere all'incirca le stesse deviazioni che si avevano quando era inserita la cellula.

L'aria liquida gentilmente fornitami dal dott. D. Helbig dell'Istituto Chimico dell'Università, veniva conservata durante l'esperienza entro appositi recipienti del Dewar, dai quali poi si travasava nell'interstizio A fra i due recipienti R e K al momento dell'esperienza e durante la medesima per modo che la parte metallica del recipiente K fosse sempre completamente sommersa. In tal modo un litro di aria liquida durò per circa tre quarti d'ora.

I risultati delle misure compiute si possono riassumere così:

Temperatura ordinaria.

Resistenza della cellula nell'oscurità $r = 31000$ Ohm.
» » » alla luce $r_1 = 18000$ »

Effetto fotoelettrico $\frac{r-r_1}{r} = 0{,}4$

Temperatura d'ebollizione dell'aria liquida.

Resistenza della cellula nell'oscurità $r = 2600$ Ohm.
» » » alla luce $r_1 = 1900$ »
Effetto fotoelettrico $\frac{r-r_1}{r} = 0{,}3$.

Come si vede, alla temperatura d'ebollizione dell'aria liquida l'effetto fotoelettrico non scompare, anzi la sua variazione è abbastanza piccola, ciò che rende un po' difficile il ricondurre questo effetto della luce ad una azione chimica.

In ultimo noto come il coefficiente di temperatura della resistenza elettrica del selenio conduttore sia illuminato che non illuminato, abbia per questo intervallo di temperatura: 15° — 185°, un valore all'incirca eguale a 0,004, cioè un valore quasi eguale a quello dei metalli.

Chimica. — *Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine.* Nota di A. Peratoner, presentata dal Socio E. Paternò.

Geologia. — *I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia.* Nota di Alessandro Martelli, presentata dal Corrisp. De Stefani.

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sugli Infusori.* Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Nuove ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini.* Nota I di Alessandro Coggi, presentata dal Socio Emery.

Son passati più di dieci anni da che ho comunicato in questi Rendiconti [1] i risultati di parziali ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini in *Torpedo* e alcune mie idee sulle probabili omologie di questi organi peculiari dei Selaci con organi che si riscontrano in altri ordini di Pesci.

[1] *Sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini.* Questi Rendiconti, vol. VII, 2° sem., fasc. 7°, 1891.

Al primo convegno dell' Unione Zoologica Italiana in Bologna (settembre 1900) ho dimostrato su preparati microscopici, alcuni stadî iniziali dello sviluppo delle ampolle in *Torpedo* e la possibilità di distinguere già in embrioni squaliformi di 15 mm. le ampolle stesse dagli abbozzi degli organi di senso laterale (canali o vescicole di Savi). Mentre questi, infatti, si mantengono costituiti di un unico strato di cellule, per quanto alte e specificamente modificate, fino a stadî avanzati di sviluppo e quando l' ectoderma è bistratificato, quelle invece si mostrano composte, fino dal loro primo annunziarsi, da più strati cellulari. Questa differenza di costituzione trae la sua origine dalla maniera e dal tempo diversi in cui le due qualità di organi si formano, e ci invita pure ad annetter loro un diverso significato morfologico.

Le osservazioni e le conclusioni portate da lavori recenti nei quali è trattato, di proposito o per incidenza, delle ampolle di Lorenzini in varie specie di Selaci, mi obbligano ad anticipare in questa Nota la pubblicazione dei risultati di mie ricerche ulteriori sullo stesso argomento.

Disposizione, numero e partizione delle ampolle. — Nelle torpedini adulte le ampolle propriamente dette sono riunite in tre gruppi in ciascuna metà del corpo: un gruppo anteriore dorsale, innanzi e in dentro degli occhi; un gruppo anteriore ventrale, innanzi alle narici, situato sotto al primo e da questo imperfettamente separato per mezzo di una membrana tendinosa; un gruppo posteriore appoggiato alla cartilagine del propterigio, sul contorno esterno dell'organo elettrico, fra la linea segnata dalla rima boccale e la linea che passa per le due prime fessure branchiali. Gli sbocchi dei dotti ampollari invece sono distribuiti lateralmente agli occhi, intorno alle aperture nasali, e presso al margine antero-laterale delle due faccie del corpo. Una partizione delle ampolle fondata sul loro raggruppamento, o sulla disposizione degli sbocchi non avrebbe che una importanza topografica. Più razionale invece ne riesce la partizione fatta sul criterio della loro innervazione, tanto più che con esso si accordano i fatti dello sviluppo.

Ecco quanto mi risulta da dissezioni di individui adulti e di grossi embrioni di *T. ocellata* e dalle ricostruzioni di tagli di giovani embrioni.

I nervi che provvedono le ampolle appartengono tutti al *N. facialis* [1] e precisamente a quei rami di esso che innervano anche gli organi di senso

[1] Nella mia Nota del '91 non tenni conto della importante scoperta di Marshall e Spencer che la *portio major* del *R. ophthalm. sup.* è la *portio facialis* dello stesso ramo, e inoltre che il *R. buccalis* appartiene, almeno per gran parte, al facciale; riparai alla mancanza in un mio lavoro successivo (*Un'anomalia in un embrione di Selacio.* Mem. Acc. Scienze Bologna, ser. V, tom. II, 1892). Così ritenni allora che sì le ampolle come gli organi di senso laterale fossero innervati dal trigemino, come parecchi autori di trattati e di lavori speciali ritengono tuttora.

laterale: *R. ophthalmicus superficialis portio facialis*, *R. buccalis* e *R. mandibularis externus*.

Ciascun gruppo anteriore dorsale è costituito:

a) da 6-7 ampolle i cui dotti sboccano sulla faccia dorsale del corpo, allato e in fuori dell'occhio, e che sono innervate da branche (1) del *R. ophthalm. superf.*;

b) da 2-3 ampolle i cui dotti sboccano lateralmente in fuori del canale laterale dietro alla commessura post-auriculare, fra mezzo a tubuli dello stesso canale, e che sono innervate da una branca del *R. mandib. externus*;

c) da 15 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi presso al margine antero-laterale della faccia dorsale del corpo e che sono innervate da una branca del *R. mandib. ext.*

Ciascun gruppo anteriore ventrale si compone:

d) di 11 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi sulla faccia ventrale del corpo intorno alle narici, e che sono provvedute da una branca del *R. ophthalm. superf.*;

e) di 2-3 ampolle i cui dotti sboccano sul margine anteriore della faccia ventrale del corpo, e che sono provvedute da una branca del *R. buccalis*;

f) di 15 ampolle i cui dotti sboccano presso al margine antero-laterale della faccia ventrale del corpo e che sono innervate da una branca del *R. mandibularis externus*.

Ciascun gruppo posteriore è costituito:

g) da 18 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi sulla faccia dorsale del corpo, presso al contorno della pinna pettorale, lateralmente e indietro dell'organo elettrico, e che sono innervate da una branca del *R. mandib. externus*;

h) da 15 ampolle i cui dotti sboccano sulla faccia ventrale del corpo, in fuori e in dietro del contorno esterno dell'organo elettrico, e che son provvedute da una branca del *R. mandibularis externus*.

Tutto sommato *Torpedo ocellata* ci presenta non meno di 168 ampolle (2) distribuite in 8 sottogruppi. Di esse almeno 130 sono innervate da parecchie branche del *R. mandib. ext.*, 34-36 da due branche del *R. ophthalm. sup. facialis*, e solo 4-6 da una esile branca del *R. buccalis*.

Epoca e luogo di formazione delle ampolle. — Finora lo sviluppo delle ampolle non è stato seguito estesamente ed esattamente in alcuna specie di Selacio.

(1) Adopero qui impropriamente la parola « branca » affibbiandole un significato d'ordine inferiore a quello che essa ha nella lingua italiana. Lo faccio provvisoriamente per maggior chiarezza di esposizione.

(2) Questo numero non deve ritenersi assoluto; esso potrà essere diverso, dipendentemente da variazioni individuali. Credo, a ogni modo, ch'esso rappresenti un *minimum*.

Per quanto riguarda *T. ocellata*, i sottogruppi di ampolle numerati sopra non si formano contemporaneamente durante lo sviluppo embrionale; e nè meno è contemporanea l'apparizione delle ampolle appartenenti ad uno stesso sottogruppo. In generale esse si sviluppano isolatamente in ogni sottogruppo, salvo pei sottogruppi più numerosi ove si può verificare lo sviluppo contemporaneo di un certo numero di ampolle (dipendentemente, come si vedrà in seguito, dalla disposizione che assumono i nervi destinati a provvederle).

A cominciare da embrioni squaliformi di 12 mm. di lunghezza fino ad embrioni raiformi di 27 mm., ininterrotta, sebbene irregolarmente intensa, è la formazione di nuove ampolle.

Prime a mostrarsi sono le poche ampolle del sottogruppo *b*. Se ne può constatare l'inizio in embrioni squaliformi di 12 mm. lateralmente in basso sull'arco ioideo, presso il solco che separa quest'ultimo dall'arco mandibolare. Sono le prime *ampolle ioidee* o *io-mandibolari*. Il nervo che le provvede è una breve ed esile branca del *R. mandib. ext.*, la prima branca inviata da questo ramo e che non sia destinata ad organi di senso laterale.

In embrioni squaliformi di 15 mm. appariscono, pure sull'arco ioideo, sotto a quelle del sottogruppo *b*, le prime ampolle del sottogruppo *g* (*ampolle ioidee* o *io-mandibolari*). In embrioni squaliformi di 16 mm. è già segnata, dietro all'occhio, all'altezza del cristallino, qualcuna delle poche ampolle del sottogruppo *e* provveduta da una branca esilissima del *R. buccalis* (*ampolle infraorbitali* o *boccali*). In embrioni squaliformi di 18 mm., innanzi e sotto all'occhio, è chiara la formazione delle prime ampolle innervate dal *R. ophthal. superf.*, e precisamente quelle appartenenti al sottogruppo *a* (*ampolle sopraorbitali* od *oftalmiche*); e nello stesso stadio appariscono sull'arco mandibolare, subito dietro alle ampolle del sottogruppo *e*, le prime ampolle del sottogruppo *c* (*ampolle mandibolari* o *io-mandibolari*), e sull'arco ioideo le prime del sottogruppo *h* (*ampolle ioidee* od *io-mandibolari*), le une e le altre innervate da branche diverse del *R. mandib. ext.* Le ampolle del sottogruppo *d* (*sopraorbitali* od *oftalmiche*) fanno la loro prima comparsa, sotto all'occhio, in embrioni squaliformi di 19 mm. Quelle del sottogruppo *f* (*ampolle mandibolari* o *io-mandibolari*) cominciano a differenziarsi, sulla faccia ventrale dell'arco mandibolare, circa nello stesso stadio.

Tutti i sottogruppi sono chiaramente, se non completamente, rappresentati in embrioni squatiniformi di 20,5 mm.; nuove ampolle continuano a formarsi in ciascuno di essi, eccetto che nei piccoli sottogruppi *b* ed *e*. Ma specialmente continua è l'aggiunta di nuove ampolle nei sottogruppi *g* e *h* fino in embrioni di 27 mm. Di questi sottogruppi fan parte le ampolle i cui dotti sboccano nei punti più periferici delle due superficie del corpo.

Materiale per la formazione delle ampolle. — Nella mia Nota del '91 ebbi occasione di rilevare che le ampolle si sviluppano a fianco degli abbozzi degli organi di senso laterale, e solo di certuni fra essi. Ora posso

aggiungere e precisare meglio che *le ampolle cominciano ad apparire quando le quattro porzioni principali di cui è costituito l'intero apparato di senso laterale* (linea sopraorbitale, linea infraorbitale, linea io-mandibolare e linea laterale) *son già chiaramente abbozzate* e ch'*esse si formano a spese di tratti ectodermici che sono contigui e fiancheggiano, a dir così, quelli di tali abbozzi che son destinati a divenire i canali sensitivi (o vescicole) del capo*. Ne è esclusa quindi la linea laterale pr. detta, a fianco della quale non si forma alcuna ampolla; ciò che si può già dedurre da quanto è precedentemente esposto circa la posizione che hanno le ampolle al loro primo apparire e circa i nervi che le provvedono.

Le quattro porzioni dell'apparato di senso laterale sono già abbozzate in embrioni squaliformi giovanissimi di *T. ocellata*, quando l'ectoderma è ancor fatto di un unico strato cellulare. Esse si manifestano come tratti o striscie ectodermiche a cellule alte, stipate e con nuclei allungati, mentre le cellule dell'ectoderma ordinario (salvo regioni ove si formano organi speciali, transitorî o permanenti) sono molto più basse e pressochè tanto alte quanto larghe. E il passaggio fra le due forme di cellule è graduale.

Non è giusto dunque continuare a ripetere, come ha fatto recentemente anche Allis [1], l'affermazione di Balfour, che nella formazione degli abbozzi degli organi di senso laterale pigli parte solo lo strato mucoso o profondo dell'ectoderma. La cosa apparisce effettivamente così, solo quando le cellule dell'ectoderma ordinario si dispongono nei due strati caratteristici, mentre quelle degli abbozzi degli organi di senso si mantengono disposte su uno strato solo (e ciò durante una certa serie di stadî embrionali).

Ma anche quando gli abbozzi degli organi di senso laterale si possono manifestare come differenziamento dello strato profondo, i loro margini laterali passano gradatamente all'ectoderma ordinario bistratificato; e ciò avviene a mezzo di cellule discretamente alte, prima disposte alternate, poi su due strati. Per modo che ogni striscia ectodermica, rappresentante l'abbozzo di una porzione dell'apparato di senso laterale, è limitata ai suoi fianchi da ectoderma che non è fatto come l'ectoderma ordinario, ma nè meno può dirsi che faccia parte dell'apparato sensitivo.

Or bene, *è a spese di questo ectoderma che fiancheggia gli abbozzi dell'apparato di senso laterale che si formano le ampolle*. Non sempre però. Ci sono lunghi tratti di essi, a fianco dei quali non si sviluppa alcuna ampolla. Per esempio, a non tener conto della linea laterale, tutto il tratto dorsale della linea sopraorbitale e quasi tutta la linea infraorbitale. Ciò di-

[1] E. Ph. Allis, *The Lateral Sensory Canals, the Eye Muscles, and the Peripheral Distribution of certain of the Cranial Nerves of Mustelus laevis*. Quart. Journ. Micr. Sc., vol. 45, p. 2, N. S., pag. 91.

mostra che *la formazione delle ampolle non è dovuta ad attività propria di questo ectoderma, ma che la causa risiede fuori di esso.*

Primi momenti dello sviluppo delle ampolle. — In tagli frontali di embrioni di *T. ocellata* di 12 mm. dietro all' abbozzo della linea io-mandibolare, di embrioni di 16 mm. dietro all' infraorbitale, di embrioni di 18 mm. innanzi alla sopraorbitale, si possono constatare accenni di ampolle in relazione con esilissime branche inviate dai rami nervosi che rispettivamente provvedono quelle porzioni dell' apparato di senso laterale. Siffatte branche sono accompagnate da nuclei in prossimità del ramo da cui si dipartono, e anche per un certo tratto del loro cammino immediatamente sotto all' ectoderma, ma poi sono esclusivamente costituite da sottilissimi filamenti protoplasmatici (cilindrassili embrionali) i quali giungono fino alle cellule dello strato profondo dell' abbozzo ampollare, e forse penetrano fra di esse. L' abbozzo ampollare in questo stadio è pluristratificato, perchè fra lo strato profondo ch' è continuazione dello strato profondo dell' ectoderma e lo strato superficiale si sono insinuate altre cellule derivate del primo.

In tagli di embrioni rispettivamente un po' più giovani, nelle regioni corrispondenti a quelle su menzionate, non si osservano che sottili filamenti protoplasmatici, i quali dal ramo nervoso che provvede l' apparato di senso laterale e che gli è contiguo, si possono seguire, immediatamente sotto all' ectoderma, fino agli abbozzi delle ampolle; le quali allora sono costituite da due soli strati cellulari.

Però, in embrioni più avanzati rispettivamente a quelli citati sopra, i nuclei si sono inoltrati lungo i filamenti protoplasmatici inviati dai singoli rami nervosi e si sono avvicinati agli abbozzi ampollari, sotto ai quali si accumulano talvolta, anche in seguito a moltiplicazione, e formano una espansione a mo' di clava. Questi abbozzi si possono ben dire allora giovani ampolle, perchè hanno già cominciato a individualizzarsi corrispondentemente alle branche nervose che loro arrivano, e anche perchè gli elementi cellulari che li costituiscono hanno assunto disposizioni peculiari; sulle quali dirò più innanzi.

Voglio, invece, mettere subito in rilievo che le ampolle si formano dall' ectoderma in corrispondenza di altrettante sottili branche nervose loro inviate dagli stessi rami che dànno branche anche agli organi di senso laterale. Ma convien distinguere. Le branche nervose che provvedono questi ultimi organi hanno i loro punti di accrescimento negli abbozzi degli organi stessi, i quali, fino al loro completo sviluppo, servono loro da matrice. La cosa pare indubitata ora che ricerche recenti, eseguite su materiale vario, son venute ad appoggiare l' antica affermazione di Goette e Semper circa la derivazione diretta del *R. lateralis vagi* dall' ectoderma.

È a ritenersi adunque che il sistema dei nervi dell' intero apparato di senso laterale ha la sua origine nell' apparato stesso; come suol dirsi, la

sua formazione è centripeta. Ma mentre si può senz'altro considerare come tale la formazione del *R. lateralis vagi*, altrettanto semplicemente non può dirsi che siano costituiti gli altri tre rami del sistema: *R. ophthalm. superf.*, *R. buccalis* e *R. mandibul. ext.*; nella composizione dei quali entrano bensì, per gran parte, nervi di senso laterale, e che si originano nella stessa maniera che il *R. lateralis*, ma essi comprendono anche i nervi che vanno alle ampolle.

E questi nervi ampollari, a giudicare dal loro primo manifestarsi in forma di sottili filamenti protoplasmatici, e dalla posizione rispettiva che in essi occupano i nuclei negli stadî embrionali su contemplati, non possono che formarsi in direzione centrifuga. E poichè, a cominciare dall'abbozzo ampollare, il loro decorso può essere seguito prima sotto all'ectoderma (e più o meno accosto ad esso, secondo il grado di sviluppo), poi, in unione con una branca nervosa del vicino organo di senso laterale, fino al ramo di cui questa branca fa parte, ne viene la conclusione che *i rami nervosi di senso laterale e le singole branche che li collegano con gli apparati periferici possono servire come vie di conduzione per i nervi che provvedono le ampolle.* Le quali solo in tanto si sviluppano in certi tratti del peculiare ectoderma che fiancheggia gli abbozzi degli organi laterali, in quanto vi arrivino filamenti nervosi o cilindrassili embrionali. *Son questi nervi che danno occasione al formarsi delle ampolle.* Siamo autorizzati a concludere così dal fatto che in ben lunghi tratti di quell'ectoderma ove non giungono filamenti nervosi, ampolle non si sviluppano affatto.

Differenziamento ulteriore delle ampolle. — Subito dopo che nervi embrionali hanno raggiunto il peculiare ectoderma bistratificato (*stadio di ampolla indifferente*) che fiancheggia gli abbozzi degli organi laterali, avvengono in questo ectoderma le seguenti modificazioni.

1. Fra lo strato profondo e quello superficiale si insinuano cellule che provengono dal primo e si moltiplicano *in situ*, e riducono l'abbozzo ampollare tri-o pluristratificato (*stadio di ispessimento ectodermico*).

2. Le cellule dello strato profondo divengono alte, piramidate e si ordinano in un settore sferico, a convessità interna, intorno ad un centro nel quale esse convergono con le loro estremità assottigliate. I nuclei ovali hanno la stessa direzione dei corpi cellulari rispettivi e ne occupano la porzione periferica o basale. Questo speciale ordinamento si verifica in corrispondenza di ogni nervo ampollare. È lo *stadio di ampolla individualizzata*; nella quale le cellule basali disposte a settore sferico son destinate a formare l'ampolla propriamente detta. Al di sopra di esse si moltiplicano attivamente le cellule che la separano dallo strato superficiale.

In questo stadio le ampolle possono presentarsi:

o riunite in gruppi, assai vicine le une alle altre, quasi esse si fossero moltiplicate per scissione contemporanea di ampolle preesistenti, come av-

viene sull'arco ioideo per le ampolle che formeranno parte dei sottogruppi *g* e *h*; allora la branca nervosa del sottogruppo si è suddivisa in modo arborescente in tante sottobranche di cui ognuna fa capo ad un'ampolla;

o disposte in serie lineare, come le ampolle oftalmiche dei due sottogruppi *a* e *d*; allora la branca nervosa dopo aver provveduto un'ampolla, decorre oltre, parallelamente al vicino apparato di senso laterale a provvederne una seconda, una terza e così via.

3. In corrispondenza del centro in cui convergono le alte cellule dell'ampolla propriamente detta apparisce una piccola cavità, nella quale confluiscono poi altre cavità formantisi fra le cellule, immediatamente soprastanti, degli strati intermedî dell'abbozzo ampollare. La cavità unica diventa conica o piriforme, con la parte sottile compresa fra le alte cellule dell'ampolla propriamente detta. È lo *stadio di ampolla cava.* E per quanto sembra, la formazione della cavità è dovuta a disfacimento del plasma delle cellule, specialmente degli strati intermedî, che in quel punto, in seguito a continuata moltiplicazione, si comprimono a vicenda ed esercitano pressione anche sulle alte cellule dell'ampolla propriamente detta.

4. La cavità ampollare si allunga e le cellule degli strati intermedî le si dispongono intorno a formarle una doppia parete. È l'inizio del *dotto ampollare.* Lo strato epidermico superficiale, che non piglia parte alla formazione della parete del dotto, permane per qualche tempo.

5. Segue l'*allungamento del dotto ampollare*, ossia l'affondamento dell'ampolla nel mesenchima, obliquamente o parallelamente al tegumento, e nella stessa direzione donde le viene il nervo. Il lume del dotto è sottile, mentre la cavità dell'ampolla è larga e sferica. L'allungamento è dovuto, oltre che alla moltiplicazione delle cellule delle pareti del dotto, ad accrescimento e parziale introflessione degli strati profondi dell'ectoderma nel punto d'attacco. Quivi il dotto subisce una dilatazione; lo strato epidermico superficiale vien sollevato a volta e finisce per rompersi. Si forma così lo *sbocco ampollare.*

6. Ulteriori modificazioni avvengono nell'ampolla propriamente detta, prima per dilatazione della sua cavità, poi per la formazione di insaccature (al numero di sei in *Torpedo*) disposte in ordine circolare intorno al fondo dell'ampolla. È lo stadio definitivo di *ampolla con placca centrale e otricoli.*

Le ampolle in altre specie di Selaci. — La successione dei differenziamenti che presentano le ampolle in *Torpedo* durante il loro sviluppo, come è esposta qui sopra, riesce a conferma di gran parte delle mie ricerche del '91, ma le corregge per quel che riguarda gli stadî iniziali. Ed essa si scosta in più d'un punto da quella stabilita in un recente lavoro di Minckert [1] su serie incomplete di embrioni di *Spinax niger* e *Acanthias vulgaris.*

[1] W. Minckert, *Zur Topographie u. Entwicklungsgeschichte d. Lorenzini'schen Ampullen.* Anatomischer Anzeiger XIX Bd. n. 20, 1901.

Questo lavoro uscito dall'Istituto Zoologico di Jena e manchevole specialmente ri-

Serie incomplete di embrioni di *Pristiurus melanostomus* mi dimostrano che per quanto diverso sia il numero delle ampolle appartenenti ai varî sottogruppi e diverso pure sia l'ordine secondo il quale esse appariscono, pure non c'è divario essenziale con *Torpedo*, per quel che riguarda i primi momenti di loro formazione e i successivi differenziamenti fino a completo sviluppo.

Per quanto concerne *Mustelus laevis*, Allis [1] afferma di non aver trovata alcuna indicazione di ampolle in embrioni di 36 mm. Io posso assicurare, invece, che già in embrioni di 28 mm. si distinguono benissimo le ampolle sopraorbitali, le infraorbitali e le io-mandibolari, precisamente nello stadio di ampolla individualizzata.

E nello stesso stadio e in quello di ampolla cava trovo riccamente rappresentate le ampolle appartenenti ai medesimi tre gruppi, in un embrione di *Raja punctata* di 30 mm. di lunghezza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: Taramelli, Ferraris, Borzì, Maffucci, Fischer, Klein, Pflueger, Rosenbusch, Virchow; presenta inoltre il vol. III degli *Atti della Società per gli studi della malaria.*

Il Vicepresidente Blaserna presenta, a nome del Socio Tacchini, varie pubblicazioni del comandante Cattolica, accompagnando la presentazione colle seguenti notizie:

« L'ingegnere comandante Cattolica membro della Commissione geodetica italiana, che insegnava astronomia nautica e idrografia nella Regia Accademia navale di Livorno, fu chiamato a dirigere l'Istituto Idrografico della R. Marina in Genova fino dal 1897.

« Egli ha dato un nuovo ordinamento all'Istituto su basi più scientifiche, per modo che l'Istituto medesimo potesse concorrere al progresso degli studî di sua competenza.

« Il Cattolica, dopo assunta la direzione, ha compiuto la nuova idro-

---

guardo alla innervazione delle ampolle; contiene bensì un inutile sfoggio bibliografico (a cominciare dal secolo XVII) il quale non è altro che la ripetizione di ciò che si può leggere in qualunque opera precedente che tratti un po' diffusamente degli organi di senso laterale, ma non tiene conto nè della mia Nota del '91, nè di lavori recenti di altri (stampati in lingua tedesca e in giornali tedeschi), portanti chiaramente nel titolo l'espressione: *Ampolle di Lorenzini.*

[1] L. c. pag. 94.

grafia dell'Adriatico, che consta di 3 carte generali e di oltre 20 piani, lavori in gran parte già pubblicati.

« Egli inoltre ha eseguito molte determinazioni astronomiche e geodetiche, delle quali presenta all'Accademia alcune delle più importanti, quali:

1°) Determinazione della latitudine dell'Osservatorio della R. Accademia Navale di Livorno, fatta nel 1897, secondo il metodo di Talcott.

2°) Determinazione della latitudine dell'Osservatorio del R. Ufficio Idrografico, mediante passaggi di stelle al primo verticale, eseguita nel 1898.

3°) Stazione astronomica a San Cataldo di Bari eseguita nel 1898.

4°) Operazioni eseguite nell'anno 1899 per determinare la differenza di longitudine fra Livorno e Genova.

« Offre inoltre all'Accademia un esemplare del suo trattato di navigazione, che serve di testo alla R. Accademia da dieci anni ed a varî Istituti nautici del Regno, ciò che dimostra con quanto amore e competenza egli coltivi le discipline nautiche.

« Infine, credo di dover segnalare all'Accademia una nuova importante pubblicazione da lui iniziata, cioè gli Annali idrografici dei quali presento i due primi fascicoli, nel secondo dei quali trovasi anche la descrizione della nuova stazione meteorologica dell'Istituto Idrografico ».

Il Socio generale Ferrero, a nome della R. Commissione geodetica italiana da lui presieduta, offre la pubblicazione: *Collegamento geodetico delle isole Maltesi con la Sicilia*, e ne discorre.

Il Socio Volterra presenta, a nome dell'autore, due volumi del *Corso di Meccanica razionale* del prof. F. Caldarera.

Il Socio Betocchi fa omaggio di alcune pubblicazioni del prof. Berchet, colle seguenti parole:

« A nome dell'Autore, chmo cav. Federico Berchet Direttore dell'Ufficio Regionale per la conservazione dei monumenti del Veneto, ho l'onore di presentare all'Accademia la Relazione di tutti i lavori eseguiti ai monumenti della Regione Veneta durante gli esercizi 1899-900 e 1900-901.

« In pari tempo ho l'onore di presentare alcune sue pregievolissime monografie che riguardano le sale d'armi del Consiglio dei X nel palazzo Ducale di Venezia; la sala del maggior consiglio nello stesso palazzo; ed una geniale proposta di restauro e ripristinamento nello stato originario e nelle squisite forme architettoniche che aveva nel secolo XVI la loggia Veneziana di Candia comunemente detta dell'Armeria, che si ritiene opera del Sammicheli al quale il Senato Veneto aveva affidata la costruzione delle fortificazioni di quell'isola; loggia che attualmente si trova manomessa, mu-

tilata e deturpata per la incuria e per le modificazioni in essa introdotte durante il dominio Musulmano.

« Queste pubblicazioni, e sopratutto poi le predette monografie non possono a meno di essere di grandissimo interesse per tutti coloro i quali si occupano d'arte, ed in special modo della storia dell'arte italiana ».

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società Reale di Londra; la Società zoologica di Tokyo; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geografica del Cairo; la Società geologica di Manchester; l'Ufficio geodetico internazionale di Potsdam; l'Istituto Teyler di Harlem; l'Istituto Smithsoniano di Washington.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il Ministero della Guerra; le Società zoologiche di Ottawa e di Pietermaritzburg; l'Ufficio per la misura del grado, di Vienna.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 aprile 1902.

Alberti V. — Su la determinazione dei radianti. Napoli, 1901. 8°.

Id. — Sul clima di Napoli. Napoli, 1901. 4°.

Andoyer H. — Théorie de la Lune. Paris, 1902. 8°.

Atti della Società per gli Studî della malaria. Vol. III. Roma, 1902. 8°.

Barbarin P. — La Géométrie non euclidienne. Paris, 1902. 8°.

Bericht ueber die Feier von R. Virchow's achtzigstem Geburtstag am 13 Oktober 1901. Berlin, 1902. 8°.

Berlese A. — Sulle concrezioni cristalline contenute negli organi in dissoluzione e nelle sostanze albuminoidi in via di digestione nelle ninfe degli insetti metabolici. Jena, 1902. 8°.

Bombicci L. — Alcune obbiezioni circa i supposti cristalli liquidi ed i pretesi cristalli viventi. Bologna, 1901. 4°.

Id. — Di un sensibile aumento di volume negli aghetti di Rutilo (Sagenite) diffusi nei limpidi cristalli di Quarzo. Bologna, 1901. 4°.

Bombicci L. — Sui probabili modi di formazione dei cristalli di Granato. Bologna, 1902. 4°.

Bonomi A. — Il 5° Congresso zoologico internazionale di Berlino e l'escursione dei congressisti sul Mar del Nord. Rovereto, 1902. 8°.

Borzì A. — Contribuzioni alla Biologia vegetale. Vol. III, 1. Palermo, 1902. 8°.

Caldarera F. — Corso di meccanica razionale. Vol. I, II. Palermo, 1901. 8°.

Collegamento geodetico delle Isole Maltesi con la Sicilia. Firenze, 1902. 4°.

Curreri G. — Considerazioni intorno alla legge di Baer. Milano, 1902. 8°.

Id. — Osservazioni comparative sul Plancton Pelagico comparente nel porto di Messina. Messina, 1899. 8°.

Id. — Osservazioni sui Ctenofori comparenti nel porto di Messina. Roma, 1900. 8°.

Id. — Osservazioni sulla struttura dell'ectoderma dei Ctenofori. Roma, 1901. 8°.

Id. — Sulla formazione del Mar dei Sargassi. Milano, 1901. 8°

Id. — Sulla respirazione di alcuni insetti acquaiuoli. Roma, 1901. 8°.

Id. — Sulle cause meccanico-biologiche della formazione degli accumoli di Plancton. Roma, 1901. 8°.

D'Achiardi G. — Studio di alcune rocce sienitiche di Kadì-Kalé (prov. di Smirne). Pisa, 1902. 8°.

Ercolini G. — Due esperienze da lezione. Pisa, 1902. 8°.

Id. — Variazione della costante dielettrica del causciù con la trazione meccanica. Pisa, 1902. 8°.

Gegenbaur C. — Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere mit Berücksichtigung der Wirbellosen. II Bd. Leipzig, 1901. 8°.

Giglioli I. — Lo Stato italiano e la cultura del sughero specialmente nella Sardegna. Portici, 1902. 4°.

Gotta G. — Nuovi tipi di palloni dirigibili. Voltri, 1901. 4°.

Klein C. — Optische Studien II. Berlin, 1902. 8°.

Kölliker A. — Weitere Beobachtungen ueber die Hoffmann'schen Kerne am Mark der Vögel. Jena, 1902. 8°.

Le Moine E. Géométrographie ou art des constructions géométriques. Paris, 1902, 8°.

Leonardi Cattolica P. — Determinazione della latitudine dell'Osservatorio della R. Accademia Navale di Livorno, fatta nel 1897 secondo il metodo di Talcott. Genova, 1897. 4°.

Id. — Determinazione della latitudine dell'Osservatorio del R. Ufficio idrografico mediante passaggi di stelle al primo verticale eseguita nel 1898. Genova, 1898. 4°.

Id. — Operazioni eseguite nell'anno 1899 per determinare la differenza di longitudine fra Livorno e Genova. Genova, 1900. 4°.

Id. — Stazione astronomica a S. Cataldo di Bari. Genova, 1899. 4°.

Id. — Trattato di navigazione. Livorno, 1893. 8°.

Macé de Lépinay J. — Franges d'interférence. Paris, 1902. 8°.

Maffucci A. — Intorno alla diversità di decorso della tubercolosi congenita ed acquisita. Catania, 1902. 8°.

Id. — Ricerche sperimentali intorno alla tossina e bacilli tubercolari contenuti nella sperma di animali tubercolotici. Firenze, 1902. 8°.

Maggiora A. e *Valenti G. L.* — Su una epizoozia di tifo essudativo dei Gallinacei. Nota I. Modena, 1901. 4°.

Néculcéa E. — Le phénomène de Kerr. Paris, 1902. 8°.

Omboni G. — Appendice alla nota sui denti di *Lophiodon* del Bolca. Venezia, 1902. 8°.

Pflüger E. — Ueber die Verseifung, welche durch die Galle vermittelt wird und die Bestimmung von Seifen neben Fettsäuren in Gallenmischungen. Bonn, 1902. 8°.

Rajna M. — Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano in relazione col periodo delle macchie solari. Milano, 1902. 8°.

Raoult F. M. — Cryoscopie. Paris, 1901. 8°.

Reports to the Malaria Committee. 6th Series. London, 1902. 8°.

Riefler S. — Das Nickelstahl-Compensationspendel D. R. P. No. 100870. München, 1902. 8°.

Rosenbusch H. — Studien im Gneissgebirge des Schwarzwaldes. II. Die Kalksilikatfelse im Rench- und Kinzigitgneiss. Heidelberg, 1901. 8°.

Schuchardt C. — Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen. Hannover, 1902. f°.

Studî e ricerche istituite nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Università di Pisa. F. 17. Pisa, 1902. 8°.

Taramelli T. — La Lotta dei Titani nella Geologia. Pavia, 1902. 8°.

Virchow R. — Zur Erinnerung. Blätter des Dankes für meine Freunde. Berlin. 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 aprile 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura.* Nota del Corrispondente G. Ricci.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno.* Nota del dott. Tommaso Boggio, presentata dal Socio V. Cerruti.

In questa Nota espongo un procedimento assai semplice che permette di ottenere espressa, mediante integrali definiti, la funzione armonica nell'area esterna ad una data ellisse e che, sul contorno di questa, assume valori assegnati (1); e, più in generale, la funzione m-armonica in questa

(1) Nella Nota del prof. Morera: *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti*: « *Sull'espressione della gravità, ecc.* ». (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. III, 1° semestre 1894) è esposto un procedimento che permette di costruire la funzione armonica nel campo esterno od interno ad un dato ellissoide e che sul contorno assume gli stessi valori che un polinomio dato di secondo grado; tale funzione, dedotta dall'espressione della funzione potenziale dell'ellissoide, è espressa mediante integrali

stessa area e che, sul contorno, assume colle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini, dei valori dati.

I risultati precedenti si ottengono osservando che l'area esterna ad una data ellisse può trasformarsi, mediante una inversione per raggi vettori reciproci, nell'area interna ad una *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo, e quest'area, a sua volta, può rappresentarsi conformemente su un cerchio mediante polinomi.

1. Sia s' un'ellisse di fuochi F , F' ; diciamo σ' l'area esterna ad s', e supponiamo i suoi punti riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x' , y' di cui l'origine sia il fuoco F e l'asse Fx' sia l'asse focale.

Si tratta di costruire la funzione u', regolare in σ', e che soddisfa alle equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta'^2 u' = 0 \text{ in } \sigma' \\ u' = \Phi' \quad \text{su } s' , \end{cases} \qquad \left(\Delta'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right),$$

ove Φ' indica una funzione continua dei punti di s' , comunque assegnata.

Osserviamo perciò che se si riferiscono i punti di σ' alle coordinate polari (r' , φ), assumendo come polo il fuoco F e come asse polare l'asse focale Fx' , l'equazione polare di s' è:

$$(2) \qquad r' = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} ,$$

nella quale p indica il semiparametro, ed e l'eccentricità $(e < 1)$.

Supponendo, per semplicità, $p = 1$, e facendo una inversione per raggi vettori reciproci assumendo il fuoco F come centro dell'inversione, e supponendo eguale ad 1 il modulo di essa, si ha:

$$(3) \qquad r' r_1 = 1$$

$$(4) \qquad x_1 = \frac{x'}{r'^2} \quad , \quad y_1 = \frac{y'}{r'^2}$$

ove r_1 , φ ed x_1 , y_1 sono rispettivamente le coordinate polari e cartesiane del punto trasformato di (x' , y').

L'equazione (2) diventa pertanto:

$$(5) \qquad r_1 = 1 + e \cos \varphi ,$$

la quale, essendo $e < 1$, rappresenta una *Lumaca di Pascal* non passante

---

definiti. Per quanto riguarda il campo interno ad una ellisse o ad un ellissoide cfr. anche la mia Nota: *Sopra alcune funzioni armoniche o bi-armoniche in un campo ellittico od ellissoidico* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

pel suo polo; l'ellisse s' si è dunque trasformata, mediante l'inversione, nella curva s_1 data dalla (5), e l'area σ' esterna ad s' nell'area σ_1 interna ad s_1.

Chiamando u_1, Φ_1 le funzioni u', Φ' espresse mediante le variabili x_1, y_1, il sistema (1) potrà scriversi:

$$(6) \qquad \begin{cases} \Delta_1^2 u_1 = 0 \text{ in } \sigma_1, \\ u_1 = \Phi_1 \quad \text{su } s_1, \end{cases} \qquad \left(\Delta_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right).$$

Per risolvere il sistema precedente conviene fare la rappresentazione conforme dell'area σ_1 sopra un cerchio. Se indichiamo con σ il cerchio di raggio 1, appartenente al piano xy, e col centro nell'origine delle coordinate, la rappresentazione conforme di σ_1 sul cerchio σ si eseguisce colle formole [1]

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + x + \frac{e}{2}(x^2 - y^2) \\ y_1 = y + exy. \end{cases}$$

Infatti riferendo i punti del cerchio σ alle coordinate polari r, θ in modo che

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\text{sen}\,\theta,$$

le formole precedenti possono anche scriversi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + r\cos\theta + \frac{e}{2} r^2 \cos 2\theta \\ y_1 = r\,\text{sen}\,\theta + \frac{e}{2} r^2 \,\text{sen}\, 2\theta, \end{cases}$$

onde, per $r = 1$, cioè alla circonferenza s di σ, corrisponde la curva:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + \cos\theta + \frac{e}{2}\cos 2\theta \\ y_1 = \text{sen}\,\theta + \frac{e}{2}\,\text{sen}\, 2\theta, \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x_1 = (1 + e\cos\theta)\cos\theta \\ y_1 = (1 + e\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta, \end{cases}$$

cioè:

$$r_1 = 1 + e\cos\theta,$$

che è precisamente la (5).

[1] Almansi, *Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana*, ecc. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIII, a. 1899).

Se diciamo u, Φ le funzioni u_1, Φ_1 espresse mediante le variabili x, y, il sistema (6) si trasforma in quest'altro

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = 0 \text{ in } \sigma, \\ u = \Phi \quad \text{su } s, \end{cases} \qquad \left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

In tal modo abbiamo dunque ricondotto la risoluzione del problema di Dirichlet nell'area σ' esterna all'ellisse s' alla risoluzione del problema di Dirichlet per l'area circolare σ (1).

2. Si voglia ad es. costruire la funzione u', armonica nell'area σ', e che sul contorno s' assume gli stessi valori della funzione $\frac{1}{r'^2}$.

Dovremo porre $\Phi' = \frac{1}{r'^2}$, onde il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} \Delta'^2 u' = 0 \text{ in } \sigma' \\ u' = \dfrac{1}{r'^2} \quad \text{su } s'; \end{cases}$$

facendo la trasformazione (3), (4) esso si muta nel seguente, analogo al (6):

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u_1 = 0 \text{ in } \sigma_1 \\ u_1 = r_1^2 \quad \text{su } s_1; \end{cases}$$

applicando le (7) ed osservando che sulla circonferenza s si ha:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{e^2}{2} + 1 + e\,x + \frac{e^2}{2}(x^2 - y^2) + e\,x = 1 + e\,x + e\,x_1,$$

si otterrà, dal sistema precedente, quest'altro, analogo all'(8):

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \sigma \\ u = 1 + e\,(x + x_1) & \text{su } s; \end{cases}$$

e poichè la funzione $1 + e\,(x + x_1)$ è armonica, si può porre, in ogni punto del cerchio σ:

$$(9) \qquad u = 1 + e\,(x + x_1).$$

Cerchiamo ora la funzione u_1, cioè la funzione u espressa mediante le variabili x_1, y_1; dobbiamo perciò esprimere anzitutto x, y in funzione di x_1, y_1.

(1) Ponendo: $z' = x' - iy'$, $z = x + iy$, la rappresentazione conforme di σ' su σ è data dalla formola:

$$z' = \frac{2}{e + 2\,z + e\,z^2}.$$

Dalle (7), eliminando x, si ha l'equazione:

$$e^2 y^4 + (1 - e^2 + 2 e x_1) y^2 - y_1^2 = 0 ,$$

che fornisce per y^2 due valori, uno positivo e l'altro negativo; si dovrà tener conto solo del valore positivo che è:

$$y^2 = \frac{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}}{2 e^2} ;$$

ne viene:

$$y = \pm \frac{1}{e\sqrt{2}} \sqrt{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}} ;$$

è poi chiaro che y ed y_1 devono avere lo stesso segno.

Sostituendo nella seconda delle (7), che può scriversi: $1 + e x = \frac{y_1}{y}$, si ha:

$$1 + e x = \frac{e y_1 \sqrt{2}}{\sqrt{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + 2 e x_1 + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) x_1 + 4 e^2 r_1^2}} .$$

Abbiamo così x , y in funzione di x_1 , y_1; quindi la (9) porge:

$$u_1 = e x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + 2 e x_1 + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) x_1 + 4 e^2 r_1^2}} .$$

Passando infine dalle variabili x_1 , y_1 alle x' , y' mediante l'inversione (4) e poi introducendo le coordinate polari r' , φ, si ha:

$$u' = \frac{e \cos \varphi}{r'} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + \frac{2 e \cos \varphi}{r'} + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) \frac{\cos \varphi}{r'} + \frac{4 e^2}{r'^2}}} .$$

Questa espressione di u' è quella cercata.

È infatti facile verificare che questa funzione è armonica in σ', inoltre nei punti di s' ha per valore $\frac{1}{r'^2}$, infine per $r' = \infty$ assume il valore $\sqrt{1 - e^2}$, onde, seguendo una nota denominazione (1), si può dire che la funzione u' è regolare all'infinito; quindi essa soddisfa a tutte le condizioni poste.

(1) Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, chap. II.

3. Determiniamo ora la funzione u', regolare nell'area σ', e che soddisfa alle equazioni:

$$(10)\qquad \begin{cases} \Delta'^4 u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ u' = \Phi', \dfrac{\partial u'}{\partial n'} = \Psi' & \text{su } s', \end{cases} \qquad (\Delta'^4 = \Delta'^2 \Delta'^2),$$

in cui n' indica la normale interna a σ', e Φ', Ψ' sono funzioni date dei punti di s' (1).

Converrà fare l'inversione (4) e il cambiamento di funzione espresso dalla formola:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{r'^2},$$

perchè in tal caso si avrà, come è noto (2):

$$\Delta_1^4 u_1 = r'^6 \Delta'^4 u',$$

quindi il sistema (10) si muterà nel seguente:

$$\begin{cases} \Delta_1^4 u_1 = 0 & \text{in } \sigma_1 \\ u_1 = \Phi_1, \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} = \Psi_1 & \text{su } s_1, \end{cases}$$

ove n_1 è la normale interna all'area σ_1, limitata dalla curva s_1, che, come si vide nel § 1, è una *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo, e Φ_1, Ψ_1 sono funzioni date dei punti di s_1.

La funzione u_1, come è noto (3), può ottenersi espressa mediante integrali definiti trasformando, per mezzo delle (7), l'area σ_1 nell'area circolare σ.

4. Più in generale, si voglia determinare la funzione u', regolare in σ' e che soddisfa alle equazioni

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta'^{2m} u' = 0 \text{ in } \sigma' \\ \dfrac{\partial^i u'}{\partial n'^i} = \Phi'_i \quad \text{su } s', \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1),$$

le Φ'_i essendo funzioni date nei punti di s'.

(1) Il problema analogo per l'area interna all'ellisse s' l'ho risolto nella mia Nota: *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2\Delta^2 = 0$ *in un'area ellittica* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

(2) Levi-Civita, *Sopra una trasformazione in sè stessa dell'equazione* $\Delta_2\Delta_2 = 0$ (Id., t. IX, serie VII, a. 1898).

(3) Almansi, Memoria citata. Cfr. anche Almansi, *Integrazione della doppia equazione di Laplace* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. IX, 1° semestre, 1900).

Converrà eseguire l'inversione (4) e il cambiamento di funzione:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{r'^{2m-2}},$$

perchè in tal caso, come è noto (1), se si ha $\Delta'^{2m} u' = 0$, sarà pure: $\Delta_1^{2m} u_1 = 0$; per conseguenza il sistema (11) si trasforma nel seguente:

$$\begin{cases} \Delta_1^{2m} u_1 = 0 \text{ in } \sigma_1 \\ \dfrac{\partial^i u_1}{\partial n_1^i} = \Phi_{1i} \text{ su } s_1, \qquad (i = 0, 1, \dots, m-1), \end{cases}$$

le Φ_{1i} indicando funzioni date nei punti di s_1.

La funzione u_1 che soddisfa a queste equazioni può ottenersi espressa per mezzo di integrali definiti (1), trasformando, mediante le (7), l'area σ_1 nel cerchio σ.

5. Consideriamo infine l'area S interna alla curva di equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = (X^2 + Y^2)^2,$$

ove X, Y sono le coordinate cartesiane ortogonali di un punto, ed a, b sono costanti. Mediante una inversione, per raggi vettori reciproci, di centro l'origine delle coordinate X, Y, la curva precedente può trasformarsi in un'ellisse s' e l'area S nell'area σ' esterna a tale ellisse.

Per quanto precede si conclude che si può sempre ottenere espressa con integrali definiti, la funzione m-armonica in S e che al contorno assume, colle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini, dei valori assegnati.

Meccanica. — *Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il prof. T. Levi-Civita, in una Nota comunicata a questa R Accademia (2), ha enunciato e dimostrato un notevole teorema, il quale insegna a determinare delle soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano, quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante.

Siano $q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n$ le due serie di variabili che definiscono lo stato di moto di un sistema olonomo a legami indipendenti dal tempo,

(1) Volterra, *Sulle funzioni poli-armoniche* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LVII, a. 1899).

(2) *Sulla determinazione di soluzioni particolari*, ecc. Rendiconti della Classe di sc. fis., mat. e nat., vol. X, serie 5ª, 1901.

e soggetto a forze conservative; talchè le equazioni del moto sono

$$(0) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \ (i = 1\ ,\ \ldots\ n),$$

ove H non dipende da t. Supponendo di conoscere k integrali o relazioni invarianti di tal sistema in involuzione tra loro, non contenenti il tempo, e risolubili rispetto ad altrettante p (per es. $p_1\ ,p_2\ ,\ldots p_k$), il teorema in parola si enuncia così: *Se* H_1 *è ciò che diviene* H *quando alle* $p_1\ ,p_2\ ,p_k$ *si sostituiscono le espressioni dedotte dagli integrali o relazioni invarianti conosciute, le relazioni*

$$(1) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial H_1}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = k + 1\ ,\ \ldots\ n)$$

insieme a quelle supposte note costituiscono un sistema invariante rispetto all'equazioni canoniche.

Di qui risulta, che dalle (1) e dalle k relazioni note, supposte tutte indipendenti tra loro, si potranno ricavare le p e le $q_{k+1}\ ,\ldots.\ q_n$ in funzione delle $q_1\ ,q_2\ ,\ldots\ q_k$; talchè fatte le sostituzioni nel sistema canonico (0), si otterrà un sistema ridotto di k equazioni, atto a definire le $q_1\ ,q_2\ ,\ldots\ q_k$ in funzione del tempo. Le soluzioni particolari dedotte in questa maniera corrispondono a *moti stazionarî* del sistema, nel senso attribuito a questa espressione dal Routh e completato dal Levi-Civita [1].

L' importanza che ha senza dubbio l'enunciato teorema, rende manifesta l' utilità di collegarne la deduzione alla teoria generale delle equazioni differenziali, e in particolare a quella dei sistemi Hamiltoniani. Questo è quanto ho voluto fare nello scrivere la Nota che ho l'onore di presentare a questa R. Accademia. Avvertirò che dai miei calcoli e ragionamenti il teorema risulta alquanto più esteso; poichè, quando non sono soddisfatte le condizioni necessarie all'esistenza delle soluzioni stazionarie del Levi-Civita, ma ne sono soddisfatte certe altre, si possono ancora determinare delle classi di soluzioni particolari, che però in generale non sono stazionarie.

1. Consideriamo il sistema d'equazioni ai differenziali totali

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx_{m+1} &= b_{11}\,dx_1 + b_{12}\,dx_2 + \cdots + b_{1m}\,dx_m \\ dx_{m+2} &= b_{21}\,dx_1 + b_{22}\,dx_2 + \cdots + b_{2m}\,dx_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_{m+n} &= b_{n1}\,dx_1 + b_{n2}\,dx_2 + \cdots + b_{nm}\,dx_m\ , \end{aligned}$$

[1] *Sui moti stazionarî dei sistemi olonomi.* Rendiconti della Classe di sc. fis., mat. e nat., vol. X, serie 5ª, 1901.

ove si riguardano le $x_1, x_2, \dots x_m$ come variabili indipendenti, $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+n}$ come funzioni di quelle variabili, e i coefficienti b_{rs} funzioni di tutte le variabili $x_1, \dots x_{m+n}$. Posto

$$X_r(f) = \frac{\partial f}{\partial x_r} + b_{1r}\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + b_{nr}\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}},$$

le condizioni

$$X_r(b_{is}) = X_s(b_{ir}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots n \\ r, s = 1, 2, \dots m \end{pmatrix} \tag{3}$$

sono necessarie e sufficienti affinchè il sistema (2) sia completamente integrabile. Supponendo soddisfatte queste condizioni, vediamo se è possibile di determinare delle soluzioni particolari, tali che le x_{m+s} non dipendano da una delle variabili, per es. dalla x_1.

Dovranno pertanto essere nulle le derivate delle x_{m+s} rispetto a x_1; cioè le equazioni

$$b_{11} = 0, b_{21} = 0 \dots b_{n1} = 0 \tag{4}$$

dovranno essere identicamente soddisfatte per quelle espressioni delle x_{m+s}, che rappresentano le soluzioni particolari in discorso. Le quali dunque, se esistono, si devono dedurre dalle (4) con operazioni puramente algebriche, e quindi le b_{r1} non dovranno contenere x_1. Resta a vedere se le espressioni delle x_{m+s}, così dedotte, soddisfano il sistema ridotto

$$\begin{aligned} dx_{m+1} &= b_{12}\,dx_2 + \dots + b_{1m}\,dx_m \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_{m+n} &= b_{n2}\,dx_2 + \dots + b_{nm}\,dx_m . \end{aligned} \tag{2'}$$

Basterà perciò che il differenziale totale di b_{r1} $(r = 1, 2, \dots n)$ sia identicamente nullo in virtù delle (2') e delle (4). Ora si ha

$$d\,b_{r1} = \sum_{i=2}^{m}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_i}\,dx_i + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_{m+s}}\,dx_{m+s}$$

$$= \sum_{i=2}^{m}\left\{\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n} b_{si}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_{m+s}}\right\}dx_i ,$$

ossia

$$d\,b_{r1} = \sum_{i=2}^{m} X_i(b_{r1})\,dx_i ;$$

ma

$$X_i(b_{r1}) = X_1(b_{ri}) ,$$

quindi

$$d\,b_{r1} = \sum_{i=2}^{m} \mathrm{X}_1\,(b_{ri})\,dx_i\,.$$

Essendo

$$\mathrm{X}_1\,(b_{ri}) = \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_1} + b_{11}\,\frac{\partial b_{ri}}{\partial x_{m+1}} + \cdots + b_{n1}\,\frac{\partial b_{ri}}{\partial x_{m+n}}\,,$$

si vede facilmente che esso sarà identicamente nullo in virtù delle (4) quando sia $\frac{\partial b_{ri}}{\partial x_1} = 0$, quando cioè le b_{ri} non contengono la x_1. Si conclude: *Se i coefficienti del sistema* (2) *completamente integrabile non contengono la variabile indipendente* x_s, *le equazioni*

$$b_{s1} = 0\,,\ b_{s2} = 0\,,\ \ldots\ b_{sn} = 0\,,$$

che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti di dx_s, *somministrano una soluzione particolare del sistema proposto.*

2. Di questo teorema ce ne serviremo ora per determinare delle soluzioni particolari del sistema Hamiltoniano (0), quando se ne conoscono k integrali in involuzione.

Siano

$$(5) \qquad p_1 - \varphi_1 = 0\,,\ p_2 - \varphi_2 = 0\,,\ \ldots\ p_k - \varphi_k = 0$$

gl' integrali in parola risoluti rispetto a $p_1\,, p_2\,..\,p_k$, ove le φ saranno in generale funzioni delle rimanenti p, di tutte le q e di t. Anche la funzione H potrà contenere t; giacchè noi togliamo per ora le restrizioni che abbiamo enunciate in principio sul sistema olonomo che dà luogo alle (0). Ciò posto, decomponiamo il sistema Hamiltoniano nei tre gruppi seguenti, contradistinti dalle indicazioni (a), (b), (c):

$$(a) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}\,,\ \ldots\ldots\ \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}$$

$$(b) \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}\,,\ \ldots\ldots\ \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}$$

$$(c) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\,,\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\ (i = k+1\,,\ \ldots\ n)\,.$$

Se nelle equazioni del 2° gruppo si sostituiscono alle $p_1\,, p_2\,, \ldots p_k$ le funzioni φ, e si tien conto delle (a) e (c), si trova

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_r} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_s}\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_s} + [\varphi_r\,, \mathrm{H}]_{k+1} = 0\,,\ (r = 1\,, 2\,, \ldots\ k)\,,$$

ove l'indice $k+1$ nella parentesi di Poisson sta ad indicare che la sommatoria, rappresentata da quel simbolo, va estesa da $k+1$ fino ad n. Indicando poi con H′ ciò che diventa H dopo aver sostituito le φ_r alle p_r, si deducono subito le relazioni:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_s} &= \frac{\partial H'}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_s} \qquad (s = 1, 2, \dots n) \\ \frac{\partial H}{\partial p_s} &= \frac{\partial H'}{\partial p_s} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s} \qquad (s = k+1, \dots n). \end{aligned}$$

Le quali, combinate opportunamente con le precedenti, conducono, dopo calcoli facili e ben noti (1), alle relazioni seguenti:

$$(7)\qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial q_r} + [\varphi_r, H']_{k+1} = 0 \quad , \quad (r = 1, 2, \dots k)$$

che devono essere identicamente soddisfatte.

Consideriamo ora l'equazioni (c), le quali in virtù delle (6) diventano

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i} - \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} \end{aligned} \qquad (i = k+1, \dots n),$$

ove bisognerà immaginare sostituite nelle sommatorie le φ_s alle p_s. Vediamo se è possibile definire le p_i e q_i $(i = k+1, \dots n)$ in funzione di $t, q_1, q_2, \dots q_k$ in guisa che queste equazioni risultino soddisfatte in virtù delle (a). Dovrà essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial H'}{\partial p_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_r} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i}\right) &= 0 \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_r} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i}\right) &= 0 \end{aligned} \qquad (i = k+1, \dots n).$$

A queste si soddisfa definendo le p_i e q_i mediante il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}\ , \ \frac{\partial q_i}{\partial q_r} = -\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} \qquad (i = k+1, \dots n) \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i}\ , \ \frac{\partial p_i}{\partial q_r} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} \qquad (r = 1, 2, \dots k), \end{aligned}$$

(1) Vedi in particolare la Nota citata del Levi-Civita.

il che sarà possibile, quando per le equazioni ai differenziali totali

$$(8)\qquad \begin{aligned} dq_i &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}\,dt - \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i}\,dq_r \\ dp_i &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i}\,dt + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i}\,dq_r\,, \end{aligned} \qquad (i = k+1, \ldots n)$$

che equivalgono a quel sistema, siano soddisfatte le condizioni d'integrabilità. È facile vedere che ciò avviene, ricorrendo alle (7) e alle condizioni d'involuzione. Questo, del resto, è ben noto; ed è anche noto che dalle (8) si deducono conseguenze importanti per la teoria generale dei sistemi Hamiltoniani.

Ma, giunti a questo punto, ci possiamo proporre di determinare delle soluzioni particolari delle (8); per esempio delle soluzioni in cui le q_i e p_i sieno funzioni di $q_1, q_2, \ldots q_k$ e non di t. In virtù del teorema dimostrato nel paragrafo precedente, ciò sarà possibile quando i coefficienti delle (8) non contengono t; quando cioè H′ e le φ non dipendono da t. Stando in queste ipotesi, il teorema ricordato ci dice che le soluzioni particolari sono definite dalle equazioni:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0\,, \qquad (i = k+1, \ldots n)$$

che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti di dt. Queste equazioni insieme alla (a) e (5) definiscono ∞^{2k} moti, che sono i moti stazionarî indicati dal Levi-Civita. Così la ricerca di questi moti è direttamente collegata alla classica teoria dei sistemi Hamiltoniani.

Più generalmente possiamo supporre che H′ e le φ, pur contenendo il tempo, non dipendano da una delle variabili $q_1, q_2, \ldots q_k$, per esempio dalla q_r. In tal caso il sistema (8) ammetterà la soluzione particolare definita dalle equazioni:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = k+1, \ldots n);$$

le quali unite alle (a) e (5) definiranno ∞^{2k} moti particolari del sistema dinamico. Questi moti però non saranno, in generale, moti stazionarî.

Matematica. — *L'ordine della varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico.* Nota del prof. Francesco Palatini, presentata dal Socio Segre.

In una interessante Nota (1) il prof. Segre, partendo da due importanti formole date dal sig. H. Schubert, risolve i due seguenti problemi « Determinare gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti: 1° da una matrice qualsiasi con elementi affatto generici; 2° da una matrice quadrata simmetrica ». Un altro caso notevole da esaminare è quello della varietà che annulla i subdeterminanti del grado $2r+2$ (e quindi anche quelli del grado $2r+1$) di un dato determinante emisimmetrico del grado $n+1$. La dimensione di questa varietà è $r(2n-2r+1)-1$, il che può vedersi p. e. applicando il teor. II del § V della Memoria, *Ueber dass Pfaffsche Problem*, del Frobenius (2).

La questione di cui ci occupiamo equivale a quest'altra. Si considerino in uno spazio $[n]$ tutti gli ∞^m $\left(\text{porremo } m=\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)$ complessi lineari di rette (3), e per semplicità di linguaggio si rappresentino linearmente coi punti di un $[m]$. Ciascun complesso dà luogo ad un sistema nullo, cioè ad una reciprocità tale che ogni punto sta nell' iperpiano che gli corrisponde, e il determinante di questa reciprocità è un emisimmetrico del grado $n+1$. Se tutti i minori di grado $2r+2$ si annullano, allora il complesso è degenere, e precisamente possiede uno spazio-centro di dimensione $n-2r$, uno spazio tale cioè che ogni retta ad esso incidente appartiene al complesso. Si tratta dunque di trovare l'ordine, che indicheremo con x_{n-2r}, della varietà, che rappresenteremo con $V^{(n-2r)}_{r(2n-2r+1)-1}$, di $[m]$ la quale corrisponde all' insieme di quei complessi di $[n]$ che sono dotati di $[n-2r]$-centro (almeno). Per $n=2q+1$, $r=q$ si vede immediatamente che la nostra varietà è di ordine $q+1$, cioè che sono $q+1$ i complessi di un fascio generico di complessi di $[n]$ (corrispondente ad una retta generica di $[m]$) dotati di retta-centro (4). Per $n=2q$, $r=q-1$

(1) *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Acc. Lincei, 1900, serie 5ª, vol. IX.

(2) Crelle, vol. 82, 1876.

(3) In seguito si dirà *complesso* semplicemente in luogo di *complesso lineare di rette*.

(4) Cfr. Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*, Atti Ist. Ven., 1891, serie VII, vol. 2°.

si ha che l'ordine cercato è $\frac{q(q+1)(2q+1)}{6}$, perchè generalizzando il procedimento seguito dal prof. Castelnuovo nel n. 10 del citato lavoro, si trova che appunto questo è il numero dei complessi di $[2q]$ dotati di piano-centro contenuti in un sistema triplo generico di complessi di $[n]$ (corrispondente ad un $[3]$ generico di $[m]$).

Nello studio dei sistemi lineari di complessi di $[n]$ ha una speciale importanza la varietà M^r_{m-1} (di dimensione $m-1$ e ordine r) che in $[m]$ corrisponde all'insieme dei complessi di $[n]$ passanti per i complessi degeneri di un dato $[2r-1]$ (1). Con M^1_{m-1} sarà da intendersi l'iperpiano che corrisponde all'insieme dei complessi passanti per una data retta. Ora mediante ovvia generalizzazione del ragionamento contenuto nel n. 3 di una mia Nota (2) si trova subito $x_{n-2} = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$

Venendo ora alla $V^{(n-4)}_{4n-7}$ $(r=2)$, seghiamola con $2n-6$ varietà M^2_{m-1} relative ad altrettanti spazi $[3]$ di $[n]$, e otterremo una varietà di dimensione $2n-1$ e ordine $2^{2n-6}x_{n-4}$ che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a quei $2n-6$ spazi $[3]$ e che indicheremo con W_{2n-1}. Generalizzando, ciò che è ben facile, il ragionamento del n. 4, V, α della mia Nota citata vedesi che per questa varietà la $V^{(n-2)}_{2n-2}$ è multipla secondo il numero $\frac{(2n-6)!}{(n-3)!\,(n-2)!}$, per cui segandola con un'altra M^2_{m-1} si otterrà, oltre alla $V^{(n-2)}_{2n-2}$ contata un tal numero di volte, una varietà, che indicheremo con W_{2n-2}, la quale corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a $2n-5$ spazi $[3]$ ed ha per ordine $2^{2n-}x^5{}_{n-4} - \frac{(2n-6)!}{(n-3)!\,(n-2)!}x_{n-2}$. Ed ora continuando a generalizzare il ragionamento del n. 4, V, β, γ, δ della stessa Nota si giunge ad una varietà, che indicheremo con W_5 di dimensione 5, che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a $4(n-3)$ spazi $[3]$ ed il cui ordine è dato da

$$2^{4(n-3)}x_{n-4} - 2^{2n-7}\frac{(2n-6)!}{(n-3)!\,(n-2)!}x_{n-2} - \sum_{h=1}^{h=2n-7}(2^{2n-7-h}x_{n-4,\,n-2,\,h})$$

(1) Analoga importanza ha per lo studio dei sistemi lineari di quadriche di dimensione $n-1$ di $[n]$ la varietà di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}-1$ e ordine $r+1$ formata da quelle di queste quadriche che passano per le quadriche degeneri di dimensione $r-1$ di un dato $[r]$.

(2) *Sui sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio a cinque dimensioni*, Atti Ist. Ven., 1900, t. 60.

dove $x_{n-4,\,n-2,\,h}$ rappresenta l'ordine della varietà $U^{(n-4),\,(n-2),\,h}$ che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-2]$-centro contenente un $[n-4]$ appoggiato a $2n-6+h$ spazi $[3]$. L'ordine di quest'ultima varietà, sempre tenendo presente il luogo citato della detta Nota, trovasi esser rappresentabile col simbolo

$$(2\,,3\,,\cdots,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{2n-6+h}\,\mu_{n-2}^1\,\mu_{n-1}^{2n-2-h}\ (^1)$$

il quale, in virtù del principio di dualità, equivale a

$$(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}$$

Se ora osserviamo che a $4(n-3)$ spazi $[3]$ è incidente un numero finito di spazi $[n-4]$, numero che è ben noto e che noi per ottenere maggior omogeneità nelle formole rappresenteremo (il che, com'è facile a vedersi, è lecito) con $(4,5,\cdots,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{4(n-3)}$ al qual simbolo per la legge di dualità possiamo sostituire quest'altro $(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\,\mu_3^3\,\mu_4^{4(n-3)}$ che equivale a $\frac{1}{2}(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^4\,\mu_3^1\,\mu_4^{4(n-3)}$; e se notiamo inoltre che ciascuno di questi $[n-4]$ è centro per ∞^5 complessi formanti un sistema lineare al quale in $[m]$ corrisponde un $[5]$, per cui la W_5 si compone di tanti spazi $[5]$ quanti sono indicati dal numero ultimamente scritto, il quale esprime perciò esso pure l'ordine di questa varietà; e se infine consideriamo che è

$$\frac{(2n-6)!}{(n-3)!\,(n-2)!}\cdot\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}=(2\,,3\,\cdot\,,n)\,\mu_1^1\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{2n-6}\,\mu_{n-2}^1\,\mu_{n-1}^{2n-2}=$$

$$=(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6}$$

possiamo scrivere

$$(1)\quad 2^{4(n-3)+1}\,x_{n-4}=\sum_{h=0}^{h=2n-6}[2^{2n-6-h}(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}]$$

Ora sviluppando $(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}$ mediante la formola (16) del citato lavoro dello Schubert, ed applicando alcune convenienti riduzioni, risulta

$$2^{4n-11}\,x_{n-4}=$$

$$=\frac{2^2.1!\,3!\,(2n-6)!\,(2n-6)!}{(n-3)!\,(n-2)!\,(n-1)!\,n!}\cdot\sum_{h=0}^{h=2n-6}[2^{2n-6-h}(2n-6+h)_{2n-6}(2n-2-h)_4]$$

(1) Per quanto riguarda il significato di questo simbolo vedasi H. Schubert, *Allgemeine Anzahlfunctionen* ecc., § 4, Math. Ann., t. 45, 1894.

e siccome applicando la formola

$$(2m)_m (2n)_{2n} + 2(2m-1)_m (2n+1)_{2n}$$
$$+ 2^2 (2m-2)_m (2n+2)_{2n} + \cdots + 2^m m_m (2n+m)_{2n} = 2^{2m} (m+n)_n$$

la sommatoria dà per risultato $2^{4n-13}(2n-5)(2n-4)$, così in conclusione si ricava

$$x_{n-4} = \frac{1!\,3!\,(2n-6)!\,(2n-4)!}{(n-3)!\,(n-2)!\,(n-1!)\,n!}$$

Ed ora generalizzando il ragionamento precedente, si arriva senza difficoltà ad ottenere il valore di x_{n-2r} mediante una formola del tipo della (1), la quale però non apparisce semplificabile facilmente. Ad ogni modo le espressioni qui trovate per x_{n-2}, x_{n-4} ci permettono di intuire che sarà

$$x_{n-2r} = \frac{[1!\,3!\,\ldots\,(2r-1)!]\cdot[(2n-4r+2)!\,(2n-4r+4)!\,(2n-2r)!]}{(n-2r+1)!\,(n-2r+2)!\,\ldots\,(n-1)!\,n!}\ (1)$$

e con tanto maggior sicurezza possiamo asserire ciò in quanto che per $n = 2q+1$, $r = q$ e per $n = 2q$, $r = q-1$ quest'espressione ci fornisce i valori sopra indicati e trovati per altra via, mentre per $n = 2q$, $r = q$ e per $n = 2q+1$, $r = q+1$ essa diventa eguale ad 1, ciò che precisamente dev'essere.

Meccanica. — *La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il prof. Somigliana in una recente Nota (Rend. Acc. Lincei, febbraio 1902), di cui certo non è sfuggita l'importanza ai cultori di Fisica matematica, ha indicato un metodo semplice e diretto per risolvere il problema della deformazione di un diedro retto isotropo o cristallino, con due piani di simmetria, allorchè sulle due superficie limiti sono note parte degli spostamenti e parte delle forze.

Il caso in cui sono dati o i soli spostamenti o le sole forze sfugge al metodo del Somigliana; nè sembra facile la sua trattazione col metodo generale Betti-Cerruti. Nel caso in cui si conoscano gli spostamenti superficiali, il problema è stato risoluto assai elegantemente dal prof. Tedone (Rend. Acc. Lincei, dicembre 1901) per via di approssimazioni successive; forse al problema stesso potrebbe applicarsi con successo il così detto metodo alternante,

(1) Quest'espressione coincide, a meno del fattore 2^{n-2r} con la prima delle (4) del citato lavoro del Segre.

partendo dalle formole della deformazione di un suolo isotropo indefinito (Problema di Boussinesq e Cerruti).

Tuttavia il metodo generale suddetto conduce con grandissima facilità alla risoluzione dei nuovi problemi del Somigliana; ed è ciò che, in breve, mi propongo di mostrare in questa Nota. Mi varrò costantemente, come in altri miei lavori, dei metodi e delle notazioni delle note *Ricerche* ecc. del Cerruti e della sua Memoria *Sulla deformazione* ecc. (Rend. Acc. Lincei, giugno 1888).

I. L'asse y sia lo spigolo del diedro isotropo i cui piani contengano le direzioni positive dei due semi-assi x e z: accenneremo con σ_1 il semipiano $x = 0$ e con σ_2 il semipiano $z = 0$; M è un punto qualunque di coordinate (x, y, z) variabile nello spazio S del diedro; $M_1 (x_1 y_1 z_1)$ un altro punto fisso dello stesso spazio. Siano: M_1' la immagine di M_1 rispetto σ_1; M_1'' e M_1''' rispettivamente le immagini di M_1' ed M_1 rispetto σ_2 e diciamo r, r_1, r_2, r_3 le distanze del punto M da M_1, M_1', M_1'', M_1'''; sicchè abbiamo:

$$r^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2;\ r_1^2 = (x+x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$
$$r_2^2 = (x+x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2;\ r_3^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2$$

Consideriamo ora le seguenti funzioni di x, y, z, armoniche in tutto S,

$$G = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\ ; \qquad G' = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}$$
$$G_1 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}\ ; \qquad G_3 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\ .$$

Osservando che si ha:

per	$x = 0$	$r = r_1$,	$r_2 = r_3$
»	$z = 0$	$r = r_3$,	$r_2 = r_1$

si deduce che sopra σ_1 e σ_2 la funzione G è tale che

$$G = \frac{1}{r}$$

La G è quindi la funzione di Green relativa allo spazio S; e mediante questa è possibile assegnare, in un punto qualunque del campo, il valore di una funzione uniforme in S e che all'infinito soddisfa a certe note condizioni di convergenza, allorchè sono noti il valore del Δ_2 in ogni punto del campo e i valori della funzione al contorno. Applicando una formola ben nota si ha:

$$2\pi u(x_1 y_1 z_1) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)u\,d\sigma_1 - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)u\,d\sigma_2 - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G\right)\Delta_2 u\,dS.$$

La funzione G′ soddisfa al contorno alle condizioni seguenti:

$$x=0\ ,\ \frac{\partial G'}{\partial x}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ \ ;\ \ z=0\ ,\ \frac{\partial G'}{\partial z}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\ ;$$

quindi la G′ è una funzione analoga a quella di Green relativa allo stesso spazio e che permette risolvere il problema precedente, allorchè però in superficie sono noti i valori della derivata normale di u; infatti si trova:

$$2\pi u(x_1y_1z_1)=-\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}d\sigma_1-\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial u}{\partial z}d\sigma_2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G'\right)\Delta_2 u\,dS\,.$$

La funzione G_1, a sua volta, soddisfa al contorno alle condizioni:

$$x=0\ \ ,\ \ \frac{\partial G_1}{\partial x}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ \ ;\ \ z=0\ \ ,\ \ G_1=\frac{1}{r}\ ,$$

e permetterà quindi di risolvere lo stesso problema, allorchè sul piano σ_1 si conoscono i valori della derivata normale di u e sul piano σ_2 i valori della funzione stessa: e si trova:

$$2\pi u(x_1y_1z_1)=-\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}d\sigma_1-\frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)u\,d\sigma_2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G_1\right)\Delta_2 u dS.$$

Così finalmente mediante la funzione G_3 potremo risolvere il problema per così dire complementare, quando cioè sono noti su σ_1 i valori di u e sopra σ_2 i valori della derivata normale.

2. Vogliasi determinare, nel punto $x_1\,y_1\,z_1$, la deformazione di questo diedro isotropo soggetto a forze qualunque di massa, allorchè sui due piani limiti sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e le componenti normali delle forze: si conoscono cioè:

per $x=0$ le $L,\ v,\ w$
e per $z=0$ le $u,\ v,\ N$.

Come è ben noto la difficoltà maggiore del metodo consiste nel sapere assegnare la deformazione ausiliaria, in un punto generico x, y, z, di componenti ξ, η, ζ corrispondenti a forze di massa nulle e tali che in superficie sia:

$$x=0\ ,\ L_0'=-2k\omega^2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\ ;$$

$$z=0\ \ ,\ \ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ \ ,\ \ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ \ ,\ \ N_0''=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\ ;$$

le quali assai agevolmente si trasformano in queste altre:

$$x=0\ ,\ \frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\ ;$$

$$z=0\ ,\ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial\zeta}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\ .$$

La dilatazione cubica ϑ è una funzione armonica in S e poichè su σ_1 e σ_2 si ha:

$$\vartheta=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0\ ,$$

sarà, in tutto S, $\vartheta=0$; quindi anche le componenti $\xi\ ,\eta\ ,\zeta$ di deformazione sono armoniche e la loro determinazione è un caso particolare dei problemi risoluti nel § precedente. Ma senza applicare le formule generali, basterà osservare che la funzione armonica $\frac{\partial G}{\partial x}$ è tale che:

$$\text{per } x=0,\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\quad ;\quad \text{e per } z=0\ ,\ \frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ .$$

Sarà dunque:

$$\xi=-\frac{\partial G}{\partial x}\ .$$

Allo stesso modo si deduce:

$$\eta=-\frac{\partial G}{\partial y}\quad ;\quad \zeta=-\frac{\partial G}{\partial z}\ .$$

Determinata la deformazione ausiliaria, restano a determinare le forze da applicare in superficie perchè producano la deformazione precedentemente calcolata; e ciò si ottiene agevolmente dalle equazioni ai limiti. Infatti si ha già:

$$L_0'=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,$$

e poi:

$$M_0'=2k\omega^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\ \partial y}\right)_{x=0}\quad ;\quad N_0'=2k\omega^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\ \partial z}\right)_{x=0}\ .$$

Ma un breve calcolo mostra che:

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\ \partial y}\right)_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y}\left(\frac{2}{r_3}-\frac{1}{r}\right)\quad ;\quad \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\ \partial z}\right)_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x\ \partial z}\left(\frac{2}{r_3}-\frac{1}{r}\right)$$

Quindi:

$$M_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{2}{r_3} - \frac{1}{r}\right) \quad ; \quad N_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{2}{r_3} - \frac{1}{r}\right).$$

Un calcolo analogo dà pure:

$$L_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r}\right) ; \; M_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r}\right) ; \; N_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}.$$

3. Questa deformazione ausiliaria permette di assegnare la dilatazione cubica Θ, corrispondente alla effettiva deformazione, nel punto $x_1\,y_1\,z_1$.

Basta applicare infatti la formula del Betti, la quale nel caso in quistione si riduce alla:

$$\begin{aligned} 4\pi\Omega^2\Theta(x_1 y_1 z_1) = {} & \frac{1}{k}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x}\right) L\, d\sigma_1 + \frac{1}{k}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z}\right) N\, d\sigma_2 \\ & + \int\left\{\left(\frac{1}{k}M_0' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\right) v + \left(\frac{1}{k}N_0' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right) w\right\} d\sigma_1 \\ & + \int\left\{\left(\frac{1}{k}L_0'' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right) u + \left(\frac{1}{k}M_0'' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\right) v\right\} d\sigma_2 . \end{aligned}$$

Abbiamo invero supposte nulle le forze di massa; ma con ciò, come è noto, non si restringe la generalità del problema. La formola che darebbe darebbe nel caso generale la dilatazione, conterrebbe ancora tre altri termini relativi alle forze di massa.

Notando che:

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=0} = 2\frac{\partial \frac{1}{r_3}}{\partial x_1} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=0} = 2\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z_1}$$

e che:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x_1\,\partial y_1} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x\,\partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x_1\,\partial z_1}; \text{ ecc.}$$

e ponendo:

$$\frac{2\pi\Omega^2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} P = \frac{1}{k}\int \frac{L\, d\sigma_1}{r_3} + 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\int v\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right) d\sigma_1 - 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1}\int w\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r}\right) d\sigma_1 ;$$

$$\frac{2\pi\Omega^2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} R = \frac{1}{k}\int \frac{N\, d\sigma_2}{r_1} - 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\int u\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right) d\sigma_2 + 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\int v\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) d\sigma_2$$

risulta semplicemente:

$$\Theta = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1}\right).$$

Si osserverà che P e Q sono funzioni armoniche in tutto il diedro e risultano composte di funzioni potenziali di determinate distribuzioni superficiali (fatte sulle facce del diedro) e delle loro derivate.

4. Cognita la dilatazione cubica, la ricerca di u, v, w si riconduce ad uno dei problemi risoluti nel § 1. Infatti abbiamo:

$$\Delta_2 u + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1}\right) = 0.$$

Sul piano $z_1 = 0$ sono noti i valori di u e sul piano $x_1 = 0$ essendo soddisfatta la:

$$\frac{1}{k} L + 2\omega_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\,\Theta = 0.$$

sarà noto il valore della derivata normale. Può quindi ritenersi conosciuta la u stessa nel punto $x_1\, y_1\, z_1$. La ricerca di w dipende da un problema del tutto analogo. La ricerca di v, della quale è noto il Δ_2, dipende da un problema più semplice essendo noti i suoi valori sopra σ_1 e σ_2. Gli spostamenti all'infinito si suppongono nulli.

Le formole che si ottengono sono abbastanza semplici; ma non è qui il caso di svilupparle completamente.

5. Supponiamo invece che sui due piani limiti siano conosciute la componente normale dello spostamento e le componenti tangenziali delle forze; cioè siano note:

per $x = 0$ le u, M, N;
per $z = 0$ le L, M, w.

Dovremo determinare una deformazione ausiliaria di componenti ξ, η, ζ tale che al contorno sieno soddisfatte le condizioni:

$$x = 0\ ,\ \xi = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\ M_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y}\ ,\ N_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z};$$

$$z = 0\ ,\ L_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}\ ,\ M_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z}\ ,\ \zeta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

A queste agevolmente si sostituiscono le altre equivalenti:

$$x=0\ ,\ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\ ,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\ ;$$

$$z=0\ ,\ \frac{\partial\xi}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\ ,\quad \frac{\partial\eta}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\ ,\quad \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\ .$$

Decomponiamo la deformazione $\xi\,,\eta\,,\zeta$ in altre due $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ e $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ e le $\zeta_1\,\eta_1\,\zeta_1$ siano armoniche in S e al contorno soddisfino alle condizioni precedenti; mentre le $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ soddisfino alle equazioni indefinite di equilibrio e siano nulle al contorno. Nè per la ricerca della prima deformazione occorre seguire il metodo generale del § 1; perchè un facile calcolo mostra che si può prendere:

$$\xi_1=-\frac{\partial G'}{\partial x}\ ;\quad \eta_1=-\frac{\partial G'}{\partial y}\ ;\quad \zeta_1=-\frac{\partial G'}{\partial z}$$

Questa deformazione è quindi priva di dilatazione e di rotazione e allora si vede subito che alle equazioni ulteriori può soddisfarsi ponendo $\xi_2=\eta_2=\zeta_2=0$: ond' è:

$$\xi=-\frac{\partial G'}{\partial x}\ ;\quad \eta=-\frac{\partial G'}{\partial y}\ ;\quad \zeta=-\frac{\partial G'}{\partial z}\ .$$

Dopo ciò la risoluzione del problema non presenta più alcuna difficoltà.

Lo stesso può dirsi per gli altri casi considerati dal prof. Somigliana. Con pari facilità si possono trattare problemi analoghi relativi alla deformazione di un triedro retto isotropo.

Fisica. — *Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua.* Nota preventiva di A. Marcacci, presentata dal Socio Luciani.

Al congresso internazionale di Fisiologia di Torino (settembre 1901) feci conoscere alcuni risultati da me ottenuti studiando il modo di comportarsi di certi gas (azoto e idrogeno) quando sieno lasciati a lungo nell' acqua, sia soli e allo stato di purezza, sia mescolati a dell' ossigeno. Ecco le conclusioni alle quali giungevo dopo tale studio.

I. Se, a periodi regolari, si esamina l' idrogeno stagnante sull' acqua comune sotto una campana, vi si trova, nei primi giorni, dell' ossigeno in piccola quantità: questo gas sparisce però dopo un certo tempo, e non riappa-

risce più finchè vi è idrogeno sotto la campana. In questo tempo dunque, come si crede generalmente dai fisici, non è penetrata aria nella campana.

II. *a*) Se invece d'idrogeno puro si mette sotto la campana una mescolanza di idrogeno e di ossigeno, questi gas spariscono dopo un certo tempo: resta un gas, in piccola quantità, che è certamente dell'azoto.

b) È allora, dopo questo primo periodo, che l'ossigeno riappare, aumenta lentamente, e raggiunge la proporzione del 15 al 20 %. Ma questa mescolanza s'è formata a spese dei gas disciolti nell'acqua, e che ne sono usciti in momenti differenti, e non già a spese dell'aria in natura, che sarebbe penetrata, come tale, dal di fuori.

III. Si può ottenere naturalmente quest'ultimo risultato (realizzando direttamente la fase *a*), se, invece d'una mescolanza d'idrogeno e di ossigeno, si mette sotto la campana, fin dal principio dell'azoto puro: finisce col formarsi un'atmosfera che ha la composizione dell'aria.

Queste erano le conclusioni generali alle quali venivo nella comunicazione fatta a Torino: aggiungevo che molte circostanze possono far variare la fisonomia dei fenomeni, soprattutto rispetto all'idrogeno: citavo, ad es., una soluzione satura di Cl Na, messa al posto dell'acqua comune: in questo caso nè l'idrogeno puro, nè un miscuglio detonante che vi riposino sopra, anche per lunghissimo tempo, cambiano sensibilmente nella loro fisonomia.

Quanto alla spiegazione dicevo testualmente così: « Per il momento io mi credo autorizzato ad emettere l'ipotesi che l'idrogeno, in presenza dell'acqua ordinaria, possa combinarsi coll'ossigeno: il fenomeno non avrebbe luogo nell'acqua alterata in qualsiasi modo. Questi fatti ci obbligano a modificare le nostre idee sulla diffusione di certi gas: il fenomeno non è solamente d'ordine fisico, ma anche d'ordine chimico ».

Dopo questa comunicazione continuai, com'è naturale, i miei studî sui gas che rimangono a lungo nell'acqua: ma rivolsi più specialmente i miei sforzi a verificare l'ipotesi annunziata, se cioè la combinazione dell'idrogeno e dell'ossigeno avvenisse in seno all'acqua: credo oggi di essere autorizzato, dall'evidenza dei fatti raccolti, ad annunziare che questa ipotesi è pienamente confermata.

Se, io pensai, l'idrogeno, sciogliendosi nell'acqua, si combina con l'ossigeno di questa, collocando e mantenendo a lungo sull'acqua un'atmosfera di idrogeno, deve venire un momento nel quale l'acqua stessa non deve contenere più ossigeno: e ciò si potrà verificare estraendo ed analizzando i gas di quest'acqua.

Estrassi ed analizzai, per le prime, due acque; una delle quali era rimasta per più di un anno in rapporto con un'atmosfera di idrogeno, e l'altra, un egual tempo e nelle identiche condizioni, con una di azoto: quest'ultima, come ho già detto, era stata inquinata da ossigeno (20 %): l'idrogeno ne era privo da parecchi mesi. Analizzati i gas estratti dalle due acque trovai:

nell'acqua all'idrogeno cc. 0,8 di ossigeno per litro d'acqua, e cc. 4,3 dello stesso gas, per litro d'acqua sull'azoto.

L'impoverimento in ossigeno dell'acqua all'idrogeno era più che evidente: riscontrai il fatto anche in altre acque sottoposte ad un'atmosfera di idrogeno: tracce di ossigeno però le trovai sempre. Perchè, in sì lungo tempo, nell'esperimento citato, tutto l'ossigeno non era scomparso? Ciò poteva derivare da due fatti: o dalla continua rifornitura in ossigeno che l'acqua delle campane poteva ricevere dall'acqua esterna dei bacili in cui quelle eran rovesciate, e che era in contatto coll'aria; o dal fatto che gli strati superiori della colonna d'acqua delle campane, pur essendo privi di ossigeno, ne venissero a ricevere, durante la forte aspirazione della campana a vuoto, dagli strati inferiori che ne possedevano. La presa infatti veniva praticata a 5-6 cm. dalla superficie dell'acqua, che si sollevava in colonna per 12 a 14 cm. sul livello dell'acqua dei bacili.

Pensai allora di ricorrere all'esame dell'acqua di un gazometro di vetro, a perfetta tenuta, nel quale era raccolto, da molto tempo, dell'idrogeno: qui la rifornitura di ossigeno non era possibile: ebbene, *in quest'acqua trovai appena tracce di ossigeno.*

Incoraggiato da questi risultati, feci un esperimento che mi doveva dare (se l'ipotesi, come tutto faceva sperare, era vera), un risultato definitivo. In un lungo cilindro, ripieno prima d'acqua comune e rovesciato sul mercurio, misi dell'idrogeno: in queste condizioni, come nel gazometro, la colonna d'acqua era separata completamente dall'aria esterna. Quando, coll'analisi dell'idrogeno, potei verificare la sparizione completa di quelle piccole tracce d'ossigeno che vi soglion penetrare in principio, e la cessazione della diminuzione di volume dell'atmosfera gassosa, estrassi ed analizzai i gas di tutta la colonna d'acqua che aveva subìta l'azione dell'idrogeno: vi trovai, come sempre, dell'azoto e dell'idrogeno, *ma non vi era più traccia di ossigeno.*

Inutile aggiungere che in tutte queste ricerche (oltre le precauzioni necessarie perchè le acque da analizzarsi non venissero mai in contatto coll'aria), furono praticate sempre delle analisi gazometriche in campane di quella stessa acqua che era stata sottoposta all'azione dell'idrogeno; ebbene queste analisi, com'era da aspettarsi, dettero sempre il 30 o il 31 °/₀ di ossigeno, e il 6,5-7 per litro di questo gas: ciò che collima coi dati fornitici dal Bunsen.

La mia ipotesi poteva dunque dirsi completamente confermata: ed è a questo solo che limito, per oggi, la mia comunicazione. Nel resoconto completo che, lo spero, potrò dar presto alla stampa, dirò delle molte e svariate circostanze che possono modificare o ammettere il fenomeno da me trovato, e delle conseguenze che può portare sul modo di considerare la solubilità e la diffusione dei gas, e più specialmente dell'idrogeno, nell'acqua.

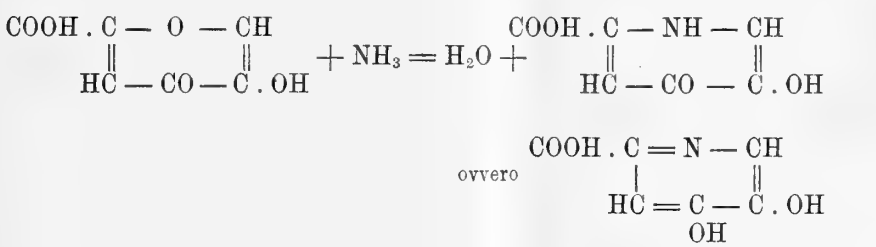
Fisica. — *Sulla influenza dell'elettrizzazione sulla velocità di evaporazione.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine.* Nota di A. PERATONER, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Nei suoi lavori interessantissimi Ost (1) dimostrò che i derivati dell'acido meconico, contenenti il nucleo del γ- pirone, possono essere trasformati in composti piridici seguendo due vie diverse. La prima è data dal l'azione dell'ammoniaca, una reazione che secondo Lieben ed Haitinger (2) e v. Pechmann (3) si interpreta ammettendo che l'atomo di ossigeno dell'anello pironico venga sostituito dal gruppo imidico generandosi γ-piridoni, i quali, come è noto, presentano il fenomeno della tautomeria. P. es.

Ac. comenico (4) = ossipironcarboncio — Ac. comenaminico = ossipiridoncarbonico



Il secondo modo in cui avviene la trasformazione, fin oggi non è stato chiarito. Ost partendo dal nitrosocomposto doppio, giallo dell'acido piromeconico, indicato da lui come acido nitroso-dipiromeconico $C_5H_3O_3 . NO + C_5H_4O_3$, e riducendolo con acido solforoso, ebbe un prodotto contenente 2 atomi di idrogeno in più, che aveva la composizione di una tetrossipiridina $C_5H_5NO_4$ e venne chiamato acido *ossipiromecazonico*. Questo per ulteriore riduzione

(1) Journal f. prakt. Chemie *19*, 177; *27*, 257; *29*, 57.

(2) Monatshefte *5*, 363; *6*, 307.

(3) Pechmann u. Baltzer. Berichte *24*, 3151.

(4) Per la costituzione dell'acido comenico confr. la Memoria di Peratoner e Leonardi. Gazz. Chim. *30*, I, 539.

con acido jodidrico cedendo un atomo di ossigeno forniva la sostanza $C_5H_5NO_3$, detta acido *piromecazonico* o triossipiridina, la quale finalmente all'ossidazione perdeva 2 atomi di idrogeno trasformandosi nel chinone rosso, il *piromecazone* $C_5H_3NO_3$.

$C_5H_4O_3$ Acido piromeconico
$C_5H_3NO_4$ » nitrosopiromeconico
$+ H_2$
$C_5H_5NO_4$ » ossipiromecazonico = tetrossipiridina
$- O$
$C_5H_5NO_3$ » piromecazonico = triossipiridina
$- H_2$
$C_5H_3NO_3$ Piromecazone = triossipiridinchinone

Fra queste sostanze l'acido piromecazonico o triossipiridina di Ost è indubbiamente un piridone sostituito, dapoichè può anche prepararsi per la prima via sopraindicata partendo dall'acido comenico (ossipironcarbonico). Infatti, trasformando questo in ossiderivato (diossi-pironcarbonico) e facendo poi reagire l'ammoniaca si ricava un acido, il cui nucleo deve essere piridonico

Ac. ossicomenico (diossipironcarbonico) — Ac. ossicomenaminico (diossipiridoncarbonico)

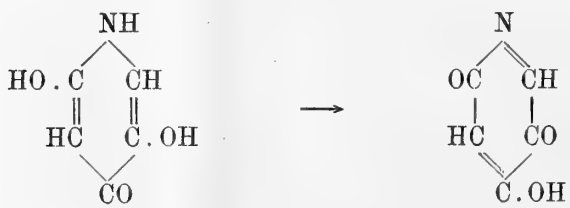
$$C_5HO_2\begin{cases}(OH)_2\\COOH\end{cases} + NH_3 = C_5H_2NO\begin{cases}(OH)_2\\COOH\end{cases} + H_2O$$

e da cui per eliminazione del carbossile si giunge all'identico acido piromecazonico o triossipiridina di Ost

$$C_5H_2ON\begin{cases}(OH)_2\\COOH\end{cases} \longrightarrow C_5H_3ON(OH)_2$$

Siccome questo corpo si comporta come l'idrochinone (reazione azzurra col cloruro ferrico; formazione di chinone), Ost lo considerò « senza alcun dubbio come costituito analogamente alle sostanze aromatiche parasostituite ». Pechmann (1) gli attribuì la seguente formula, che è anche riportata nei manuali più recenti (2):

p-diossipiridone = triossipiridina — γ-piridon — p-chinone

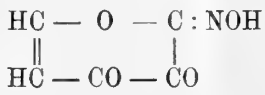


(1) Stokes e Pechmann. Berichte *19*, 2710.

(2) P. es. Roscoe-Schorlemmer's Lehrbuch von Brühl, Hjelt, Aschan. VII Band, 5 Theil, p. 163.

Quanto all'acido ossi-piromecazonico, da cui il composto precedente si forma per riduzione, sembrò dubbio ad Ost se fosse tetrossipiridina. Egli fu inoltre del parere che « dovesse decidersi ancora la quistione, se l'acido « nitrosopiromeconico, da cui questa tetrossipiridina prende origine, fosse « veramente un nitroso-composto, non potendosi comprendere in qual modo « ne risultasse un corpo con l'azoto così saldamente legato come la triossi- « piridina » (1).

Come ho dimostrato in una Nota precedente (2), l'acido nitrosopiromeconico è però un isonitroso-derivato della forma tautomera chetonica dell'ossipirone cui compete la formula:

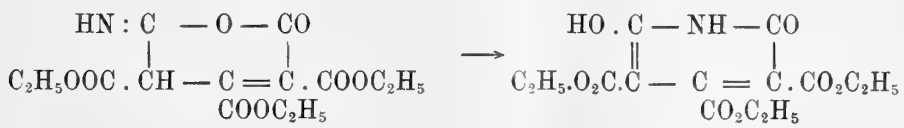


Partendo da questa costituzione nota e considerando, come dianzi ho detto, che è indubbiamente un piridone l'acido piromecazonico, cui si giunge, non è difficile avere una spiegazione attendibile del modo come avviene la formazione dei composti piridici cennati; dapoichè il problema si riduce alla studio della genesi e della costituzione del prodotto intermedio, l'acido ossipiromecazonico o tetrossipiridina di Ost.

Dalla superiore formula si rileva che nell'isonitroso-ossipirone il gruppo ossimidico è legato ad un atomo di carbonio, il quale resta unito inoltre all'ossigeno dell'anello pironico. Ammettendo che avvenga fra questi gruppi una trasposizione, quello ossimidico potrà entrare nel nucleo, mentre l'ossigeno diventerà carbonilico.

Supporre un tale cambiamento di posto, e la conseguente trasformazione di un anello pironico in piridico, non ha nulla di arbitrario essendosi constatati casi del tutto analoghi che dal presente vengono ad essere confortati.

Infatti recentemente Errera (3) dalle sue ricerche sintetiche sulle ossipiridine è condotto a ritenere che un derivato azotato della cumalina (α-pirone), da lui preparato, debba considerarsi come *isoimide;* la quale pel solo riscaldamento si muta in composto ossipiridico:



(1) Journ. f. prakt. Chemie *27*, 273; *29*, 67.

(2) Questi Rendiconti della seduta del 16 marzo 1902.

(3) Gazz. Chim. *32*, 1; Berichte *34*, 3700. Errera e Perciabosco. Gazz. Chim. *32*, 9.

L'autore, tenendo presenti i lavori di Hoogewerff e van Dorp (1) sulle isoimidi, dimostra le ragioni di questa interpretazione e viene altresì alla conclusione che le varie sostanze azotate, preparate da Guthzeit (2) per azione di ammoniaca ed ammine sull'etere etossicumalindicarbonico, anche esse sono isoimidi dell'α-pirone, piuttosto che imidi. Per opera del calore si trasformano in piridoni; e per quanto forse questa isomerizzazione rappresenti un fenomeno complesso, pure il risultato finale andrebbe espresso p. es. dallo schema:

$$\begin{array}{l} HN:C\ -O\ -CO \\ \quad\ |\qquad\ |\qquad\ \\ C_2H_5O_2C.CH-CH=C.CO_2C_2H_5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} HO.C-NH-CO \\ \quad\ \|\qquad\ |\qquad\ \\ C_2H_5O_2C.C-CH=C.CO_2C_2H_5 \end{array}$$

La trasposizione molecolare che io ammetto subisca l'isonitroso-ossi-γ-pirone corrisponde a quelle precedenti. È probabile che essa sia preceduta da addizione degli elementi dell'acqua, essendochè avviene già per sola ebollizione con acqua o con alcool; ma procedendo nel modo più blando, quando vi agisce l'acido solforoso, si può immaginare pure che si formi, per scissione, idrossilamina, la quale allo stato nascente reagirebbe con l'atomo di ossigeno del nucleo precisamente come l'ammoniaca fa con molti derivati del γ-pirone.

$$\begin{array}{l} HC-O-C:NOH \\ \quad\ \|\qquad\ |\qquad\ \\ HC-CO-CO \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} HC-O-CO \\ \quad\ \|\qquad\ |\qquad\ \\ HC-CO-CO \end{array} + NH_2OH \longrightarrow \begin{array}{l} \qquad\ OH \\ HC-N-CO \\ \quad\ \|\qquad\ |\qquad\ \\ HC-CO-CO \end{array}$$

Nel primo stadio della reazione dovrebbe quindi risultare un 1 . 2 . 3 — trichetone azotato. Come tale dovrà forse considerarsi l'isomero dell'acido nitrosopiromeconico che, secondo Ost, si forma da quest'ultimo, quando viene conservato secco in vaso chiuso (3).

In presenza d'acqua però la reazione va più oltre. Il trichetone addiziona subito una molecola di idrogeno, ciò che riesce nel modo più facile in presenza dell'acido solforoso riducente, per trasformarsi in un triossi-piridone stabile contenente azoto ossimidico, mentre fra i due atomi di carbonio si stabilisce legame doppio.

$$\begin{array}{l} \qquad\ OH \\ HC-N-CO \\ \quad\ \|\qquad\ |\qquad\ \\ HC-CO-CO \end{array} + H_2 = \begin{array}{l} \qquad\ OH \\ HC-N-C.OH \\ \quad\ \|\qquad\ \\ HC-CO-C.OH \end{array}$$

(1) Receuil d. Pays-Bas *11*, 84; *12*, 12; *13*, 93; *14*, 252.

(2) Berichte *26*, 2795. Annalen *285*, 35.

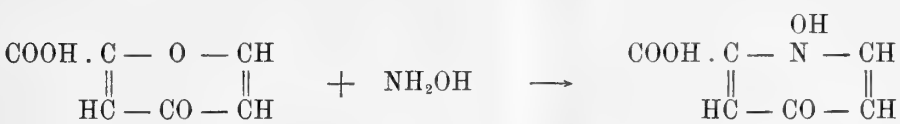
(3) Journ. f. prakt. Chemie *27*, 272, nota 2 a piè di pagina.

Questo modo di considerare l'acido ossipiromecazonico (tetrossipiridina) come composto ossimidico con l'azoto nel nucleo, corrisponde perfettamente al suo comportamento chimico. Per ebollizione con anidride acetica ho potuto ricavarne un derivato *triacetilico* dal p. f. 123-124°, con cloruro di benzoile un etere *tribenzoilico*, p. f. 162-163°, prodotti che facilmente vengono saponificati dall'alcool bollente ridando il composto primitivo.

Che dei tre ossidrili uno si comporta in modo essenzialmente diverso dagli altri due, resta provato dalla riduzione fatta da Ost (con HI oppure Sn + HCl), nella quale un solo atomo di ossigeno (quello legato all'azoto) viene eliminato con somma facilità, laddove gli ossidrili legati agli atomi di carbonio resistono anche a riduzioni ulteriori ([1]). Il prodotto finale è sempre l'acido piromecazonico (triossipiridina di Ost).

Che del resto l'acido ossi-piromecazonico è già un derivato della piridina, risulta chiaramente « dal suo carattere chimico che coincide in tutto con quello dell'acido piromecazonico », eccettuata naturalmente la facile riducibilità del primo. Da entrambi l'azoto non può eliminarsi per scissione, entrambi colorano in azzurro-violetto il cloruro ferrico e forniscono con cloruro di bario ed ammoniaca il precipitato caratteristico azzurro-fior d'aliso.

Un ulteriore riconferma del mio modo di rappresentare l'acido ossi-piromecazonico come piridone con ossidrile legato all'azoto del nucleo, la si ricava dalla esistenza e dal comportamento di pochi composti analoghi finora noti. Ost ne ebbe fra le mani qualcuno senza deciderne la costituzione ([2]). Infatti, per l'azione dell'idrossilamina sull'acido comanico (pironcarbonico) preparò una sostanza che ora dobbiamo considerare come acido N *ossi-piridoncarbonico*



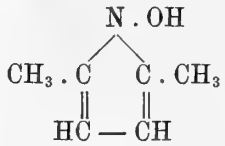
e da questa, per eliminazione del carbossile, un corpo che deve ritenersi *N ossi-piridone*. Queste sostanze, come Ost stesso constatò, si comportano alla riduzione precisamente come l'acido ossipiromecazonico, cedendo con facilità un solo atomo d'ossigeno, epperò dovranno avere quest'atomo legato all'azoto.

([1]) Loco cit. p. 258, 270.

([2]) Journ. f. prakt. Chemie *29*, 378.

Ho ripreso lo studio dell'azione dell' idrossilamina sopra alcuni composti γ- pironici e posso comunicare intanto, che mentre l'acido comenico (ossipironcarbonico), come è noto, rimane inalterato, il suo etere dietilico fornisce un derivato ossimidico, il cui azoto con somma probabilità trovasi nel nucleo. Colora in rosso, fino rosso-bruno, il percloruro di ferro, reazione cromatica questa che ritengo comune appunto a quei composti ciclici, del cui anello fa parte un atomo di azoto ossimidico.

Infatti ho potuto constatarla per l'ossipirrolo di Knorr [1] ed alcuni suoi derivati,

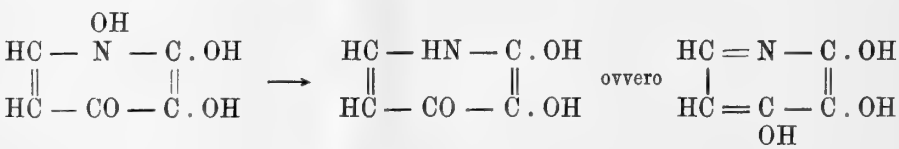


che tirerò pure nel campo delle mie ricerche, e per lo stesso acido ossipiromecazonico.

Facendo con questo il saggio in piccolo, non si ha altro che la nota colorazione azzurra; ma adoperando eccesso di soluzione satura e facendovi cadere a gocce il cloruro ferrico, comparisce dapprima il bel colorito rosso e quindi si precipita un sale rosso, che soltanto con eccesso del reattivo si ridiscioglie cambiandosi il colore in azzurro. L'analisi del sale porta alla formula $Fe(C_5H_4O_4N)_3$. Se ne deduce che anche di fronte al cloruro ferrico uno dei tre ossidrili dell'acido ossipiromecazonico ha un comportamento particolare, e che quest'ossidrile dovrà essere quello ossimidico.

In quanto all'acido piromecazonico o triossipiridina di Ost, che dal composto precedente si ottiene per eliminazione dell'ossigeno ossimidico mediante la riduzione, la formula di costituzione assegnatagli da von Pechmann deve modificarsi in modo, che i due ossidrili rimanenti si trovino fra loro in posizione *orto*, considerandosi per conseguenza questo corpo come *$\alpha\beta$-diossi* — γ-piridone.

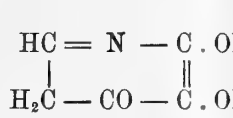
Tuttavia è dubbio che la cennata riduzione proceda nel modo semplice, espresso dallo schema:



Queste due formule tautomere dell'acido piromecazonico richiederebbero la possibilità di ricavarne un derivato triacetilico, mentre Ost non riuscì a

[1] Annalen der Chemie *236*, 300.

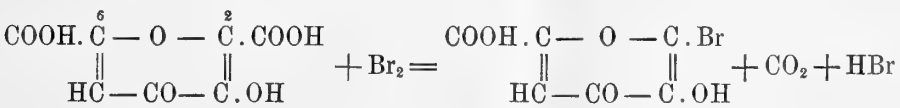
preparare che il diacetilico, sebbene spingesse l'azione dell'anidride acetica sino a 220°. Di questo fatto, e di tutte le altre reazioni della triossipiridina darebbe ragione una formula di costituzione, dalla quale si rilevi uno spostamento dell'atomo di idrogeno imidico, come :



e che, pur essendo più verosimile delle altre, per ora dò con riserva.

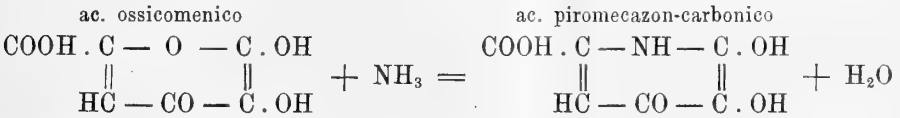
La posizione $\alpha\beta$ degli ossidrili può d'altronde essere dimostrata mediante la genesi di questo composto dall'acido comenico che ho ricordato in principio di questa nota. L'acido comenico fornisce un bromoderivato, identico a quello che si ottiene dall'acido meconico per sostituzione del bromo al carbossile in posizione 2, come ho discusso in un lavoro precedente (1).

ac. meconico — ac. bromocomenico



Questo prodotto alogenato scambia poi, per azione dell'acqua, il bromo con ossidrile dando l'acido ossicomenico ; sul quale agendo l'ammoniaca, si forma il composto piridonico corrispondente, che è il derivato carbossilico dell'acido piromecazonico.

ac. ossicomenico — ac. piromecazon-carbonico



Epperò nel composto che se ne ricava per eliminazione di anidride carbonica, gli ossidrili devono occupare pure le posizioni sopraindicate.

Finalmente il chinone rosso, che dall'acido piromecazonico si ottiene per ossidazione, detto *piromecazone*, dovrà essere un *orto*chinone e contemporaneamente 1 . 2 . 3- trichetone. A quale delle due formule più probabili

sia da darsi la preferenza, spero potere decidere mediante nuove esperienze che ho iniziato sopra i varii prodotti accennati in questa Nota.

(1) Peratoner e Leonardi. Gazz. chim. *30*, I, 562.

Geologia. — *I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia.* Nota del dott. Alessandro Martelli, presentata dal Corrispondente De Stefani.

Ad oriente dell'antica Salona e, in modo più preciso, alle falde delle alture cretacee di Clissa, ha principio la formazione eocenica, che di là si distende fino a costituire tutta la costa spalatina.

I terrenici eoceni della Dalmazia sono poco noti e della ricchissima fauna nummulitica dei dintorni di Spalato nemmeno si fa cenno; perciò ne ho intrapresa la illustrazione giovandomi degli abbondanti materiali raccolti sul posto dal prof. De Stefani e da me.

A Salona il calcare nummulitico poggia direttamente e in concordanza sulla Creta superiore e presenta, oltre un numero non trascurabile di piccole *Orbitoides*, esemplari delle seguenti specie:

(r) *Nummulites Guettardi* d'Arch. et H.
(r) » *striata* d'Orb. var. *minor* d'Arch. et H.
(c) » *variolaria* Sow.
(r) » *Heberti* d'Arch. et H.
(r) » *Heeri* de la Harp.
(c) » *Lucasana* Defr. var. *obsoleta* de la Harp.
(c) » *Lucasana* Defr. var. *depressa* d' Arch. et H.
(c) » *Lucasana* Defr. var. *granulata* de la Harp.
(c) » *perforata* d' Orb. var. *obesa* Leym.
(c) *Nummulites perforata* d' Orb. var. *Renevieri* de la Harp.
(c) » *perforata* d' Orb. var. *granulata* Tell.
(c) *Assilina mamillata* d'Arch. et H. var. *plicata* de la Harp.
(c) » *exponens* Sow. var. *plicata* de la Harp.
(c) » *exponens* Sow. var. *granulosa* d'Arch.
(r) *Operculina subthouini* Tell.
(r) » *Thouini* d'Orb.
(r) » *ammonea* Leym.

Tenendo presente che a Salona le nummuliti granulate sono assai bene rappresentate, mentre in modo assoluto vi mancano le *Alveoline* e vi difettano le forme più grandi delle nummuliti non granulose a filetti settali semplici, si viene ad escludere tanto il livello più basso dell'Eocene medio quanto il più alto, e a riferire i terreni di Salona alla parte media di detto Eocene medio.

Sovrastante al calcare nummulitico ora considerato, dirigendosi verso Spalato, si osservano situati in largo sinclinale tra Salona e Monte Marian, strati quasi orizzontali di marne ad *Helmintoida* alternate con arenarie, e, fra di essi, una brecciola che viene poi a differenziarsi in un vero e proprio calcare screziato, allorchè i materiali che lo costituiscono divengono più uniti e più intimamente fra loro cementati. Il passaggio dalla parte media a quella superiore dell' Eocene medio, si può osservare a Spalato, dove si ha un calcare marnoso col seguente aggregato di nummuliti, oltre alla comunanza di quelle forme già citate nel calcare di Salona.

(r) *Nummulites Tchihatcheffi* d'Arch. et H.
(r) » *complanata* Lamk.
(r) » *latispira* Savi e Menegh.
(r) » *distans* Desh.
(c) » *Guettardi* d' Arch. et H.
(c) » *biarritzensis* d'Arch.
(c) *Nummulites Lucasana* Defr. (tipo)
(c) » *perforata* d'Orb. var. *aturensis* d'Arch. et H.
(c) » *subitalica* Tell.
(c) » *italica* Tell.
(c) *Assilina* sp.
(c) *Orbitoides* sp.

Dove la formazione eocenica mostra tutta la sua potenza e raggiunge il suo massimo è nel Monte Marian, che, a guisa di promontorio segna l'estremità nord-occidentale della zona da noi studiata. Esso è originato da una piega parallela al littorale ed è per metà eroso dal mare; presenta una successione di strati i quali, specialmente nel fianco occidentale e meridionale, si arrestano a picco con le loro testate ed hanno un'inclinazione costante a nord-est di 35°-40°.

Il calcare che lo costruisce risulta di un impasto di grosse foraminifere, di briozoi, coralli, echini, piccoli lamellibranchi ed altri fossili, i quali spesso si rivelano sulle superfici corrose della roccia. In tale calcare abbiamo notato come le forme del gruppo della *Nummulites distans* (*N. Tchihatcheffi* — *N. complanata*, *N. latispira* — *N. distans* ecc.) si mostrino in numero abbondante e pari a quello delle già citate varietà della coppia *N. Lucasana* — *N. perforata*, e come non difettino neppure i rappresentanti delle seguenti specie:

Foraminifere:

Nummulites subdiscorbina de la Harp.
» *discorbina* Schloth.
» *discorbina* Schloth. var. *La Harpei* Martel.
» *striata* d'Orb.
» *contorta* Desh.
Nummulites contorta Desh. var. *Viquesnelii* d'Arch. et H.
» *curvispira* Menegh.
» *Gizehensis* Ehr.
» *Gizehensis* Ehr. var. *Ehrenbergii* de la Harp.

Nummulites Gizehensis Ehr. var. *Lyelli* d'Arch et H.
» *Lucasana* Defr. var. *Meneghinii* d'Arch. et H.
» *perforata* d'Orb. var. *Stefanii* Martel.
» *subitalica* Tell.
» *italica* Tell.
» *Guettardi* d'Arch. et H.
» *biarritzensis* d'Arch.
» *variolaria* Sow.
» *Heberti* d'Arch. et H.
Assilina sp.
Orbitoides sp.
Briozoi: *Retepora* sp.
Cellepora sp.
Coralli: *Columnastraea Caillaudi* Mich.
Caryophyllia sp.
Echini: *Echinolampas Suessi* Laub.
Echinolampas sp.
Conoclypus conoideus Lamk.
Conoclypus anachoreta Agas.
Conoclypus sp.
Lamellibranchi: *Pecten Bonarelli* Vin.
Pecten sp.
Murex sp.
Vermi: *Serpula* (*Rotularia*) *spirulaea* Lamk.
Nulliporidee: *Lithothamnium nummuliticum* Gümb.

Le località delle Botticelle e di Santo Stefano, le quali tanto ad oriente che ad occidente delimitano il porto di Spalato venendo a formare le due punte più sporgenti di questo tratto di costa, sono le più fossilifere, ma la roccia che le costituisce risulta di fossili già ruzzolati e rimaneggiati, spesso in frantumi, e di detriti di calcari più antichi, perfino di *Rudistae*. E così anche la brecciola che vi si trova alla base insieme con sottili lenti di argille turchiniccie, come resultato della denudazione atmosferica e marina è ridotta ad un impasto incoerente di minuti frammenti di roccia e di fossili diversissimi.

Tutte le specie fossili citate a proposito dei terreni di Salona, Spalato e Monte Marian, vi si ritrovano pure, ma mescolate con altre molte, comuni all'Eocene medio, che altrove si osservano in gruppi ben distinti a caratterizzare livelli costanti. Dei fossili raccolti alle Botticelle e a Santo Stefano e non ancora menzionati, riportiamo qui la nota per meglio far conoscere la fauna eocenica dei dintorni di Spalato, sebbene non trattandosi di fossili vissuti tutti insieme, le determinazioni dell'orizzonte abbiano valore alquanto minore. Oltre a tutte le forme di nummulitidi, di corallari, echini, lamellibranchi ecc. che già abbiamo avuto occasione di enumerare nel calcare marnoso di Spalato e in quello del Monte Marian, abbiamo dunque pure raccolto alle Botticelle e a Santo Stefano, rappresentanti delle seguenti specie:

Nummulitidi:

Nummulites anomala de la Harp.
» *Montis-Fracti* Kaufm.
Nummulites suboenotria Martel.
» *oenotria* Tell.

Orbitoides dispansa A Martel.
» *dispansa (B)* Sow.
» *aspera A* Mart.
» *aspera (B)* Gümb.
» *papyracea (A)* Boub.
» *papyracea (B)* Boub.
» *papyracea (B)* Boub. var. *Fortisi* d'Arch.
» *applanata* Gümb.
» *ephyppium* Schloth.
» *dalmatina A* Mart.
Orbitoides dalmatina B Mart.
» *stella* Gümb.
» *stellata* d'Arch. et H.
Echini: *Cidaris* sp.
Cyphosoma cribrum Agas.
Brachiuri; *Ranina Marestiana* Kön.
Nulliporidee: *Lithothamnium torulosum* Gümb.
Lithothamnium effusum Gümb.

Nei terreni di Spalato ho dunque creduto di riconoscere tre principali livelli ben distinti paleontologicamente a Salona (Eocene medio parte media) a Spalato (piano di transizione) e al Monte Marian (Eocene medio parte superiore), basando principalmente la distinzione sui rapporti di aggruppamento delle nummuliti granulose, in posto, con quelle liscie riferibili al gruppo della *N. distans*. Ricordiamo che, nella scala delle nummuliti redatta dal de la Harpe (1), le forme granulose costituiscono la terza zona, le *Assiline* la quarta, le nummuliti striate la quinta e quelle liscie la sesta. Orbene, considerando che, eccezione fatta per il piano più basso dei terreni eocenici spalatini, i rappresentanti della sesta zona — mentre vengono a prender parte insieme con un proporzionale numero di quelli della quinta e della quarta ad una fauna nummulitica che viene qui caratterizzata da forme in prevalenza granulose — sono mancanti a Salona, scarsi a Spalato e abbondanti al Monte Marian, si comprende come sia naturale la distinzione, paleontologica oltre che stratigrafica, in tre zone.

Anche nel Veneto, alla Maiella e al Gargano, per citare solo località ben note, le nummuliti si trovano associate in modo quasi identico a quello che si verifica nei terreni di Spalato.

La coppia *N. Lucasana — N. perforata* considerata come caratteristica del Parisiano medio — facendo il Parisiano corrispondente all'intiero Eocene medio — è al Monte Marian del pari abbondante come la coppia *N. Tchihatcteffi — N. complanata*, la quale in tutto il perimetro del Mediterraneo sta a rappresentare un orizzonte alquanto più alto. A togliere infine il dubbio che il Monte Marian non sia costituito da terreni eocenici meno antichi dei circostanti, basta il fatto che le nummulitidi da noi determinate vengono a prender parte ad una fauna, che, dall'enumerazione degli altri pochi fossili più sopra citati, risulta pure sincrona a quella di San Giovanni Ilarione e quindi con ogni probabilità, riferibile all'Eocene medio parte superiore.

(1) De la Harpe Ph., *Étude des Nummulites de la Suisse*, Mémoires de la Société Paléontologique Suisse, vol. VII, pag. 76.

Biologia. — *Nuove ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini.* Nota II di Alessandro Coggi, presentata dal Socio Emery.

Nervi ampollari. — Ho rilevato nella Nota I portante lo stesso titolo (1) che nello stadio di ampolla individualizzata il nervo forma una sorta di clava sotto e di fianco all'ampolla, pel fatto che parecchi nuclei ivi si sono accumulati. Questi appartengono ad elementi nervosi embrionali la cui migrazione in direzione centrifuga dai rami nervosi che contengono anche i nervi di senso laterale, a me sembra evidente. Ma è anche indubitato che questi elementi vanno ivi soggetti ad attiva moltiplicazione, il cui risultato è la formazione di una espansione o dilatazione di forma ovale o conica, sulla quale sembra che l'ampolla sia in parte adagiata. Ho osservato siffatta espansione, più o meno sviluppata, oltre che in *Torpedo*, in *Pristiurus, Mustelus* e *Raja.*

Forse per una certa somiglianza che questa espansione offre con la placca terminale del *R. lateralis vagi* in via di sviluppo, riscontrata nei Pesci e negli Anfibi da varî autori (Clapp, Raffaele e altri), Dohrn (2) che l'ha osservata in embrioni di *Pristiurus* e *Scyllium*, la chiama « Basalzellplatte » del nervo ampollare, « Bodenplatte » dell'ampolla. E *pour cause.* Poichè nello stesso modo che la espansione terminale del nervo laterale è dovuta alla migrazione in essa di elementi ectodermici formatisi per moltiplicazione nell'abbozzo della linea laterale, così Dohrn ritiene che sia prodotta la « Basalplatte » delle ampolle dalla parete di esse. Anzi egli si fonda esclusivamente su questa asserita migrazione di elementi cellulari dal fondo dell'ampolla nella « Basalplatte », e i quali, secondo ammette egli stesso, ivi si moltiplicano, per confermare precedenti ricerche sue e di altri sulla formazione dei nervi di senso laterale da catene cellulari costituite da elementi che provengono dagli abbozzi dei rispettivi apparati di senso.

Ora, io credo di fare le mie riserve circa i nervi che provvedono le ampolle. Riserve che trovano la loro ragione in quanto è esposto nella mia comunicazione su citata riguardo al primo manifestarsi di questi nervi ampollari in forma di filamenti protoplasmatici; i quali solo in prosieguo di sviluppo sono accompagnati da elementi nucleati che provengono evidente-

(1) V. pag. 289.

(2) A. Dohrn, *Die Schwann'schen Kerne, ihre Herkunft und Bedeutung. Erwiderung an A. Kölliker. 20s. Studium zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers.* Mittheil. Zool. Stat. Neapel, Bd. 15, 1 u. 2 H. 1901.

mente dal ramo nervoso che provvede anche gli organi di senso laterale al cui fianco si sviluppano le ampolle, raggiungono poi la base delle ampolle stesse e quivi si moltiplicano.

E per quanto mi consta, le relazioni fra la dilatazione terminale del nervo ampollare embrionale, sia essa in forma di clava, o di placca ovale o conica, e la parete dell'ampolla propriamente detta consistono solo di ponti o processi protoplasmatici; talvolta sembra che qualche nucleo della placca si insinui fra la parte basale delle alte cellule dell'ampolla, ma esso può facilmente distinguersi da quelli propri di quest'ultime cellule.

Circa l'ufficio che devesi attribuire a questa « Bodenplatte », convengo su quanto dice Dohrn a pag. 152: « Es scheint unszweifelhaft, dass die Bodenplatte jeder Ampulle den Hauptproductionsplatz für die Zellen bildet, aus welchen der anhaftende Strang besteht ». Ma è da rilevare ancora che essa non raggiunge uguali dimensioni in tutte le ampolle. Essa è maggiormente sviluppata nelle ampolle il cui sbocco o punto d'attacco con l'ectoderma va soggetto a maggiore spostamento in seguito all'accrescimento di volume e al cambiamento della forma esterna del corpo dell'embrione. È evidente che in tali ampolle l'allungamento del dotto non basta a compensare lo spostamento, e i nervi ampollari sono obbligati ad allungarsi; ciò che si verifica perchè nuovi elementi, ordinati in catene cellulari, vengono loro forniti dalla espansione terminale. Una tale compensazione, del resto, è necessaria perchè i dotti ampollari conservino il loro attacco con l'ectoderma e a ciascuna ampolla sia conservato il suo nervo.

In quelle ampolle che vanno soggette a spostamenti meno significanti, l'espansione terminale esiste, ma meno sviluppata.

Siffatta maniera di considerare la formazione e l'accrescimento dei nervi ampollari, basata sulla osservazione delle strutture varie che ci offrono le ampolle durante il loro sviluppo, mentre nulla toglie alla possibilità del loro differenziarsi da catene cellulari, sfugge, secondo io credo, al dilemma troppo assoluto posto dalle due teorie che attualmente si contendono il campo per spiegare la formazione e l'accrescimento de' nervi: quella dei processi nervosi inviati da cellule situate nei centri, e l'altra della connessione primitiva fra centro e organo periferico.

Comunque sia, per me è certo che *i nervi ampollari, già per la loro maniera di svilupparsi, dimostrano di essere di natura alquanto diversa da quella dei nervi di senso laterale.* Io li considererei piuttosto come nervi di senso più generale. Alla stessa conclusione del resto conducono le recenti ricerche di Peabody, Forssell e Retzius sulla istologia delle ampolle e sulla terminazione dei loro nervi nei Selaci adulti. Nessuna distinzione di cellule sensorie e cellule di sostegno si può fare nella parete degli otricoli o nella placca centrale; e le fibre nervose, dopo aver perduto la guaina mielinica, mostrano ciascuna un ingrossamento fusiforme nucleato (ultimo ricordo della

espansione terminale embrionale?) appartenente alla guaina di Schwann, e poi si dividono più volte dicotomicamente per abbracciare con una fitta e fine arborizzazione terminale la parete esterna degli otricoli, e terminare con numerosi ingrossamenti di varia forma addossati alle cellule della parete medesima e talvolta penetranti fra di esse.

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sugli Infusorî* [1]. Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

1. *Introduzione.* — La membrana cellulare o ciò che la sostituisce (ectoplasma) si è mostrata, specialmente per le importanti ricerche di Overton, permeabile all'acqua, ma non in generale alle sostanze disciolte, sia negli animali, sia nelle piante. Conseguenza necessaria di questa proprietà è l'isotonicità dei liquidi endocellulari e pericellulari tra loro. È ormai questo un concetto ammesso per molte tra le cellule interne del corpo degli animali pluricellulari; le cellule esterne, quelle cioè che sostituiscono l'epitelio della pelle, del canale digerente delle branchie, si sottraggono a questa legge della permeabilità all'acqua in molti animali acquatici (pesci teleostei ecc.), nei quali l'ambiente interno è differente per concentrazione dall'esterno; ciò che evidentemente non sarebbe possibile se l'acqua potesse traversare liberamente le membrane. Interessa anche di ricercare se in altri animali vi siano eccezioni in senso contrario, vale a dire se esistano cellule le cui pareti siano permeabili osmoticamente ai sali. Secondo il sig. Quinton [2] sarebbe permeabile ai sali la pelle delle Aplisie e di altri invertebrati marini; ma le sue esperienze son state dimostrate fallaci da Bottazzi e da me in un recente lavoro [3], in cui anche si dimostra sperimentalmente la semipermeabilità della membrana gastrica di quegli animali.

Dato come probabile questo concetto, che cioè in generale anche gli animali aventi un ambiente interno isotonico all'esterno, abbiano membrane limitanti l'interno dall'esterno, le quali non permettano il passaggio dei sali per diffusione, merita uno speciale studio il modo con cui molti di questi animali possono adattarsi a vivere in ambienti notevolmente varî osmoticamente. Dovrebbe, come conseguenza della semipermeabilità delle membrane,

[1] Queste ricerche e quelle che formano il soggetto delle tre Note seguenti, sono state eseguite nell'Istituto Zoologico di Bologna durante l'anno scolastico 1900-1901.

[2] Quinton, *Communication osmotique, chez l'Invertébré marin normal, entre le milieu intérieur de l'animal et le milieu extérieur.* C. R. de l'Acad. Paris, tome 131, pp. 905-908, 1900. — Id., *Perméabilité de la paroi extérieure de l'Invertébré marin, non seulement à l'eau, mais encore aux sels.* Ibid. pp. 952-955, 1900.

[3] Bottazzi Ph. u. Enriques P., *Ueber die Bedingungen des osmotischen Gleichgewichts* ecc. A. f. Anat. Phys., Phys. Abt. Supplementband, pp. 109-170, 1901.

un organismo di questi, messo in un ambiente anisotonico, variare di volume per passaggio di acqua, fino al ristabilimento dell' equilibrio. Ma in realtà questa cosa non avviene, o per lo meno non rappresenta un fatto persistente, come è evidente solo che si pensi ad animali che hanno la possibilità di passare dal mare all' acqua dolce dei fiumi; i quali dovrebbero acquistare un volume decuplo e più se così fosse. Quale meccanismo compensatorio insorge?

Le presenti esperienze, fatte su alcuni Protozoi d' acqua dolce (specialmente Infusorî) e sulla *Limnaea stagnalis*, hanno avuto per scopo di aggredire — un po' indirettamente — tale questione; esse mostreranno come la prima reazione di uno di questi animali, immerso in una soluzione anormale, anisotonica, consiste in una variazione di volume, dipendente dal passaggio osmotico dell' acqua; ma dopo un certo tempo il volume torna quello di prima, avvenendo un passaggio di acqua e di sale, tantochè l' animale finisce per essere della stessa grandezza che aveva prima dell' esperienza, avendo aumentata o diminuita la quantità assoluta e relativa di sale nei suoi liquidi organici. Questa seconda reazione si presenta in tali condizioni da apparire intimamente dipendente dalle condizioni di vita e di salute dell' animale, ed appare rientrare in quella categoria di fenomeni che vanno sotto i nomi, rispettivamente, di assorbimento e di escrezione.

Qualche Protozoo (alcuni Flagellati) ha fatto eccezione a questa legge, non presentando in nessun caso la reazione osmotica; onde si deve ritenere probabile che il sale sperimentato (Na Cl) diffonda liberamente attraverso alla loro superficie esterna. Per contro, tale diffusibilità non esiste affatto in alcuni Protozoi senza canale digerente (*Opalina ranarum*), sì che si deve per essi correggere l' antico concetto, che, perchè privi di stomaco, si alimentino per *endosmosi*. L' ingresso delle sostanze anche in essi dipende da altre leggi — fisiologiche — che non sono quelle della diffusione.

2. *Tecnica.* — Nell' esame degli Infusorî, solo per determinarne le specie ed osservarne le minute particolarità, conviene di adoperare i soliti vetrini porta e copri-oggetti. Ma per osservarli nelle loro condizioni quasi normali di vita, val molto meglio di coltivarli in vetrini da orologio (conservati in una camera umida) o addirittura in vaschette di vetro a fondo piano, assai grandi per contenere una diecina di cm. c. di liquido, e munite di coperchio a smeriglio, per poterle conservare a lungo senza evaporazione. Questo sistema aveva per il mio scopo grandi vantaggi, giacchè mi permetteva di far variare molto comodamente la concentrazione del liquido. Prendevo, per esempio, 5 cm. c. di acqua contenente Infusorî (concentrazione quasi 0), ed aggiungevo ad essa 5 cm. c. di Na Cl 2 $^0/_{00}$; così ottenevo 10 cm. c. di liquido all' 1 $^0/_{00}$. Quando poi volevo col liquido di una vaschetta fare delle prove, in piccolo, di variazione di concentrazione, allora mi servivo di una pipetta costituita di un tubo di vetro tirato in punta non troppo aguzza. Immergendo questa pipetta nell' acqua o in soluzione Na Cl, e poi risollevandola, essa per

capillarità conservava una certa quantità di liquido, che era approssimativamente sempre la stessa. Io potevo in tal modo prendere una piccola porzione da un liquido, per esempio da una vaschetta di esperienza. Soffiando leggermente, versavo questo liquido in un vetrino da orologio; poi prendevo una piccola porzione (uguale) di una soluzione nota, ed anche questa volta riunivo i due liquidi e calcolavo facilmente la concentrazione del miscuglio. Gli Infusorî venivano presi colla pipetta in abbondanza, quando erano abbondanti nel liquido. Quando ve ne erano pochi, bisognava andarne alla caccia, ricercandoli al microscopio: vistine qualcheduno, alzavo rapidamente il tubo del microscopio, per poter immergere nella vaschetta la pipetta, e cercavo di farla andare di contro al centro della lente del condensatore Abbé. Dopo qualche tentativo, uno o due Infusorî venivano presi. Se essi erano nel fondo della vaschetta, naturalmente chiudevo la pipetta col dito all' estremità superiore finchè fosse arrivata al fondo della vaschetta colla punta; allora levavo il dito repentinamente.

Gli Infusorî li ottenevo o con infusi, o raccogliendo dell' acqua stagnante; prendevo acqua, erbe, terriccio ecc. Poi cambiavo l' acqua, lasciando le erbe, ecc., sostituendo l' acqua dello stagno con acqua potabile. Facevo quest' operazione più volte subito, e dopo qualche giorno; così facevo vivere gli Infusorî sempre nell' acqua potabile, che ha una concentrazione quasi 0, e da questo ambiente li prendevo per disporre e fare le esperienze.

3. *Alcuni Infusorî delle acque stagnanti.* — Cominciamo a vedere quanto possono esser sensibili alle soluzioni concentrate gli Infusorî di acqua dolce.

Esperienza I. — Presa dell'acqua stagnante da un fosso, se ne separano due porzioni: in A, si aggiunge Na Cl fino alla concentrazione di 0,5 °/₀₀; la porzione B serve di confronto. Già l'indomani in A non vi sono più Infusorî; in B ve ne sono parecchi. Alla superficie di A vi sono però molte cisti. I flagellati si conservano su per giù ugualmente nelle due porzioni.

La causa di questa estrema sensibilità, per la quale una differenza di concentrazione di 0,5 °/₀₀ produce l' incistidamento, è evidente. La concentrazione interna dell' Infusorio essendo piccolissima, quasi 0, ne segue che, per quanto poco sale si aggiunga nell' ambiente esterno, se si deve raggiungere l' equilibrio per il passaggio dell' acqua, quasi tutta l' acqua deve uscire dall' Infusorio.

Cito un altro esempio.

Esperienza II. — Vorticelle (*Vorticella nebulifera*) viventi nell'acqua potabile (concentrazione circa 0). Siccome, quando sono posate sul vetrino porta-oggetti, si attaccano ad esso col piede, si può benissimo sostituire il liquido in cui si trovavano, con un altro, senza perderle. Alcune, poste in Na Cl 5 °/₀₀, dopo pochi istanti cessano le contrazioni e i movimenti cigliari, e divengono grinzose, restringendosi.

Altre son messe in soluzione di Na Cl 1 °/₀₀. Dapprima si ha un breve stato contrattorio del filamento e del corpo cellulare. Poi ricomincia la distensione, ma non è com-

pleta la distensione del corpo cellulare. In una, dopo 15′ le ciglia non vibrano più. Dopo 30′, la distensione è di nuovo completa, le ciglia vibrano. Finiscono però tutte per morire un po' ingrinzite entro qualche ora.

Ma è inutile insistere su questo punto, che gli Infusorî cigliati delle acque dolci sono pochissimo resistenti alle soluzioni concentrate. E giacchè la morte avviene con la superficie del corpo cellulare ingrinzita, e il corpo stesso diminuito di grandezza, è evidente che la causa è la perdita di acqua per osmosi, e che il Na Cl *non traversa*, in queste condizioni di esperienza, *le pareti che nell'Infusorio separano l'interno dall'esterno*. Ma, se così fosse senza eccezione, non si potrebbe avere in questi animali nessuna adattabilità alle soluzioni concentrate. I fatti dimostrano il contrario.

Esperienza III. — Gen. *Halteria*, Dujardin. Questi piccoli cigliati sono molto curiosi per il modo di procedere, ora in un senso, ora nell'altro, a scatti, fermandosi ogni tanto. Li ho trovati in un'acqua stagnante, e coltivati nell'acqua potabile. Vale a dire, per più volte di seguito, le erbe dell'acqua stagnante raccolta furono cambiate di acqua, e poste in acqua potabile fresca. In un piccolo recipiente finirono questi cigliati per prevalere moltissimo sulle altre specie di Protozoi, rimanendo quasi soli ed abbondantissimi.

Col metodo della pipetta viene provata la loro resistenza alle soluzioni di Na Cl. Come regola generale, quando vengono posti in soluzioni concentrate, essi reagiscono in questo modo: immediatamente cominciano a correre rapidissimi per il liquido, cambiando direzione quando arrivano ai confini del liquido, e poche volte spontaneamente. Quando è vicino il loro ultimo momento, rallentano la loro corsa moltissimo, cominciano a procedere innanzi lentamente, e con moto irregolare, ruotando su sè stessi; si comincia già a distinguere la superficie del corpo grinzosa. Poi fanno qualche oscillazione, una piccola piroetta finale e si fermano. Le ciglia continuano a vibrare per qualche tempo. La forma del corpo, un poco triangolare normalmente, è più accentuatamente triangolare, la superficie notevolmente grinzosa, e le dimensioni ridotte. Morti, vengono alla superficie del liquido. Questi fenomeni si succedono nelle loro fasi più o meno rapidamente, secondo la concentrazione del liquido in cui gli animali vengono trasportati.

Da ripetute prove resultano come medie i seguenti numeri esprimenti il tempo della sopravvivenza nelle varie soluzioni di Na Cl:

1 ‰	2 ‰	3 ‰	4 ‰	5 ‰	1 %	2 %	3 %	5 %
	circa 2^h	circa 10′	circa 4′	1′,30″	45″	15″	6-7″	0

Le prove sono state fatte mescolando rapidamente quantità uguali dell'acqua cogli Infusorî e di soluzioni di Na Cl di concentrazione doppia di quella indicata nella tabella (metodo della pipetta).

11 Aprile, ore 15. Alcune porzioni dell'acqua colle *Halteriae* vengono mescolate con soluzioni di Na Cl, in modo da portarle alla concentrazione:

a) 0,5 ‰ *b*) 1 ‰

12 Aprile, ore 10. In *a* quasi tutte le *Halteriae* sono ancora vive; in *b* molte: ma vi sono dei cadaveri alla superficie del liquido.

Prova della resistenza: le *Halteriae* delle porzioni *a*, portate alla concentrazione di Na Cl 1 % muoiono in circa 50″; di 5 % in 2′ 40″.

Quelle delle porzioni *b* alla concentrazione di 1 %, in 50″.

In questi Infusorî, abituati da un giorno alla concentrazione di 0,5 ‰ Na Cl , la resistenza alle soluzioni più forti è un po' aumentata; muoiono

in 50″ anzichè in 45″ in Na Cl 1 %, e in 2′ 40″ anzichè in 1′ 30″ in Na Cl 5 %₀.

20 Aprile, ore 10. In *a* le *Halteriae* sono ancora vive, ma più scarse. In *b* pochissime, e notevolmente grinzose. In tutte le porzioni sono aumentati grandemente dei *Chilodon* (Ehrenberg), prima scarsissimi; specialmente nelle porzioni *b* ove sono comunissime le forme di divisione.

20 Aprile, ore 17. Le stesse condizioni. Prova della resistenza: le *Halteriae* delle porzioni *a* portate alla concentrazione di 1 % muoiono in 30″ circa.

21 Aprile, ore 10. In *a* non molte *Halteriae*, assai grinzose. In *b* nessuna *Halteria*, molti *Chilodon*.

22 Aprile. Morte tutte le *Halteriae*.

In questa esperienza, le *Halteriae* poste in Na Cl 0,5 %₀ hanno resistito per qualche giorno, ma hanno poi finito per morire raggrinzite. Dapprima la loro resistenza alle soluzioni più concentrate era aumentata, poi diminuita. Discuteremo dopo questi risultati. Intanto qui siamo sempre nel caso di tentativi infruttuosi di adattamento alle soluzioni più concentrate. Ma esaminiamo i risultati di quest'altra esperienza.

Esperienza IV. — A 5 cm. c. di acqua contenente moltissime *Halteriae*, qualche *Chilodon* e qualche *Gastrostyla Steinii* (Engelmann) si aggiungono, nel corso di varî giorni, 5 cm. c. di Na Cl al 4 %₀. E precisamente nel modo seguente:

20 Aprile,	cm. c.	1,5.	Si arriva così	alla	concentrazione	di Na Cl	0,5 %₀
21 »	»	0,5	»	»	»	»	1,1 %₀
22 »	»	0,5	»	»	»	»	1,3 %₀
23 »	»	0,5	»	»	»	»	1,5 %₀
24 »	»	1,0	»	»	»	»	1,7 %₀
25 »	»	0,5	»	»	»	»	1,8 %₀
26 »	»	0,5	»	»	»	»	2 %₀
		5,0					

Durante questo graduale aumento di concentrazione le *Halteriae*, alquanto grinzose, sono assai diminuite di numero, per la morte di alcune. I *Chilodon* sono aumentati, ed ancor più i *Gastrostyla*.

27 Aprile, ore 9. *Halteriae* in Na Cl 1 % muoiono in (varie prove): 65″-40″-30″-40″-34″. Si nota una certa irregolarità di comportamento, secondo gli individui.

28 Aprile. Le *Halteriae* sopravvissute non sono più grinzose. Anzi appaiono rotondeggianti e più rigonfiate del normale. Nei giorni successivi si avvicinano di più all'aspetto normale.

29 Aprile. Le *Halteriae*, portate alla concentrazione di Na Cl 0,5 %₀ (mediante 3 volumi di acqua distillata), muoiono in circa 7-8′. Dapprima intraprendono la solita corsa furiosa, che si fa a un certo punto più disordinata. Ad un tratto l'Infusorio scoppia, riducendosi in minutissimi frammenti, che si disperdono.

Questi ultimi resultati sono molto notevoli. Mostrano che nell'interno delle *Halteriae* la concentrazione è aumentata per ingresso di Na Cl. Infatti messe in una soluzione nella quale a stento resistono le *Halteriae* normali, perchè troppo concentrata, queste muoiono per rigonfiamento ed assunzione di acqua. Dopo il primo periodo di reazione osmotica alle soluzioni concen-

trate, nel quale si aveva il solito raggrinzimento, ne è sottentrato un altro, in cui gli Infusorî sono al contrario più rigonfiati, periodo transitorio anche questo, per ritornare poi ad un aspetto quasi normale. In questo ultimo stadio, in cui si hanno presso a poco le dimensioni primitive, l'assunzione di acqua alla concentrazione di 5 °/₀₀ dimostra evidentemente che il sale interno è in maggior quantità che all'inizio dell'esperienza. Ma quale significato ha quel periodo transitorio di aumento di volume? È evidente che questa seconda reazione indica, in questo momento, l'assorbimento di qualche cosa dall'esterno. Sarà acqua soltanto? No, perchè allora i succhi interni si diluirebbero di nuovo alla concentrazione primitiva stabilendosi un disequilibrio osmotico tra l'interno e l'esterno; ma non c'è bisogno di negare *a priori* questa possibilità; la nega *a posteriori* l'esperienza dello scoppiamento in Na Cl 0,5 °/₀₀. Dunque in quel periodo, nell'Infusorio entra acqua e sale. In queste condizioni si deve ritenere che le *Halteriae* si fossero adattate alla maggior concentrazione. Infatti, l'esperienza continua:

3 Maggio. Le *Halteriae* non acccennano a diminuire ulteriormente di numero.

29 Aprile, ore 15. Alcuni *Chilodon* e *Gastrostyla* si portano alla concentrazione di Na Cl 0,5 °/₀₀. Reagiscono con movimenti violenti, ma poi si calmano.

30 Aprile, ore 9. Sono tutti morti.

29 Aprile, ore 15. 5 cm.c. di liquido vengono tolti dalla vaschetta dell'esperienza, e messi in un'altra vaschetta. Si parla ormai di questa nuova vaschetta. Si aggiunge 1 cm.c. di Na Cl 8 °/₀₀ (si arriva così alla concentrazione di 3 °/₀₀).

30 Aprile, ore 9. Le *Halteriae* sono tutte morte. Sopravvivono specialmente i *Gastrostyla*. Si aggiunge 1 cm. c. di Na Cl 8 °/₀₀ (concentrazione: 3,7 °/₀₀).

1 Maggio. I *Gastrostyla* sono diminuiti.

3 » I *Gastrostyla* non sembrano ulteriormente diminuiti.

4, 5, 6 Maggio. Si aggiunge ogni giorno 1 cm. c. di Na Cl 8 °/₀₀ e si arriva così finalmente alla concentrazione di 5 °/₀₀.

8 Maggio, ore 14. I *Gastrostyla* vivono in queste condizioni. Ne vien posto uno in Na Cl 2,5 °/₀₀.

9 Maggio, ore 9. Questo *Gastrostyla* è morto.

10 Maggio. Un *Gastrostyla*, condotto alla concentrazione di 1 °/₀ Na Cl, dopo 3′ di piccoli giramenti ne fa qualcheduno più disordinato; poi rallenta di nuovo; si nota la superficie grinzosa. Dopo 11′ è quasi fermo. Dopo 12′ riprende un po', fa 2 o 3 movimenti, e poi cessa di nuovo per sempre. Le ciglia però vibrano ancora fino verso le ore 11,15′. Altre prove dànno resultati simili.

Il 27 di Aprile erano state fatte prove coi *Gastrostyla* che vivevano al 2 °/₀₀. Essi morivano, trasportati alla concentrazione di 1 °/₀, in circa 2′.

Abbiamo dunque, per quest'altra specie, gli stessi resultati: mano mano che si aumenta la concentrazione dell'ambiente, senza che gli Infusorî muoiano, aumenta la resistenza alle soluzioni più concentrate, e diminuisce per quelle che sono ora più diluite. Quando, nell'esperienza III, le *Halteriae* viventi in Na Cl 0,5 °/₀₀, mostravano una resistenza alle soluzioni concentrate, diminuita, (21 aprile), ciò dipendeva dal fatto che esse non si erano potute adattare, questa volta, alle nuove condizioni di vita. Infatti esse erano sempre

rimaste grinzose, e poco dopo morirono. Esse non avevano assorbito sale, e perciò l'essere già in soluzione un po' più concentrata rappresentava per loro uno svantaggio. Ecco come le apparenti discordanze nei resultati, quando tutte le condizioni siano accuratamente considerate, illuminano invece sempre di più questo fenomeno dell'*adattamento* alle soluzioni concentrate.

Poichè per ora si tratta di Infusorî che sono forniti di canale digerente, può sorgere il dubbio che i due momenti di reazione (perdita di acqua, assunzione di acqua e sale) siano dovuti all'entrata in gioco di membrane differenti: prima, la parete esterna del corpo cellulare, semipermeabile; poi la parete del canale digerente, capace di lasciar passare anche il sale. Veramente la supposizione non regge, perchè bisognerebbe ammettere nel 1° momento di reazione un meccanismo di chiusura della bocca, meccanismo che, in realtà, non sembra esistere. Ma pure ho voluto sperimentare su un Infusorio privo di canale digerente e di apertura buccale, per vedere se la parete esterna del corpo, che funge necessariamente da membrana assorbente, perchè non ce ne sono altre con cui venga in contatto il liquido ambiente, presentasse ostacolo al passaggio dell'Na Cl.

4. *Infusorî privi di canale digerente* (*Opalina*).

Esperienza V. — *Opalina ranarum.* Infusorio parassita dei girini di rospo, nel cui intestino si trova. La forma è allungata, e l'animale procede flessuosamente, spinto dai movimenti delle ciglia laterali del corpo, le quali si muovono ad onde procedenti dall'avanti all'indietro.

Preso a un girino il pezzo di intestino che contiene abbondantissimi questi Infusorî, lo ponevo su un vetrino da orologio, e lo aprivo. La quantità di liquido contenuta in questo pezzetto è scarsissima, sì che, aggiungendo abbondante quantità di una soluzione di Na Cl, si ha in definitiva con molta approssimazione la stessa concentrazione della soluzione adoperata.

È difficile sperimentare su questi Infusorî, perchè dopo qualche giorno muoiono, in qualunque soluzione siano stati messi.

In acqua distillata, le *Opalinae* si rigonfiano in pochi minuti, divenendo completamente tonde; muoiono presto, ma per qualche minuto si muovono anche dopo essere arrotondate.

In Na Cl 1 °/₀₀, si trovano tutte morte il giorno dopo, assai rigonfiate.

In Na Cl 2 e 3 °/₀₀, le stesse cose, meno accentuate.

Anche in Na Cl al 4 e al 5 °/₀₀, in generale le *Opalinae* muoiono in un giorno, rigonfiate alquanto. Una volta però in un vetrino con Na Cl al 4 °/₀₀, qualche *Opalina* sopravvisse anche più di 2 giorni, un poco rigonfiata. Dopo tre giorni dall'inizio dell'esperienza, erano ancora vive, e non più rigonfiate. Presentavano l'aspetto normale.

In Na Cl 6-7 °/₀₀ le *Opalinae* vivono per qualche giorno, senza visibilmente alterarsi. Deve essere infatti questa su per giù la concentrazione più abituale del contenuto intestinale dei girini, probabilmente simile, in generale, a quella del loro sangue.

In Na Cl 8-9 °/₀₀ un giorno o due qualche volta resistono. Ma sono molto visibilmente contratte. I fenomeni del rigonfiamento e della contrazione per perdita d'acqua in questi animali sono molto facilmente riconoscibili, perchè il rigonfiamento porta ad un

accorciamento, e ingrossamento; la contrazione, a una diminuzione dei diametri trasversali, mentre che il diametro longitudinale non varia.

In Na Cl 1 % circa come sopra, solo più accentuata la contrazione.

In Na Cl 3 % muoiono subito in grande contrazione.

Dunque anche in questi Infusorî privi di canale digerente vi è la stessa sensibilità alle soluzioni anisotoniche, le quali producono restringimento o rigonfiamento negli animali, evidentemente perchè l'acqua sola può passare a ristabilire l'equilibrio. Quando quelle *Opalinae* che sopravvissero più a lungo delle altre in Na Cl al 4 ‰, dapprima gonfiatesi, tornarono alla forma primitiva, evidentemente non uscì fuori soltanto l'acqua che era stata assorbita in più, per portare i succhi interni alla stessa concentrazione esterna, ma sale e acqua nelle stesse proporzioni della concentrazione interna ed esterna, in modo da conservare la condizione di isotonicità tra dentro e fuori. Assistiamo qui, in senso inverso, allo stesso fenomeno già osservato per gli altri Infusorî presi in esame.

I resultati delle esperienze esposte in questa Nota si possono insomma così riassumere:

Gli Infusorî trasportati da un ambiente ad un altro di tonicità diversa, presentano dapprima una variazione di volume dovuta a passaggio di acqua attraverso alla loro parete, osmoticamente impermeabile ai sali; poi una variazione di volume inversa, per passaggio non osmotico di acqua e sali (assorbimento o escrezione secondo i casi) la quale può anche temporaneamente oltrepassare le condizioni iniziali.

Gli Infusorî privi di canale digerente hanno la parete esterna impermeabile (per endosmosi) al Na Cl *disciolto nell'acqua.*

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Blaserna annuncia che alla seduta assistono i Soci stranieri R. Lepsius e P. Sabatier.

Lo stesso Vicepresidente dà la dolorosa notizia della morte del Socio straniero A. M. Cornu, e legge il seguente cenno necrologico del defunto Accademico.

Alfredo Maria Cornu nacque il 6 marzo 1841, studiò nell'École polytechnique e nell'École des Mines, ottenne il diploma d'ingegnere nel 1866, e fu nominato nell'anno 1871 professore di Fisica alla Scuola politecnica, carica che egli tenne fino alla sua morte.

Entrò nell'Accademia di Parigi nel 1878 e appartenne alla nostra Accademia fino dal 26 agosto 1896 in qualità di Socio straniero.

Esordì brillantemente nella carriera scientifica colla sua tesi di laurea, in cui trattò della riflessione cristallina, tentando di perfezionare la teoria di Fresnel col modificarne le condizioni e i limiti fra i due mezzi. Questa prima ricerca esercitò un'influenza decisiva su tutto l'indirizzo della sua vita scientifica, in cui si occupò principalmente di ottica, e rivelò presto il valore del suo ingegno.

Non mi sarebbe possibile seguire una ad una le molte sue ricerche; mi permetta però l'Accademia di raggrupparle e di dare un breve cenno almeno delle principali.

Lo studio delle radiazioni più rifrangibili lo occupò a parecchie riprese e di lui rimane uno studio accuratissimo dello spettro ultravioletto solare, in continuazione del celebre atlante dell'Angström. Interessanti ricerche laterali ebbe poi a compiere sull'assorbimento atmosferico dello spettro ultravioletto; così rimanendo sempre nel campo della Spettroscopia è a ricordarsi la sua ingegnosa e semplicissima disposizione dell'immagine solare oscillante sulla fenditura dello spettroscopio che permette di distinguere immediatamente le linee solari dalle telluriche.

Al Cornu la scienza va debitrice di studî molto eleganti sulle condizioni di acromatismo nei fenomeni d'interferenza, la soluzione del problema della fotometria per luce polarizzata, ricerche sui reticoli di diffrazione e sulle loro anomalie focali. Ed a proposito dei suoi studî sul fenomeno Zeeman, giova ricordare la scoperta che la D_1, normalmente alle linee di forza magnetica, si scompone in quattro linee, risultato che non ebbe forse ancora una spiegazione teorica soddisfacente.

Lavoro d'importanza capitale fu quello sulla velocità della luce, in cui perfezionò il metodo di Fizcau e con una bella serie di misure giunse a fissarne il valore in 300,400 chilometri al secondo, valore che si può ancora oggidì considerare come molto preciso.

Da questo argomento era naturale che egli volgesse la sua mente a problemi di geodesia e di astronomia, fra i quali ricordo le belle ricerche di fotografia astronomica, la costruzione di una mira lontana nell'osservatorio di Nizza e il suo apparecchio zenito-nadirale.

Voglio poi menzionare, fra le ricerche di fisica terrestre, la determinazione della densità della terra, eseguita in modo magistrale e che deve considerarsi come una delle migliori fin qui esistenti.

Non vi è quasi ramo di Fisica, che egli non abbia coltivato. In fatto di acustica devono ricordarsi le sue ricerche sugli intervalli musicali, nel caso di melodia e di armonia, e quelle sulle vibrazioni rotanti, che accompagnano le trasversali delle corde.

Il Cornu fu in tutta la sua vita grande maestro dell'arte sperimentale; se anche non ebbe concetti nuovi originali, la critica fine e incisiva dei metodi e delle disposizioni sperimentali gli assicureranno sempre un alto posto

nella scienza. Negli ultimi anni della sua vita, troncata all'improvviso, egli fu membro autorevole del Comitato internazionale di Pesi e Misure, per il quale la recente sua perdita rimarrà molto sensibile.

Fu anche grande maestro di conferenze popolari ed aveva un talento tutto speciale di mettere a portata di molti le teorie più elevate della sua scienza.

Morì all'età di poco più di 60 anni, e sto per dire, in pieno vigore della sua vita. Mandiamo all'illustre consorella di Parigi le condoglianze della nostra Accademia per la prematura perdita di un membro così importante.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 maggio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Considerazioni sull'insegnamento dell'Astronomia nelle Università italiane.* Nota del Socio G. Celoria.

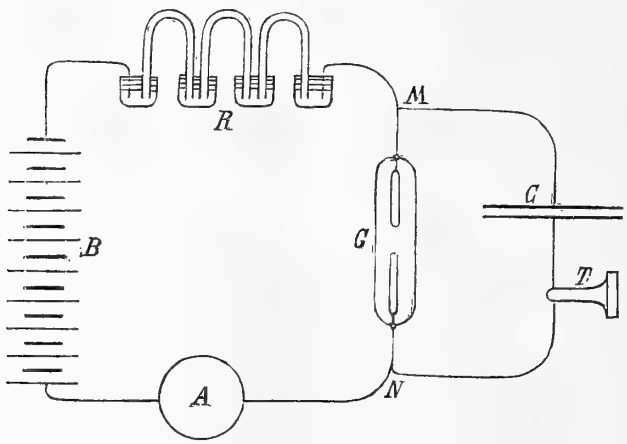
I Regolamenti universitarî stabiliscono che l'insegnamento dell'Astronomia nella Facoltà di scienze sia dato in quelle Università alle quali è annessa una Specola. Questo suppone anzitutto che l'Astronomia non possa insegnarsi senza Osservatorio, ciò che non è; l'Osservatorio pure essendo utilissimo all'efficacia dell'insegnamento non è però necessario. Questo inoltre tende a limitare l'insegnamento alla sola Astronomia pratica, e, senza volerlo, finisce per dare all'Astronomia nelle Facoltà nostre il carattere di materia accessoria e quasi tollerata, iniziando in Italia rispetto agli studî astronomici un inevitabile periodo di decadenza.

Propongo che l'insegnamento dell'Astronomia sia dato nella Facoltà di scienze in tutte le Università, e che in tutte l'Astronomia e pratica e teorica sia dichiarata materia d'obbligo e fondamentale.

Io non so immaginare un Dottore in scienze che ignori i principî fondamentali dell'Astronomia e dei metodi di indagine astronomica. Se un tal dottore esiste, egli, pur non occupandosi ex-professo di Astronomia, ha certo una coltura generale scientificamente incompleta. L'Astronomia è scienza vasta e comprensiva; di molte scienze si vale, e a molte scienze, alla Chimica, alla Fisica, alle Matematiche, alla Meccanica, dà argomenti importanti di studio. L'Astronomia inoltre mirabilmente insegna a studiare con metodo critico e obbiettivo ogni sistema sia pur complesso di fatti, in modo incomparabile risveglia e svolge l'abito positivo della mente.

Fisica. — *Sulla produzione di suoni per mezzo delle scariche nei tubi a gas rarefatto o nelle fiamme.* Nota del Socio Augusto Righi.

La disposizione sperimentale da me impiegata, e rappresentata dall'annesso diagramma, è assai simile a quella del Duddell (1) per l'esperienza dell'arco voltaico sonoro; ma il fenomeno acustico, al quale essa dà origine, ha una causa alquanto diversa.



Nella mia esperienza all'arco voltaico, dell'esperienza di Duddell, è sostituito un tubo ad aria rarefatta *G* con elettrodi d'alluminio, e nel circuito derivato *MCN*, oltre al condensatore *C* è inserito un telefono *T*. La batteria *B* è composta di 400 piccoli accumulatori, i quali, quando nel circuito *BRMNA* sia inserita una forte resistenza *R*, costituita da tubi pieni di una soluzione di solfato di rame, danno una corrente di pochi milliampère, misurata da un milliamperometro *A*. Quanto al tubo *G*, esso ha 4 c. di diametro e contiene due elettrodi cilindrici lunghi 5 c. e grossi 0,6, arrotondati alle estremità, uno dei quali è fisso, mentre l'altro può, mediante piccole scosse date al tubo, porsi a diverse distanze dal suo compagno. Però una distanza di circa mezzo centimetro fra gli elettrodi è assai conveniente, dato che l'aria, che li circonda, abbia la pressione di circa un centimetro.

(1) The Electrician, pag. 310, december 21, 1900.

Se si apre il circuito derivato e si chiude il circuito principale, si stabilisce in questo la debole corrente, mentre fra gli elettrodi appare la luminosità ben nota, formata da luce rossa sull'anodo e luce violetta, estendentesi a minor distanza, sul catodo. Se si chiude ora il circuito derivato, qualche volta nulla resta modificato, mentre altre volte si produce invece il fenomeno, che sto per descrivere; il quale poi con certezza quasi assoluta si produce, se si chiude prima il circuito del condensatore, poi quello degli accumulatori.

Operando in tal guisa alla luminosità silenziosa e tranquilla e, almeno apparentemente, continua, che esiste sugli elettrodi, si sostituisce una diversa forma di scarica, la quale è indubbiamente e regolarmente intermittente. L'aspetto ne è diverso secondo che la resistenza del circuito derivato, che nel caso della figura consiste principalmente nella resistenza del rocchetto del telefono, è molto piccola o no.

Se la detta resistenza è piccola (telefono con rocchetto a filo corto e grosso) veggonsi fra gli elettrodi del tubo delle vere scintille larghe e diffuse di colore rosso, accompagnate da un bagliore verdastro sul catodo. Ove il bagliore verde tocca il catodo, si suol osservare un punto bianco assai luminoso. Qualche volta la stessa apparenza si osserva anche sull'anodo.

Se invece la resistenza nel circuito derivato non è tanto piccola, la luminosità del tubo è meno differente, da quello che era, quando era aperto il circuito derivato. Si vede cioè la piccola colonna di luce rossa sull'anodo ed il bagliore violetto (o luce negativa) sul catodo, che però forma ora intorno al medesimo una specie di guaina assai estesa e di spessore uniforme. Ma ciò che principalmente distingue la scarica, quando è chiuso il circuito derivato, è la sua intermittenza, che è sensibile direttamente quando è lenta, e che si desume, quando sia rapida, dal suono, emesso dal telefono.

Quest'ultimo non è a rigore indispensabile giacchè, anche senza di esso, si ode un debole suono musicale accostando l'orecchio al tubo G. Il telefono giova a rendere questo suono più manifesto; ed infatti il suono, che da esso emana, quando è inserito nel circuito derivato, può essere tanto intenso, da essere udito in tutto un vasto ambiente. Questo suono ha in generale un timbro musicale; ma diviene rauco, se gli elettrodi del tubo non sono levigati e puliti.

L'altezza del suono così generato, dipende dalle varie condizioni della esperienza. Essa infatti cresce:

1. diminuendo la resistenza R;
2. aumentando il numero degli accumulatori della batteria B, giacchè non tutti i 400 occorrono sempre per l'esperienza;
3. diminuendo la capacità del condensatore C;
4. diminuendo la distanza fra i due elettrodi entro il tubo G;
5. diminuendo la pressione dell'aria nel tubo stesso.

È dunque possibile variare entro i più estesi limiti l'intermittenza della scarica. Per esempio, facendo R eguale a più decine di migliaia di Ohm, prendendo per C una capacità di qualche decimo di microfaraday, e adoperando il minimo numero possibile di accumulatori, le scariche si succedono tanto lente, da contarsene appena due o tre al secondo. Naturalmente con tale lenta intermittenza non si ode un suono continuo, ma solo un colpo secco nel telefono ad ogni scintilla nel tubo.

Variando nel senso dovuto la capacità, la resistenza ecc., si ottiene un suono più o meno acuto a piacere, ed anche in successione suoni di diverse e determinate altezze. Per esempio, basta staccare dalla batteria uno dei reofori e toccare con esso ora l'uno ora l'altro degli elementi da cui la batteria è costituita, per ottenere una successione melodica di suoni musicali, e realizzare così uno strumento musicale di nuovo genere.

Nello stesso modo che prima si era fuori dal limite dei suoni udibili, perchè la frequenza delle scariche era troppo piccola, si può oltrepassare l'altro limite e arrivare a frequenze tanto elevate, da far cessare nuovamente la sensazione sonora. Se infatti, ridotta la resistenza R a non essere che di qualche centinaia di Ohm, si prende come condensatore C il noto condensatore ad aria di Epino, i due dischi del quale sieno ad una distanza reciproca di circa mezzo millimetro, il telefono T (che in questo caso occorre abbia un rocchetto a lungo filo onde non dia suoni troppo deboli) fa udire un sibilo acutissimo. Basta allora allontanare leggermente l'una dall'altra le due armature del conduttore, o avvicinare appena l'uno all'altro i due elettrodi nel tubo ecc., perchè il suono salga tanto in altezza, da uscire dal limite superiore di udibilità. E, come accade in tal caso, se più persone prendono parte all'esperienza, mentre alcune più non odono alcun suono, altre provano ancora la molestia d'un suono estremamente acuto.

Il numero di vibrazioni per secondo del suono ottenuto è di gran lunga minore del numero d'oscillazioni elettriche per secondo del sistema formato colla capacità C e coll'autoinduzione esistente nel circuito derivato; perciò è esclusa affatto l'idea, che il detto suono abbia l'origine medesima di quello ottenuto da Duddell coll'arco voltaico. Si constata d'altronde, che l'altezza medesima è quasi indipendente dall'autoinduzione. Non si tratta dunque di una corrente alternativa, ma di una successione di scariche, di cui parmi si possa render conto nel modo seguente.

Nell'atto in cui si chiude il circuito, la differenza di potenziale fra gli elettrodi del tubo non raggiunge il valore massimo che con un certo ritardo, dovuto a ciò che si forma dapprima una corrente, che carica il condensatore. Ma tale corrente scema prontamente, la differenza di potenziale aumenta, e si forma una scarica del condensatore attraverso il tubo. Al cessare di questa il fenomeno si ripete indefinitamente, ed è chiaro che tale spiegazione, la quale potrà forse essere in seguito completata, rende ragione del modo nel quale la

frequenza delle scariche dipende dalla resistenza, capacità ecc. È poi verosimile che con graduali modificazioni delle varie parti dei circuiti si possa passare, dai suoni in tal modo generati, a quelli ottenuti dal Duddell, la cui altezza dipende dalla frequenza delle oscillazioni elettriche permanenti nel circuito derivato.

Poichè il circuito derivato è percorso da una corrente intermittente, esso potrà dare fenomeni d'induzione, analoghi a quelli osservati da Peuchert (1) con disposizione simile a quella di Duddell. Basta infatti inserire nel circuito del condensatore il filo grosso di un grande rocchetto di Ruhmkorff, perchè si formino scintille fra i capi del filo indotto. Tali scintille possono essere lunghe oltre un centimetro, quando la corrente principale data dagli accumulatori è di pochi milliampère. Esse decrescono naturalmente in lunghezza, quando si aumenta la frequenza delle scariche nel tubo.

Fenomeni affatto simili a quelli descritti si ottengono sostituendo al tubo *G* la fiamma di un becco Bunsen. Una tale fiamma fu pure adoperata dal Ruhmer (2) in sostituzione dell'arco voltaico, nell'esperienza dell'arco parlante del Simon (3). Occorre però rendere abbastanza conduttrice la fiamma, deponendo su una delle lastrine di platino in essa immerse e funzionanti da elettrodi, un poco di cloruro di sodio. La fiamma emette da sola il suono, però con intensità minore, di quella del suono prodotto dal telefono *T*.

Le esperienze qui descritte sono state preparate ed eseguite in poco tempo; per così dire, improvvisate; se, quando potrò intraprenderne uno studio dettagliato, esse mi daranno, come è da prevedere, qualche risultato degno di menzione, ne farò oggetto di altra pubblicazione.

Matematica. — *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura.* Nota del Corrispondente G. Ricci.

In questa Nota mi propongo di stabilire coi metodi del Calcolo differenziale assoluto le formole fondamentali della teoria delle varietà di natura qualunque ad n dimensioni considerate come immerse in varietà ad $n + m$ dimensioni pure qualunque.

Queste formole pel caso di $m = 1$ sono state date dal prof. Bianchi nella traduzione tedesca della sua *Geometria Differenziale*; con metodo semplice ed elegante, ma che forse male si estenderebbe al caso generale. — Per questo esse nella loro sostanza si trovano invece esposte in una Memoria

(1) Elektr. Zeitschr. pag. 467, 1901.
(2) Physik. Zeitschr., februar 23, pag. 325, 1901.
(3) Wied. Ann., t. 64, pag. 233, 1898.

pubblicata dal sig. Voss nel volume XVI dei *Mathematische Annalen*; in modo tuttavia, che poco si presta alle applicazioni ed alle interpretazioni geometriche. — Perciò non mi sembra inopportuno il ritornare sull'argomento per presentare quelle formole sotto la forma più semplice consentita dalle notazioni proprie dei metodi, dei quali faccio uso, e per trarne alcune conseguenze relative alla curvatura di una varietà qualunque.

Per ciò, che riguarda, le notazioni ed i metodi del Calcolo differenziale Assoluto mi riferirò alla esposizione fattane dal prof. Levi-Civita e da me in una Memoria inserita nel volume LIV dei *Mathematische Annalen*, la quale, occorrendo, sarà qui citata colla lettera M seguita dai numeri corrispondenti al capitolo, al paragrafo e, eventualmente, alla formola da consultare.

1. Siano

$$\varphi \equiv \sum_{1}^{n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

$$\psi = \sum_{1}^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, dy_u\, dy_v$$

due forme differenziali quadratiche positive. Perchè la varietà V_n definita dalla prima sia contenuta nella V_{n+m} definita dalla seconda è necessario e basta che si possano determinare $y_1, y_2, \ldots, y_{n+m}$ in funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in modo da soddisfare alle equazioni

$$\text{(I)} \qquad \sum_{1}^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, y_{u/r}\, y_{v/s} = a_{rs}\ (^1)$$

Derivando queste covariantemente secondo φ si ottengono delle equazioni, a cui equivalgono le

$$\text{(1)} \qquad \sum_{1}^{n+m}{}_{u}\, c_{u/r} \sum_{1}^{n+m}{}_{v} \left(c_{uv}\, y_{v/st} + \sum_{1}^{n+m}{}_{w}\, c_{vw,u}\, y_{v/s}\, y_{w/t}\right) = 0\,,$$

nelle quali i simboli $c_{vw,u}$ rappresentano i coefficienti di Christoffel di prima specie relativi alla forma ψ.

Si rappresenti con $\varepsilon_{\alpha\beta}$ lo zero o l'unità, secondo che gli indici α e β sono distinti o coincidono, e si determinino le espressioni $z_{\alpha/u}$ in modo da soddisfare alle equazioni

$$\text{(2)} \qquad \sum_{1}^{n+m}{}_{u}\, y_{u/v}\, z_{\alpha,u} = 0$$

$$\text{(3)} \qquad \sum_{1}^{n+m}{}_{uv}\, c^{(uv)}\, z_{\alpha/u}\, z_{\beta/v} = \varepsilon_{\alpha\beta}\,,$$

designandosi con $c^{(uv)}$ i coefficienti della forma reciproca a ψ.

(1) Gli indici r, s, t, a cui non siano attribuiti particolari valori, si intenderanno sempre suscettibili di tutti i valori $1, 2, .., n$; quelli u, v, w dei valori $1, 2, .., n+m$ e quelli α, β, γ .. dei valori $1, 2, .., m$.

Le $z_{1/u}, z_{2/u}, \ldots, z_{m/u}$ potranno riguardarsi (M, II, 1) come sistemi coordinati covarianti di m congruenze ortogonali di linee tracciate in V_{n+m} e normali a V_n. I sistemi coordinati controvarianti delle congruenze stesse avranno invece gli elementi

$$z_\alpha^{(u)} = \sum_1^{n+m} v \; c^{(uv)} \, z_{\alpha/v} .$$

Introducendo delle indeterminate

$$b_{\alpha/rs} = b_{\alpha/sr}$$

potremo alle equazioni (1) sostituire le

$$\text{(II)} \qquad y_{u'/rs} = \sum_1^m \alpha \; z_\alpha^{(u')} \, b_{\alpha/rs} - \sum_1^{n+m} uvw \; c^{(uu')} \, c_{vw,u} \, y_{v/r} \, y_{w/s} .$$

2. Dalle (2) derivate covariantemente secondo φ, tenendo conto delle (II), seguono le

$$\sum_1^{n+m} u \; y_{u/r} \left(z_{\alpha/u/s} - \sum_1^{n+m} vw \; z_\alpha^{(v)} \, c_{uw,v} \, y_{w/s} \right) = - \, b_{\alpha/rs} ,$$

che equivalgono alle

$$\text{(4)} \qquad z_{\alpha/u/s} = \sum_1^{n+m} vw \; z_\alpha^{(v)} \, c_{uw,v} \, y_{w/s} - \sum_1^{n+m} v \, c_{uv} \sum_1^n p \; b_{\alpha/ps} \, y_v^{(p)} + \sum_1^m \beta \; \mu_{\alpha\beta/s} \, z_{\beta/u} ,$$

rappresentandosi con $\mu_{\alpha\beta/s}$ delle nuove indeterminate; le quali, come risulta derivando le (3), debbono essere legate dalle relazioni

$$\text{(5)} \qquad \mu_{\alpha\beta/s} + \mu_{\beta\alpha/s} = 0 .$$

Alle (4) equivalgono poi le

$$\text{(4')} \qquad z_{\alpha/s}^{(u')} = - \sum_1^{n+m} uvw \; c^{(u'u)} \; z_\alpha^{(v)} \, c_{vw,u} \, y_{w/s} - \sum_1^n p \; b_{\alpha/ps} \, y_{u'}^{(p)} + \sum_1^m \beta \; \mu_{\alpha\beta/s} \; z_\beta^{(u')} .$$

Si derivino le (II) tenendo conto delle (4') e si eliminino le derivate terze delle y, applicando note formole (M, I, 6, (23)). Si perverrà ad un sistema di formole, che si può scindere nei due gruppi seguenti:

$$\text{(III)} \qquad \sum_1^m \alpha (b_{\alpha/rt} \, b_{\alpha/ps} - b_{\alpha/rs} \, b_{\alpha/pt}) + \sum_1^{n+m} uu'vv' \; c_{uu',vv'} \, y_{u/p} \, y_{u'/r} \, y_{v/s} \, y_{v'/t} = a_{pr,st} ;$$

$$\text{(IV)} \qquad b_{\alpha/rst} - b_{\alpha/rts} + \sum_1^m \beta \, (\mu_{\alpha\beta/s} \, b_{\beta/rt} - \mu_{\alpha\beta/t} \, b_{\beta/rs}) +$$

$$+ \sum_1^{n+m} uu'vv' \; c_{uu'\,vv'} \; z_\alpha^{(u)} \, y_{u'/r} \, y_{v/s} \, y_{v'/t} = 0 ,$$

nelle quali $a_{pr,st}$; $c_{uu',vv'}$ rappresentano i simboli di Riemann relativi alle forme φ e ψ.

Le formole (III) e (IV) costituiscono la generalizzazione, rispettivamente, della formola di Gauss e di quelle di Codazzi nella ordinaria teoria della superficie.

Se la varietà V_{n+m} è a curvatura costante K, le (III) e (IV) assumono rispettivamente la forma

$$\sum_1^m{}_\alpha \left(b_{\alpha|rt}\, b_{\alpha|ps} - b_{\alpha|rs}\, b_{\alpha|pt}\right) + K\left(a_{ps}\, a_{rt} - a_{pt}\, a_{rs}\right) = a_{pr,st}$$

$$b_{\alpha|rst} - b_{\alpha|rts} + \sum_1^m{}_\beta \left(\mu_{\alpha\beta|s}\, b_{\beta|rt} - \mu_{\alpha\beta,t}\, b_{\beta|rs}\right) = 0\,.$$

E perchè V_n possa considerarsi contenuta in V_{n+m} sarà in questo caso necessario e sufficiente che si possano determinare le $b_{\alpha|rs}$ e le $\mu_{\alpha\beta|r}$ in modo da soddisfare a queste equazioni.

3. Alle formole (I), (II), (III) e (IV) si può estendere, qualunque sia m, la trasformazione già da me esposta pel caso $m = 1$ (M, IV, 4).

Si assuma in V_n una ennupla ortogonale di riferimento $[1], [2], .., [n]$ e siano $\lambda_{1|r}$, $\lambda_{2|r}$, ..., $\lambda_{n|r}$ i sistemi coordinati covarianti delle congruenze, che la costituiscono. Si facciano poi le posizioni

$$\text{(A)} \qquad y_{u|r} = \sum_1^n{}_i\, \xi_i^{(u)}\, \lambda_{i|r}$$

$$(6) \qquad b_{\alpha|rs} = \sum_1^n{}_{hk}\, \omega_{\alpha hk}\, \lambda_{h|r}\, \lambda_{k|s}$$

$$(7) \qquad \lambda_{i|rs} = \sum_1^n{}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \lambda_{h|r}\, \lambda_{k|s}\,.$$

Per le (A) le (I) assumeranno la forma

$$\sum_1^n{}_{hk}\, \lambda_{h|r}\, \lambda_{k|s} \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_k^{(v)} = a_{rs}\,,$$

ovvero (M, II, 1, (4′))

$$\sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_k^{(v)} = \varepsilon_{hk}\ (^1)$$

E poichè queste ci dicono semplicemente che $\xi_1^{(u)}$, $\xi_2^{(u)}$, .., $\xi_n^{(u)}$ sono i sistemi coordinati covarianti di n congruenze di linee contenute in V_{n+m} (le quali, come risulta dalle (A), pei punti di V_n coincidono rispettivamente colle

(1) Gli indici, i, h, k si intenderanno qui e in seguito suscettibili dei valori $1, 2, .., n$.

([1], [2], ..., [n]) potremo ad esse sostituire le (A), purchè in queste alle $\xi_i^{(u)}$ attribuiamo i significati ora stabiliti.

Le (II), tenuto conto delle (A) e delle (6) assumono la forma

$$\sum_1^n{}_{rs}\,\lambda_h^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,y_{u'|rs} = \sum_1^m{}_{\alpha}\,z_\alpha^{(u')}\,\omega_{\alpha hk} - \sum_1^{n+m}{}_{vw}\,c^{(uu')}\,\xi_h^{(v)}\,\xi_k^{(w)}\,c_{vw,u}\,;$$

mentre le (A) stesse derivate covariantemente secondo φ, tenendo conto delle (7), dànno

$$\sum_1^n{}_{rs}\,\lambda_h^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,y_{u'|rs} = \sum_1^n{}_{i}\,\xi_i^{(u')}\gamma_{ihk} + \frac{d\xi_h^{(u')}}{ds_k}\,.$$

Le (II) si trasformano dunque nelle

$$\text{(B)}\qquad \frac{d\xi_h^{(u')}}{ds_k} = \sum_1^m{}_{\alpha}\,z_\alpha^{(u')}\,\omega_{\alpha hk} - \sum_1^n{}_{i}\,\xi_i^{(u')}\,\gamma_{ihk} - \sum_1^{n+m}{}_{vw}\,c^{(uu')}\,\xi_h^{(v)}\,\xi_k^{(w)}\,c_{vw,u}\,.$$

o nelle equivalenti

$$\text{(B')}\qquad \frac{d\xi_{h|u}}{ds_k} = \sum_1^m{}_{\alpha}\,\omega_{\alpha hk}\,z_{\alpha|u} - \sum_1^n{}_{i}\,\gamma_{ihk}\,\xi_{i|u} + \sum_1^{n+m}{}_{vw}\,c_{uv,w}\,\xi_h^{(w)}\,\xi_k^{(v)}\,.$$

In fine le (III) e (IV) assumono rispettivamente la forma

$$\text{(C)}\qquad \begin{cases} \sum_1^m{}_{\alpha}\,(\omega_{\alpha ik}\,\omega_{\alpha jh} - \omega_{\alpha ij}\,\omega_{\alpha hk}) + \sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'}\,c_{uu',vv'}\,\xi_h^{(u)}\,\xi_i^{(u')}\,\xi_j^{(v)}\,\xi_k^{(v')} = \\ = \sum_1^n{}_{prst}\,a_{pr,st}\,\lambda_h^{(p)}\,\lambda_i^{(r)}\,\lambda_j^{(s)}\,\lambda_k^{(t)}\,. \end{cases}$$

$$\text{(D)}\qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega_{\alpha ij}}{ds_l} - \dfrac{d\omega_{\alpha il}}{ds_j} + \sum_1^n{}_{k}\,\{\omega_{\alpha ik}\,(\gamma_{kjl} - \gamma_{klj}) + \omega_{\alpha jk}\,\gamma_{kil} - \omega_{\alpha lk}\,\gamma_{kij}\} + \\ + \sum_1^m{}_{\beta}\left(\omega_{\beta il}\,\dfrac{d\mu_{\alpha\beta}}{ds_j} - \omega_{\beta ij}\,\dfrac{d\mu_{\alpha\beta}}{ds_l}\right) + \sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'}\,c_{uu',vv'}\,z_\alpha^{(u)}\,\xi_i^{(u')}\,\xi_j^{(v)}\,\xi_l^{(v')} = 0\,. \end{cases}$$

4. Essendo

$$\xi_{h|u} = \sum_1^{n+m}{}_{v}\,c_{uv}\,\xi_h^{(v)}\,,$$

se si indica con $\vartheta_{h|u}$ l'angolo, che la linea della congruenza [h] fa colla linea coordinata y_u tracciata in V_{n+m}, si hanno le

$$\text{(8)}\qquad \sqrt{c_{uu}}\,\cos\vartheta_{h|u} = \xi_{h|u}\,,$$

per le quali le (B′) si trasformano nelle

$$-\sqrt{c_{uu}}\,\operatorname{sen}\vartheta_{h/u}\frac{d\vartheta_{h/u}}{ds_k}=-\cos\vartheta_{h/u}\frac{d\sqrt{c_{uu}}}{ds_k}+\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{hk}\,z_{\alpha/u}$$
$$-\sum_1^n{}_i\,\gamma_{ihk}\,\xi_{iu}+\sum_1^{n+m}{}_{vw}\,c_{uv,w}\,\xi_k^{(v)}\,\xi_h^{(w)}\ .$$

Si supponga la varietà V_{n+m} euclidea e che $y_1, y_2, \ldots, y_{n+m}$ siano coordinate cartesiane ortogonali. — Le precedenti assumeranno la forma

$$-\operatorname{sen}\vartheta_{h/u}\frac{d\vartheta_{h/u}}{ds_k}=\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{\alpha hk}\,z_{\alpha/u}-\sum_1^n{}_i\,\gamma_{ihk}\,\xi_{i/u}\ . \tag{9}$$

Considerando poi un punto qualunque O di V_n e supponendo l'asse delle y_1 normale a V_n in O, in questo punto sarà

$$\vartheta_{h/1}=\frac{\pi}{2}\ ,\quad \xi_{i/1}=0\ ,$$

e quindi le (9), per $u=1$, ci daranno

$$-\frac{d\vartheta_{h/1}}{ds_k}=\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{\alpha hk}\,z_{\alpha/1}\ . \tag{10}$$

Poichè le $z_{1/1}, z_{2/1}\ldots, z_{m/1}$ sono i coseni degli angoli, che l'asse delle y_1 fa con m direzioni uscenti da O ed in questo punto normali fra di loro ed a V_n, il secondo membro della (10) può riguardarsi come la proiezione sulla direzione y_1 di un vettore normale a V_n e che secondo le direzioni ricordate ha le componenti $\omega_{\alpha hk}$.

Per $k=h$ la (10) ci dice che questo vettore preso in direzione opposta e proiettato sopra una qualunque direzione $[\beta]$ normale a V_n rappresenta la curvatura della proiezione della linea $[h]$ sulla giacitura piana $[h\beta]$ determinata dalle due direzioni $[h]$ e $[\beta]$. — Per questa ragione il vettore di componenti $-\omega_{\alpha hh}$ può chiamarsi *curvatura normale relativa a* V_{n+m} della congruenza $[h]$ di linee tracciate in V_n.

Per $k\neq h$ il vettore di componenti $-\omega_{\alpha hk}$ proiettato sulla direzione $[\beta]$ rappresenta l'angolo, che fanno fra di loro le direzioni di due linee $[h]$, di cui una passi per O e l'altra pel punto P vicinissimo ad O sulla direzione $[k]$, proiettato sulla giacitura piana $[h\beta]$ e diviso per OP. — Tenendo conto delle relazioni

$$\omega_{\alpha hk}=\omega_{\alpha kh}\ ,$$

che scendono dalle (6), si potrà dire che questo vettore rappresenta la *curvatura intermedia o mista relativa a* V_{n+m} delle due congruenze $[h]$ e $[k]$ di linee tracciate in V_n. — Si ha così un significato, per quanto so, non

ancora avvertito della torsione geodetica delle linee tracciate sulle ordinarie superficie.

Queste interpretazioni si estendono facilmente al caso, in cui la varietà V_{n+m} sia qualunque, avendo presente che ad essa per le considerazioni relative all'intorno di un determinato punto O possiamo sempre sostituire la varietà euclidea ad $n+m$ dimensioni tangente a V_{n+m} in O.

Se nelle (C) poniamo $k=i$, $h=j$, ne ricaviamo in particolare le

$$(C') \begin{cases} \sum_1^m{}_\alpha (\omega_{\alpha ii}\omega_{\alpha jj} - \omega_{\alpha ij}^2) + \frac{1}{4}\sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'} c_{uu',vv'} (\xi_i^{(u)}\xi_j^{(u')} - \xi_i^{(u')}\xi_j^{(u)})(\xi_i^{(v)}\xi_j^{(v')} \\ - \xi_i^{(v')}\xi_j^{(v)}) = \frac{1}{4}\sum_1^n{}_{pr,st} a_{pr,st}(\lambda_i^{(p)}\lambda_j^{(r)} - \lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(p)})(\lambda_i^{(s)}\lambda_j^{(t)} - \lambda_i^{(t)}\lambda_j^{(s)}). \end{cases}$$

E poichè (M, IV, 4, (G)) $\omega_{\alpha ii}\,\omega_{\alpha jj} - \omega_{\alpha ij}^2$ è la espressione della curvatura totale della superficie geodetica di V_n passante per un punto qualunque O e determinata dalle due direzioni $[i]$ e $[j]$, considerata come appartenente alla varietà euclidea V_3 determinata da queste e dalla direzione $[\alpha]$, essa potrà dirsi *curvatura totale della giacitura* $[ij]$ *di* V_n *rispetto* alla direzione $[\alpha]$ normale a V_n. — Le formole (C') stabiliscono quindi il seguente teorema:

« Sia O un punto qualunque di una varietà V_n contenuta in una V_{n+m}; « e siano $[1], [2], \ldots, [m]$ m direzioni passanti per O ortogonali fra di loro « due a due e normali a V_n. — La somma delle curvature totali di una « superficie geodetica σ di V_n passante per O, comunque data, rispetto alle « direzioni $[1], [2], \ldots, [m]$ è indipendente dalla scelta di queste ».

Designando poi questa col nome di *curvatura di* σ *relativa a* V_{n+m}, la (C') ci dice ancora che

« La curvatura di Gauss o curvatura assoluta di σ in ogni punto O è « eguale alla curvatura di σ relativa a V_{n+m} aumentata della curvatura « assoluta della superficie geodetica di V_{n+m} tangente a σ ».

Osserverò in fine che nel caso $n=3$, $m=1$ le formole (C) e (D) assumono rispettivamente la forma

$$\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}^2 + \sum_1^3{}_{uv}\,\gamma^{(uv)}\,z_u\,z_v = G$$

$$\frac{d\omega_{i1}}{dx_2} - \frac{d\omega_{i2}}{dx_1} + \sum_1^2{}_k \{\omega_{ik}(\gamma_{k12} - \gamma_{k21}) + \omega_{1k}\,\gamma_{ki2} - \omega_{2k}\,\gamma_{ki1}\}$$

$$= (-1)^i \sum_1^3{}_{uv}\,\gamma^{(uv)}\,z_u\,z_{i+1/v}, \qquad (i=1,2)$$

rappresentandosi con G l'invariante di Gauss relativo alla forma φ, e posto

$$c \cdot \gamma^{(uv)} = c_{u+1\,u+2\,,\,v+1\,v+2}\,,$$

colla convenzione di considerare come equivalenti gli indici congrui rispetto al modulo 3.

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota I di E. DANIELE, presentata dal Socio VOLTERRA.

1. Il metodo esposto da Jacobi (1) per risolvere il problema del movimento di un sistema di n punti quando le forze applicate ammettano una funzione potenziale indipendente dal tempo, dà luogo, per il moto di un sol punto in un piano, alla considerazione di certi sistemi ortogonali, la cui particolarità consiste in ciò, che uno qualunque di essi ha una delle sue famiglie costituita da traiettorie del punto (2). Precisamente, se U è la funzione potenziale e h la costante delle forze vive, ogni integrale della equazione

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2\,(\mathrm{U} + h)$$

eguagliato ad una costante rappresenta una famiglia di curve ortogonali ad un sistema di traiettorie del punto, per modo che da ogni integrale di quella equazione si deduce una famiglia di traiettorie del punto mobile. Se poi, insegna il metodo di Jacobi, indichiamo con $f(x\,,y\,,a)$ un integrale dell'equazione precedente contenente la costante arbitraria essenziale a, l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \text{cost.}$$

fornisce tutte le traiettorie del punto che corrispondono ad un medesimo valore della costante delle forze vive h; e così si ottengono infiniti sistemi ortogonali, di cui una famiglia è formata di traiettorie, dipendenti dalla costante a e definiti dalle equazioni

$$(\alpha) \qquad f(x\,,y,a) = \text{cost.}, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = \text{cost.}$$

Si può ora domandare se fra questi sistemi ne esistano di quelli costi-

(1) *Vorlesungen ü. Dynamik*, 21. u. 22. Vorl.

(2) Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, livre V, chap. VI.

tuiti non da *una*, ma da *due* famiglie di traiettorie. È da una tale domanda che traggono origine questa breve Nota e un'altra che ad essa farà seguito. Da quanto verrò esponendo risulta che siffatti sistemi (necessariamente isotermi) non esistono nel movimento definito da una funzione potenziale affatto generica; per incontrarli bisogna assumere come funzione potenziale un integrale dell'equazione

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 \lg U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lg U}{\partial y^2} = 0 ,$$

e prendere la costante h eguale a zero (tolto il caso affatto ovvio in cui la forza applicata sia nulla).

Una volta riconosciuti, nei nn. 2 e 3, i movimenti ai quali dobbiamo limitare le nostre considerazioni, risolvo (n. 4) la questione di determinare effettivamente i sistemi, della natura che ho detto, corrispondenti a un dato movimento. Nel n. 5 mostro con un breve calcolo come nel caso attuale le due equazioni (α) non siano sostanzialmente distinte, secondo è da prevedersi. Dopo di avere, nella Nota II, fatto vedere che la determinazione dei sistemi in questione equivale alla ricerca delle geodetiche su una superficie sviluppabile (n. 6), applico, per fare un esempio, nei numeri seguenti la teoria svolta al caso delle forze centrali: almeno a quella classe di forze centrali la cui funzione potenziale soddisfa all'equazione (β).

2. Teorema. Se θ e θ_0 sono due integrali dell'equazione

$$(1) \qquad \Delta_1 \theta \equiv \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 = 2\,(U + h)$$

tali che le linee $\theta = \text{cost.}$, $\theta_0 = \text{cost.}$ siano ortogonali, il sistema di linee $(\theta\,,\,\theta_0)$ è isotermo.

Difatti, siccome le $\theta = \text{cost.}$ sono ortogonali ad una famiglia di traiettorie del punto, questa famiglia avrà per equazione differenziale

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}\,dx - \frac{\partial \theta}{\partial x}\,dy = 0 ;$$

ma le traiettorie ortogonali delle $\theta = \text{cost.}$ sono, d'altra parte, le linee $\theta_0 = \text{cost.}$, onde dovendo l'equazione precedente essere identica colla

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \theta_0}{\partial y}\,dy = 0 ,$$

dovrà aversi

$$(2) \qquad \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = k\,\frac{\partial \theta}{\partial y} , \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = -\,k\,\frac{\partial \theta}{\partial x} ,$$

indicando con k un fattore di proporzionalità. Da queste quadrando e sommando si deduce

$$\Delta_1\theta_0 = k^2\Delta_1\theta$$

e poichè è

$$\Delta_1\theta_0 = \Delta_1\theta = 2(U + h),$$

ne viene

$$k^2 = 1.$$

Le (2) si riducono dunque a

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x} = \pm\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\theta_0}{\partial y} = \mp\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

e queste dicono appunto che le linee $\theta = \text{cost.}$, $\theta_0 = \text{cost.}$ formano un sistema ortogonale isotermo.

Il teorema si può enunciare anche in questi termini: Se le linee $\theta = \text{cost.}$, $\theta_0 = \text{cost.}$, ortogonali fra loro, sono traiettorie del punto, il sistema ortogonale (θ, θ_0) è isotermo.

Viceversa: Se θ è un integrale della (1), ed ammette la funzione coniugata θ_0, anche θ_0 è un integrale della (1), e le linee $\theta = \text{cost.}$, $\theta_0 = \text{cost.}$ formano un sistema ortogonale (isotermo) di traiettorie del punto.

Raccogliendo in un solo enunciato il teorema precedente col suo inverso, possiamo dire: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee* $\theta = \text{cost.}$ *formino, insieme colle linee ad esse ortogonali, un sistema di traiettorie del punto mobile, è che la funzione* $\theta(x, y)$ *verifichi simultaneamente le due equazioni*

$$\Delta_1\theta = 2(U + h), \quad \Delta_2\theta \equiv \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Quel sistema ortogonale è allora isotermo.

3. La questione di determinare i movimenti, nei quali sono possibili sistemi ortogonali composti esclusivamente di traiettorie del punto, è dunque ridotta a trovare le condizioni affinchè le due equazioni (3) abbiano una soluzione comune.

Derivando ora la prima delle (3) rispetto a x oppure rispetto a y, e tenendo conto della seconda, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y}; \end{aligned}$$

queste, risolte rispetto a $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}$ danno:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \dfrac{1}{2(U+h)}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial\theta^2}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{1}{2(U+h)}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right), \end{cases}$$

e scrivendovi accanto l'altra

$$(4')\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{1}{2(U+h)}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right),$$

potremo dire che le condizioni cercate non sono altro che le condizioni d'integrabilità del sistema (4), (4'). Queste condizioni sono

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\,,$$

ed eseguendo i calcoli si trova che si riducono all'unica

$$(5)\qquad (U+h)\,\Delta_2 U - \Delta_1 U = 0\,.$$

La U non dipende altro che dalle coordinate x e y, e non contiene affatto la costante h, per cui dovendo l'equazione essere soddisfatta identicamente, dovrà aversi, fintantochè h non è nulla,

$$U\Delta_2 U = \Delta_1 U = 0\,.$$

Queste due condizioni si riassumono poi nell'unica

$$U = \text{costante}\,.$$

Abbiamo dunque: *l'unico movimento in cui esistano sistemi ortogonali (isotermi) composti di sole traiettorie del punto, e nei quali la costante delle forze vive non sia nulla, è il movimento rettilineo uniforme.* Quei sistemi ortogonali sono, in tal caso, formati dalle rette parallele ad una stessa direzione e dalle loro perpendicolari.

4. Lasciando da parte questo caso così semplice e supponendo ora $h = 0$, l'equazione di condizione (5) si riduce a

$$(5')\qquad U\Delta_2 U - \Delta_1 U = 0\,,$$

e ci rimane da passare alla effettiva determinazione dei corrispondenti sistemi ortogonali di traiettorie. Il procedimento che terremo ci farà ritrovare per U la condizione (5'), e ridurrà il problema delle traiettorie alle quadrature.

Questo problema, per quanto si è detto, consiste nel trovare le soluzioni comuni alle equazioni (3) con $h = 0$, cioè le soluzioni del sistema

$$(3') \qquad \Delta_1\theta = 2U\,, \quad \Delta_2\theta = 0\,.$$

Posto

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \theta_1\,, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \theta_2\,,$$

il sistema (3') è equivalente a quest'altro:

$$(3'') \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 = 2U\,, \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial y} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x} = 0\,.$$

Dalla prima di queste ricaviamo

$$\theta_2 = \pm\sqrt{2U - \theta_1^2}\,,$$

e sostituendo nelle altre due otteniamo per θ_1 le equazioni

$$(6) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x} = \mp\dfrac{\partial \lg U}{\partial y}\sqrt{2U - \theta_1^2} + \dfrac{\partial \lg U}{\partial x}\theta_1 \\ 2\dfrac{\partial\theta_1}{\partial y} = \pm\dfrac{\partial \lg U}{\partial x}\sqrt{2U - \theta_1^2} + \dfrac{\partial \lg U}{\partial y}\theta_1\,. \end{cases}$$

Intanto la condizione di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}$$

dà, osservando che deve aver luogo identicamente,

$$(7) \qquad \Delta_2 \lg U = 0\,,$$

e questa coincide precisamente coll'equazione (5') (1).

Le (6) poi si integrano subito facendo la sostituzione

$$\theta_1 = \pm\sqrt{2U}\,\varphi\,,$$

poichè con ciò si trasformano nelle altre

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg U}{\partial y}\sqrt{1 - \varphi^2} = 0$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg U}{\partial x}\sqrt{1 - \varphi^2} = 0\,,$$

(1) L'equazione di condizione che s'è trovata per la U, si può interpretare dicendo che le linee $U = \text{cost.}$ (equipotenziali) insieme colle loro traiettorie ortogonali (linee di forza) debbono formare un sistema isotermo.

dalle quali si deduce integrando:

$$\text{arc sen } \varphi = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}\,dx\right) + a\,,$$

a essendo una costante arbitraria. Si ha quindi

$$(8)\qquad \begin{cases} \theta_1 = \pm\sqrt{2U}\,\text{sen}\left[a + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}\,dx\right)\right] \\ \theta_2 = \pm\sqrt{2U}\,\cos\left[a + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}\,dx\right)\right], \end{cases}$$

e la funzione θ che si cerca vien data dalla formola

$$(9)\qquad \theta = \int(\theta_1\,dx + \theta_2\,dy)\,.$$

Le formole (8) e (9) risolvono il problema: s'intende che la U che vi figura dev'essere un integrale della (7).

5. La funzione θ data dalla (9) contiene la costante arbitraria a non additiva; quindi sono infiniti i sistemi isotermi, composti di sole traiettorie, corrispondenti ad una data funzione potenziale. Anzi si può dire che questi sistemi esauriscono tutte le traiettorie del punto. Difatti, per il modo come θ contiene la costante a, secondo la teoria di Jacobi queste ultime sono *tutte* rappresentate dall'equazione

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = \text{cost.}\,,$$

ed i nostri sistemi isotermi sono appunto quelli costituiti dalle coppie di famiglie $\theta(x, y, a) = \text{cost.}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial a} = \text{cost.}$

A questo punto si rende palese una notevole particolarità dei movimenti che studiamo, in relazione col metodo di Jacobi. Siccome i sistemi isotermi che abbiamo segnalato sono formati esclusivamente di traiettorie del punto, ne viene che anche l'equazione $\theta(x, y, a) = \text{cost.}$ deve rappresentare tutte le traiettorie, e quindi si può sostituire all'altra $\dfrac{\partial \theta}{\partial a} = \text{cost.}$ Il procedimento generale che conduce alla determinazione delle traiettorie si semplifica dunque in quei casi in cui la funzione potenziale verifica la (7) ed è nulla la costante delle forze vive; poichè una volta calcolata la θ mediante le formule (8) e (9), si hanno senz'altro le traiettorie eguagliando θ ad una costante arbitraria.

Sarà bene mostrare direttamente sulle formole come la cosa accada. In sostanza bisogna far vedere che le due equazioni

$$\theta(x, y, a) = b\,, \quad \frac{\partial\theta}{\partial a} \equiv \theta'(x, y, a') = b'$$

rappresentano le medesime linee; ossia, che se L è una linea di equazione $\theta(x, y, a) = b$, dove a e b hanno certi valori determinati, dev'essere possibile attribuire ad a' e b' valori tali che l'equazione $\theta'(x, y, a') = b'$ rappresenti ancora la stessa linea: il che equivale a dire che si deve poter esprimere a' e b' in funzione di a e b in modo che le due equazioni

$$\theta(x, y, a) = b\,, \qquad \theta'(x, y, a') = b' \tag{10}$$

coincidano.

Ora ponendo per brevità

$$\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}\,dx\right) = 2P\,,$$

le (8) si scrivono

$$\theta_1 = \pm\sqrt{2U}\,\operatorname{sen}(a + P)\,, \quad \theta_2 = \pm\sqrt{2U}\cos(a + P), \tag{8'}$$

onde

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial a} = \theta_2\,, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial a} = -\theta_1\,;$$

avremo quindi dalla (9):

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \int\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\,dx + \frac{\partial\theta_2}{\partial a}\,dy\right) = \int(\theta_2\,dx - \theta_1\,dy)\,,$$

e che $\theta_2\,dx - \theta_1\,dy$ sia un differenziale esatto risulta dalla seconda delle (3''). Le equazioni (10), cioè

$$\begin{cases} \int\}\,\theta_1(x, y, a)\,dx + \theta_2(x, y, a)\,dy\,\{ = b \\ \int\}\,\theta_2(x, y, a')\,dx - \theta_1(x, y, a')\,dy\,\{ = b' \end{cases} \tag{10'}$$

si riducono allora l'una all'altra mediante la sostituzione

$$a' = a + (4k + 1)\frac{\pi}{2}\,, \quad b' = -b\,, \tag{11}$$

con k intero qualunque; difatti si ha dalle (8') e (11):

$$\theta_1(x, y, a') = \pm\sqrt{2U}\,\operatorname{sen}(a' + P) = \pm\sqrt{2U}\cos(a + P) = \quad \theta_2(x, y, a)$$
$$\theta_2(x, y, a') = \pm\sqrt{2U}\cos(a' + P) = \mp\sqrt{2U}\,\operatorname{sen}(a + P) = -\theta_1(x, y, a),$$

per cui sostituendo nella seconda delle (10') e leggendovi $-b$ in luogo di b', essa si identifica colla prima.

Fisica. — *Ricerche di radioattività indotta.* Nota III di Alfonso Sella, presentata dal Socio Blaserna.

1. Nella Nota precedente (Rendiconti, XI, pag. 242) ho annunciato che lasciando a lungo l'aria esposta all'emanazione dell'ossido di torio in spazio chiuso e provocando poi in seno a quest'aria un effluvio elettrico fra punta e piano, si trova radioattiva quella porzione del piano che è colpito dall'effluvio e con contorni che corrispondono a quelli delle figure elettriche del Kundt.

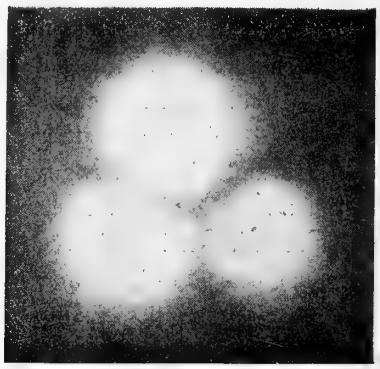
Mi sia ora permesso di fermarmi un momento sopra i processi seguiti per ottenere queste figure. Esse furono ottenute dal Kundt nel 1869 nel seguente modo. Ad una lamina metallica è affacciata una punta; si ricopre la lamina di polvere di licopodio e poi la si elettrizza tenendo la punta al suolo; soffiando via la polvere sulla lamina, rimane aderente un cerchio di polvere a contorni molto netti, sotto la punta, e qualunque sia il segno della elettrizzazione. Il Righi ha mostrato nei suoi lavori sulle ombre elettriche come queste figure si possono ottenere direttamente colla fotografia, ricoprendo la lamina con una lastra sensibile, ed Holtz ha osservato il cerchio del Kundt come fenomeno luminoso ricoprendo la lamina di una stoffa di seta. Recentemente il De Heen ha riottenuto le figure del Kundt avvicinando una fiamma, ovvero una punta, ad una superficie isolante elettrizzata e poi lasciandovi cadere sopra della polvere di zolfo.

Ma queste figure si possono ottenere immediatamente nel seguente modo: si provoca l'effluvio fra punta e piano in aria contenente minutissime particelle in sospensione, ottenute facendo ardere nelle vicinanze una fiamma fumosa od un nastro di magnesio. Le particelle vanno immediatamente a deporsi sulla lamina secondo le figure del Kundt. Questa disposizione è molto comoda per dimostrare tutte le circostanze, che influiscono sovra queste figure, come distanza della punta dal piano, segno elettrico della punta, e la deformazione subìta dai cerchi, quando alla lamina si affacciano più punte da essa equidistanti. Ma di tutto questo non è ora il caso di occuparci e ne ho parlato solo in via incidentale. Mi preme solo di rilevare il modo, col quale avviene questa deposizione delle particelle sospese nell'aria sulla lamina metallica.

Le ricerche di Nahrwold, Aitken, Lodge, R. v. Helmholtz, Vandeyver hanno dimostrato la floculazione quasi istantanea delle polveri e dei fumi sospesi nell'aria e la sparizione della nebbia in vicinanza di conduttori ad alto potenziale. Il metodo di ottenere le figure del Kundt, che sopra ho riferito,

mostra adesso dove vanno a battere le particelle sospese nell'aria; esse, elettrizzate dall'effluvio partente dai conduttori, vanno a fissarsi sui corpi investiti dal soffio elettrico.

2. Ritorniamo ora alla esperienza, che ho riferito in principio. Presento nell'unita figura la riproduzione di una fotografia ottenuta prendendo una lamina, attivata con tre punte in aria esposta a lungo alle emanazioni dell'ossido di torio, ricoprendola con carta nera opaca e poi sovrapponendo ad essa una lastra sensibile. La figura è identica a quella che si osserva direttamente sulla lastra, quando si fa avvenire l'effluvio in aria contenente particelle sospese e si può ben dire *figura del Kundt radioattiva*. Essa si ot-



tiene con punte sia negative, sia positive; e questo mostra che la piccola carica positiva propria delle particelle dell'emanazione torica, dimostrata dal fatto che in campi elettrici deboli esse si muovono nel senso delle linee di forza, non entra in giuoco; ma che si deve immaginare che esse particelle attive stando a lungo nell'aria in un recipiente chiuso si attaccano ad aggregati molecolari piuttosto considerevoli, i quali si comportano poi come le particelle di fumo sospese.

Se le cose stanno così, è presumibile che mettendo due sistemi di lamina e punta nel medesimo spazio chiuso, provocando per brevi istanti l'effluvio in un sistema, l'aria, per così dire, si purificherà immediatamente ed un effluvio successivo nel secondo sistema non potrà più produrre alcuna attivazione. L'esperienza ha confermato pienamente questa veduta. In una medesima cassa della capacità di circa 300 litri, dalle due parti della bacinella contenente l'ossido torico e ad una stessa distanza posi due lamine colle rispettive punte affacciate; quattro fili adduttori uscivano dalla cassa. Lasciata la cassa chiusa per 24 ore, eccitai una prima lamina per un minuto e poi subito dopo la seconda. La prima lamina si trovò fortemente attiva e la se-

conda mostrò una traccia di attivazione, quale viene assunta da una lamina lasciata a sè in un ambiente contenente emanazioni toriche.

E lo stesso fatto della immediata purificazione dell'aria per un effluvio risulta anche da questo, che per attivare una lamina basta una durata brevissima dell'effluvio, un quarto d'ora non producendo un effetto maggiore di un minuto.

E si comprende ora, perchè l'effluvio, che si ottiene ponendo punta e piano in comunicazione coi poli di un trasformatore Tesla, non attivi la lastra, come ho riferito nella Nota precedente. Infatti si conosce (Lehmann) che in queste condizioni non si produce vento elettrico.

3. Un'altra conseguenza probabile della struttura grossolana, per così dire, delle particelle attive sarebbe che esse si possono raccogliere per altre vie, oltre l'elettrica, come p. es. filtrando l'aria attraverso l'ovatta. Si rinchiuse l'ossido di torio in una cassa munita di due fori e poi per uno di questi si produsse un'aspirazione mediante un tubo collegato con un aspiratore ad acqua ed interponendo nel tubo un batuffolo di ovatta leggermente compressa; proseguendo l'aspirazione sino a che tutta l'aria contenuta nella cassa (come al solito in riposo da 24 ore) fosse rinnovata. Cimentando poscia il filtro di ovatta all'apparecchio di misura, constatai che l'ovatta aveva acquistato intense proprietà radioattive. E l'aria filtrata perde d'altra parte le proprietà, che ho ritrovato per l'aria stata a lungo in riposo in presenza di emanazioni toriche. Così quell'aria filtrata portata in una seconda cassa, dove funzioni un effluvio fra punta e piano, non genera più alcuna attività nella lamina, mentre che ciò avviene se l'aria non è stata filtrata ed in eguale misura quasi, come se la lamina fosse attivata nella cassa principale. E così disponendo di seguito due filtri nello stesso percorso, il secondo non presenta più traccie di attività.

Facendo gorgogliare l'aria estratta dalla cassa principale in acqua, questa arresta una parte delle particelle attive. Questo si constata evaporando a secco l'acqua in una capsula metallica e poi cimentando la capsula, che si ritrova radioattiva. L'impoverimento dell'aria gorgogliata si dimostra poi mediante un effluvio prodotto nella seconda cassa. L'attivazione dell'ovatta è dello stesso genere di quella provocata su lamine metalliche dal processo elettrico e questo risulta dal modo con cui varia col tempo. Aria fresca che passa sopra l'ossido di torio e che trascina con sè l'emanazione torica non viene alterata filtrando attraverso l'ovatta o gorgogliando nell'acqua, secondo quanto è stato osservato dal Rutherford. Tutto questo mostra quali profonde modificazioni subisca l'emanazione torica mantenuta lungo tempo in recipienti chiusi.

4. Le esperienze precedenti si riferiscono tutte ad aria esposta a lungo ad emanazioni toriche, ma mi hanno servito — stante la maggiore intensità

degli effetti — di guida e di schiarimento per lo studio dell'aria atmosferica ordinaria. Vengo ora alle esperienze istituite con quest' ultima.

Provocando un effluvio fra punta e piano per pochi minuti in una cantina chiusa da lungo tempo — operavo nella stanza a temperatura costante dell' Istituto Fisico di Roma, la quale non ha altra apertura all' infuori della porta — si ottiene una forte attivazione della lamina. L'effluvio si può provocare con una macchinetta ad influenza, ma più comodamente, stante la facilità con cui la macchina si diseccita in un ambiente alquanto umido, con un rocchetto Ruhmkorff di dimensioni medie e colla seguente disposizione. Il polo negativo del rocchetto è a terra, l' altro in comunicazione con un filo che termina a punta; affacciato a questa si trova un disco metallico in comunicazione coll' armatura interna di una boccia di Leida di dimensioni medie, la cui armatura esterna è al suolo. Dall' armatura interna parte una resistenza liquida costituita da un lungo tubo capillare di vetro ripieno di acqua distillata, al cui altro estremo è collegata la lamina da attivarsi; finalmente affacciate a questa lamina si trovano le punte collegate col suolo.

Attivata una prima lamina, se si passa ad elettrizzare una seconda e poi successivamente una terza, si nota una attivazione sempre decrescente. La spiegazione scaturisce subito dalle esperienze, che ho riferito più sopra; l'aria della stanza va successivamente purificandosi dalle particelle attive in essa sospese.

Poi passai ad una filtrazione dell' aria. Nel mezzo della stanza arrivava dall' esterno un lungo tubo, alla cui estremità era posto un filtro di ovatta. Dal di fuori si poteva produrre un'aspirazione costringendo l'aria della stanza a filtrare attraverso l'ovatta; dopo alcune ore di aspirazione l'ovatta cimentata all'apparecchio di misura diede segni molto netti di attivazione. L' ovatta, lasciata a sè, perde rapidamente le sue proprietà attive, molto più che non quando ha filtrato dell'aria contenente le emanazioni toriche. Questa differenza, che si ritrova costantemente, quando si paragonano corpi attivati con aria atmosferica ordinaria o con aria artificialmente provveduta di emanazioni toriche è molto caratteristica e prova che, malgrado tutte le analogie, esiste una differenza profonda fra l' attivazione dovuta all' emanazione torica e quella prodotta dalle particelle attive contenute nell' aria atmosferica.

5. Ho anche istituito delle esperienze per vedere il comportamento di aria stata esposta a lungo all' emanazione torica portata poi in un ambiente non contenente ossido di torio e poi lasciata a sè; e per questo ho fatto uso, come al 3, di due casse collegate con un tubo, nella prima delle quali era l' ossido torico e nella seconda la lamina colle punte affacciate. Se ora si produce l' effluvio nella seconda cassa ad intervalli diversi dopo di averla riempita di aria estratta dalla prima (si intende riempiendola ad ogni esperienza), si può giudicare delle modificazioni subite da quest'aria col tempo.

La proprietà di attivare la lastra si mantiene quasi costante nelle prime tre ore; è ridotta circa alla metà dopo 6 ore, e dopo 16 al sesto.

6. Ho voluto anche ricercare se si può fissare le particelle attive su di un isolante investito dal soffio elettrico. A tale uopo adottai la seguente disposizione. Alle punte al suolo era affacciata una lastra di vetro, la cui superficie posteriore era ricoperta nella parte centrale da stagnola, che veniva elettrizzata. L'effluvio dalle punte si produce meno bene in queste condizioni, non avvenendo lo scambio elettrico, e perciò non è a raccomandarsi l'uso di una macchina elettrostatica, che si diseccita facilmente. Meglio è adoperare il rocchetto colla disposizione descritta al 4.

Per cimentare adesso la lastra isolante all'apparecchio di misura descritto nella Nota precedente, si dovette ricorrere all'artificio di ricoprire la faccia della lastra stata esposta all'effluvio con un foglio di stagnola. Così si aveva una superficie conduttrice; però i raggi emanati dalla lastra di vetro attivata dovevano prima attraversare la stagnola, di cui peraltro conoscevo per esperienze preliminari il potere assorbente. La lastra di vetro mostrò un'attivazione molto minore di quella ottenuta a condizioni eguali da una lastra metallica, ma sempre molto notevole, e la minore attivazione può anche spiegarsi in parte colla minore energia o concentrazione del soffio.

7. Ricorderò ora una prova in cui ho tentato di attivare una lastra, col solito processo elettrico, in aria chiusa, in cui avevo posto del fosforo umido ossidantesi, che notoriamente rende l'aria fortemente conduttrice. L'esperienza diede risultato negativo.

8. Riferirò in fine i risultati preliminari di alcune esperienze ancora in corso, istituite per decidere se si ottiene una radioattività sugli elettrodi, quando si elettrolizza una soluzione di nitrato torico. A tale scopo presi il liquido detto commercialmente « liquido Auer » che è una soluzione concentrata di nitrato di torio con poco nitrato di cerio, e lo acidificai fortemente con acido nitrico. Facendo passare una corrente debole in modo che si noti appena uno svolgimento di bollicine agli elettrodi, si trova fortemente attivo l'elettrodo negativo. È da osservarsi che con corrente intensa ed a caldo si ottiene un deposito metallico agli elettrodi, la cui natura sta ora studiando il dott. Montemartini.

Noto che la radioattività così ottenuta va decrescendo col tempo, come quelle prodotte coi processi precedenti; la quale circostanza gioverà a caratterizzarne la natura.

Nessun risultato ottenni elettrolizzando una soluzione acida di nitrato di uranio.

Fisica. — *Su due nuovi fenomeni magneto-ottici osservati normalmente alle linee di forza.* Nota preliminare di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio BLASERNA.

Pensando alla natura intima del fenomeno scoperto nel 1875 dal dott. Kerr, alla birifrangenza cioè generata da un campo elettrostatico agente su di un dielettrico solido o liquido, la possibilità di un analogo fenomeno in un campo magnetico scaturisce immediatamente. Nelle esperienze di Kerr si tratta di forze elettrostatiche agenti, parallelamente alla direzione del campo, sulle particelle ultime di un mezzo materiale isolante, forze che, distruggendo la isotropia del mezzo, generano i fenomeni di birifrangenza. Considerando invece un campo magnetico che investa una sostanza sensibilmente magnetica, si deve riconoscere che, anche in tal caso, debbano esistere delle forze tra le minime particelle di essa, le quali, se la materia è sufficientemente deformabile od orientabile nella sua ultima struttura, possano generare birifrangenza, normalmente alle linee di forza del campo.

Veramente dai notevoli lavori di Voigt, risulterebbe che in questa direzione, tutte le sostanze, dotate di forte potere rotatorio magnetico, dovrebbero divenire birifrangenti. E anzi, lo stesso Voigt ha trovato la birifrangenza magnetica nei vapori di sodio, e l'ha cercata inutilmente nel flint. Inoltre Cornu, da pochi giorni mancato ai vivi, accennava a fenomeni caratteristici che si dovrebbero osservare normalmente alle linee di forza di un campo magnetico.

Prescindendo dalle idee teoriche e dalle esperienze dei due eminenti fisici citati, ho intrapreso da qualche tempo delle ricerche sperimentali, unicamente guidato dall'intento di verificare la giustezza o meno dell'idea più sopra esposta.

È mio scopo di accennare in questa breve Nota, sorvolando sui numerosi tentativi infruttuosi che precedettero, alla reale constatazione da me fatta di casi di netta birifrangenza di speciali sostanze magnetiche in soluzioni acquose, e di un secondo fenomeno, del tutto nuovo anche per la sua natura, presentato dalle stesse soluzioni.

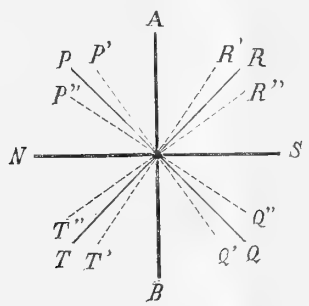
La *birifrangenza magnetica* è presentata in piccolissima misura dal *cloruro ferroso* in soluzione non molto concentrata, ed in grado notevolissimo da talune varietà di *ferro dializzato* od *ossido ferrico in soluzione colloidale.* Alcuni campioni di quest'ultimo liquido, così incerto nella sua struttura molecolare, diluiti in tant'acqua da sembrare pressochè incolori, contenuti in vaschette trasparenti lunghe 7 cm., e sotto l'azione di campi magnetici di 18000 unità circa, presentano un potere birifrangente uguale

a circa $^1/_4$ di lunghezza d'onda nel giallo, sicchè *luce polarizzata linearmente, dopo aver traversato il liquido, resta trasformata in luce polarizzata circolarmente.* Il fenomeno è per altri campioni di quella sostanza, nullo o quasi, e per altri è misto al secondo fenomeno di cui parlo più sotto. Quando si ha da fare realmente con una netta birifrangenza, la si può compensare talvolta comprimendo un pezzo di vetro parallelamente alle linee di forza (*birifrangenza positiva*), e in altri casi stirando il vetro *(birifrangenza negativa).*

Continuando lo studio della birifrangenza, mi sono imbattuto in un altro fenomeno, il quale è generalmente presentato da speciali soluzioni di *cloruro ferrico che hanno agito su idrati di ferro.*

Esso consiste in una rotazione del piano di polarizzazione della luce, quando questo piano non è parallelo o normale alle linee di forza. Tali rotazioni sono indipendenti dal senso del campo, talchè sono da distinguersi, anche per tal riguardo, dalle rotazioni Faraday. Le indicherò sotto il nome di *rotazioni bimagnetiche*, per ricordare che probabilmente, oltre all'azione magnetica del campo e a speciali proprietà molecolari della sostanza attiva, anche le proprietà magnetiche di questa sono cause del fenomeno.

Per chiarire sin d'ora la natura di questo fenomeno, sia NS la direzione del campo magnetico. Se la luce, propagandosi normalmente al piano



della figura, ha il suo piano di polarizzazione su NS o su AB, non si osserva alcun fenomeno, eccitando il campo; ma se quel piano è su RT o su PQ, esso rota portandosi nei due casi, rispettivamente in $R'T'$ e $P'Q'$. Voglio chiamare questo fenomeno *positivo*, per distinguerlo da altri casi in cui, campioni di liquidi attivi fanno rotare i piani predetti in $R''T''$ e $P''Q''$ (*rotazione bimagnetica negativa*). Il fenomeno è massimo per le posizioni PQ ed RT, a 45° sulle linee di forza.

La birifrangenza magnetica e la rotazione bimagnetica, sieno esse positive o negative, sono quattro fenomeni che si presentano in condizioni speciali del liquido magnetico su cui si sperimenta. Ho già proceduto alla individualizzazione di liquidi che hanno distintamente qualcuna di quelle proprietà;

ma il problema, già difficile da questo riguardo, si complica perchè sembra che talvolta più di uno dei fenomeni accennati si presentino contemporaneamente.

Mi riservo, dunque, di dire prossimamente i risultati più concreti delle mie esperienze.

Fisica. — *Sulla influenza dell'elettrizzazione sulla velocità di evaporazione.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Socio BLASERNA.

Poche e contraddittorie sono le ricerche sperimentali dirette, fin ad ora compiute, per determinare l'influenza dell'elettrizzazione sulla velocità di evaporazione di un liquido (1). Già Nollet e Cavallo trovarono che l'elettrizzazione di una superficie liquida ne accelera la evaporazione, mentre Van Marum e Pfaff non credettero poterle attribuire questa proprietà. Ricerche più complete furono poi compiute dal Peltier e dal Mascart (2), elettrizzando fortemente un corpo di fronte ad una bacinella ripiena del liquido da studiare e misurando poi la velocità di evaporazione: misure compiute in numero molto grande e cercando di evitare tutte le possibili influenze esterne, diedero come risultato che l'evaporazione in quelle condizioni è circa doppia di quella che si ha quando il corpo di fronte alla bacinella è scarico.

Lecher (3), ripetendo le esperienze del Mascart, trovò confermati i fatti da lui osservati, ma, indagandone la ragione, giunse alla conclusione che la più grande velocità di evaporazione osservata dal Mascart non era che una conseguenza del vento elettrico producentesi intorno ai corpi portati ad elevato potenziale.

Crookes (4) e Wirtz (5) elettrizzarono direttamente il liquido, posto entro bacinelle isolate, mediante un rocchetto d'induzione o una macchina Holtz; e misurarono la quantità di liquido evaporantesi, ma giunsero a risultati contraddittorî. Il Crookes trovò che non vi è alcuna differenza nella velocità di evaporazione fra il liquido scarico e lo stesso carico positivamente, mentre il liquido carico negativamente evaporava più in fretta. Il Wirtz invece dalle sue numerose misure, sulle quali però nella Memoria, quale è nei Wiedemann's Annalen, non è riportato alcun dato numerico, credette poter concludere che l'elettrizzazione di un liquido, qualunque sia il suo segno, ne ritarda l'eva-

(1) Per velocità di evaporazione intenderemo la quantità di liquido evaporata nell'unità di tempo.

(2) Comptes Rendus, 86, pag. 575, 1878.

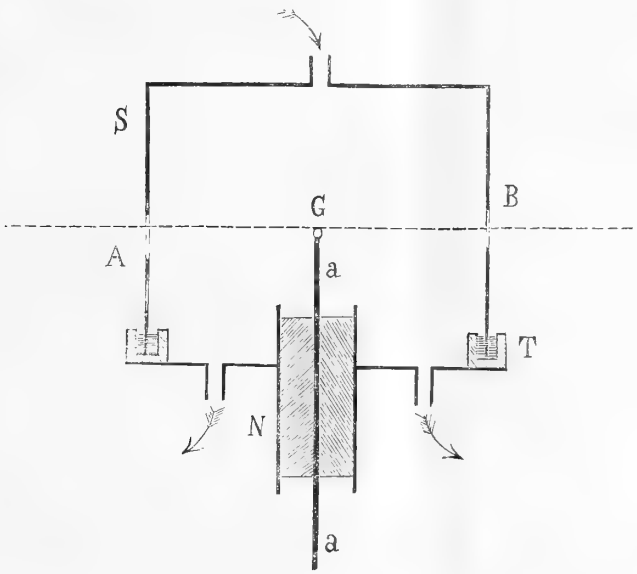
(3) Wien. Ber. 96 (2), pag. 103.

(4) Proc. Roy. Soc. 50, pag. 88, 1891.

(5) Wied. Ann. 37, pag. 516, 1887.

porazione, e che un'elettrizzazione positiva la ritarda di più che non una negativa.

Come si vede, nel campo sperimentale le conclusioni sono molto contraddittorie ed incerte; ho voluto quindi tentar di cercare il modo di porre in evidenza quest'effetto, malgrado la sua piccolezza, evitando, per quanto fosse possibile, tutte le cause d'errore che possono influire sull'andamento del fenomeno e ci sono riuscito nel modo seguente.



Invece di far evaporare l'acqua o il liquido da studiare da una bacinella e ricorrere alla bilancia per determinare le quantità di liquido evaporate, il che avrebbe richiesto disposizioni sperimentali o manipolazioni che avrebbero potuto introdurre cause d'errore non lievi, ho pensato di misurare mediante un catetometro la diminuzione del diametro verticale di una goccia del liquido posta all'estremità di un'asticella metallica in comunicazione colla sorgente di elettricità.

La disposizione sperimentale risulta senz'altro chiara dalla figura annessa: la goccia G si depositava con un contagoccie su una specie di piccola scodella incavata all'estremità di un'asticciuola di ottone *a* del diametro di circa 2 millimetri attraversante un tappo di paraffina N; la goccia veniva così ad occupare il centro di una scatola metallica cilindrica S, munita di chiusura a mercurio T, e posta in comunicazione col suolo.

Onde operare sempre alle medesime condizioni ed evitare la variabilità dello stato igrometrico dell'ambiente in cui veniva a trovarsi la goccia, me-

diante un aspiratore ad acqua si faceva passare una lentissima corrente d'aria sulla goccia nel modo il più possibilmente simmetrico; per disseccare questa aria la si faceva gorgogliare prima in una boccia contenente acido solforico puro, quindi passare per una serie di 8 tubi ripieni di cloruro di calcio puro e secco, e per un tubo contenente del sodio metallico; per privare poi quest'aria del pulviscolo si faceva passare da ultimo per un tubo contenente della bambagia secca e ben pressata.

Il pericolo di un eventuale arrivo di umidità dall'aspiratore in S veniva ovviato mediante un altro tubo a cloruro di calcio inserito fra S e l'aspiratore.

Attraverso una finestra con vetro masticiato A si osservava la goccia illuminata sull'altra parte mediante una fiamma a gas posta dietro la finestra B, e si determinava di quanto diminuiva il diametro verticale della goccia durante mezz'ora mediante un catetometro il cui cannocchiale, munito di speciale obbiettivo e di un micrometro oculare a filo mobile, permetteva di valutare variazioni di detto diametro di $^1/_{200}$ di millimetro. La velocità del flusso d'aria secca investente la goccia veniva mantenuta costante regolando l'aspiratore mediante apposito rubinetto, finchè attraverso l'acido solforico della prima boccia non passava un determinato numero di bolle per minuto secondo. L'invariabilità della posizione mutua del cannocchiale del catetometro e dell'asticella a veniva controllata regolarmente, determinando prima d'ogni misura col catetometro la posizione dell'orlo superiore dell'asticella a. L'elettrizzazione si faceva mediante una macchina ad acqua del Thomson, il cui funzionamento veniva sorvegliato mediante un elettrometro posto in comunicazione con a.

Le misure vennero fatte alternativamente colla goccia carica e colla goccia scarica; i risultati ottenuti sono compendiati nelle seguenti tabelle, ove i numeri riportati rappresentano in duecentesimi di millimetro, la diminuzione manifestatasi in un certo tempo nel diametro verticale della goccia.

Liquido: acqua comune.
Portata della corrente d'aria secca: 50 cm.^{3} al 1′.
Temperatura: 11°.
Diametro della goccia: 2 millimetri circa.
Durata dell'esperienza: 30′.
Elettrizzazione negativa a — 3000 Volta circa.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Goccia carica	29,5	28,6	30	29	29,5	30,6
» scarica	32	31,9	33	32,1	31,8	32,8
» carica	29,5	29	30,5	29,6	29,8	30,0

Liquido: acqua distillata; il resto come sopra.

	I.	II.		III.
Goccia carica	27,5	25	goccia scarica	30,2
» scarica	30,1	29	» carica	28,5
» carica	28,1	25	» scarica	30,1

Ho voluto quindi provare un liquido che evaporasse molto più lentamente, e ho scelto l'anetolo coi seguenti risultati:

Liquido: anetolo.
Portata della corrente d'aria secca: 60 cm.^{3} al 1′.
Elettrizzazione negativa a — 3000 Volta circa.
Temperatura: 11°.
Diametro della goccia: 2 millimetri circa.
Durata dell'esperienza: 60′.

	I.	II.
Goccia carica	28	29,2
» scarica	32,8	32,6
» carica	27	26

È dunque certo che l'elettrizzazione ritarda l'evaporazione debolmente, ma in modo sensibile.

Ora, ricorrendo ad un ragionamento analogo a quello col quale W. Thomson (1) riuscì a dimostrare l'influenza delle forze capillari sulla tensione del vapore sovrastante ad una superficie liquida, si può dimostrare che la tensione del vapore sovrastante ad una superficie liquida elettrizzata evaporantesi è, a parità di temperatura, più piccola di quella che esisterebbe se la superficie non fosse elettrizzata, di una quantità eguale a $2\pi\sigma^2 \frac{\delta}{d}$ (2) δ essendo la densità del vapore, d quella del liquido, σ la densità elettrica superficiale (3), il che dunque importa una diminuzione nella velocità d'evaporazione conforme ai risultati sperimentali.

(1) Proc. of the Roy. Soc. Edinburgh., febr. 7, 1870.

(2) F. de Phys. 1884 (2), 3, pag. 443.

(3) Considerando il caso di una goccia e confrontando questa variazione nella tensione del vapore dovuta alla sola elettrizzazione con quella: $\frac{2T}{\varrho}\frac{\delta}{d}$ dovuta alla capillarità (T = tensione superficiale e ϱ = raggio di curvatura della goccia), si arriva facilmente a trovare quale dovrebbe essere il raggio di una goccia affinchè le due azioni dell'elettrizzazione, che tende a diminuire la evaporazione, e della capillarità che tende ad accelerarla, si compensassero; si ha così:

$$\varrho^3 = \frac{e^2}{16\pi T^2},$$

e essendo la carica elettrica della goccia; formola identica a quella trovata da J. J. Thomson e riportata nel suo libro: *Die Entladung der Elektricität durch Gase*, pag. 10.

Noi possiamo però ora domandarci quale sarebbe, secondo le considerazioni teoriche cui ho accennato, la diminuzione della tensione del vapore acqueo sovrastante ad una goccia d'acqua delle dimensioni da me usate, e nelle condizioni verificantisi nelle mie esperienze. Si arriva allora al seguente risultato: la diminuzione della tensione del vapore d'acqua sovrastante ad una goccia di 2 mm. di diametro, caricata a 3000 Volta raggiunge al massimo il valore di $3.\ 10^{-6}$ atmosfere, diminuzione straordinariamente piccola d'ordine inferiore alle comuni variazioni barometriche che si producono da un momento all'altro, e alla quale non si può far risalire la diminuzione di evaporazione osservata. Resta quindi il dubbio che l'elettrizzazione agisca più direttamente alla velocità di evaporazione e in modo non ancora conosciuto.

Ho infine tentato di vedere se vi fosse una differenza di comportamento fra le due elettricità, questione che presenta molto interesse essendo accertato che quando un gas elettrizzato arrivando in un ambiente contenente del vapore d'acqua condensa questo in nebbia, la grandezza delle goccioline di questa dipendono dal segno dell'elettrizzazione del gas, ed è maggiore quando il gas è carico negativamente. Ciò parrebbe indicare, osserva il Thomson ([1]), che una goccia d'acqua carica positivamente evapora più in fretta che una goccia delle medesime dimensioni carica negativamente.

Esperienze ripetute con ogni cura, alternandole in tutti i modi, non hanno però permesso di scorgere alcuna differenza di comportamento fra le due elettricità, e la velocità d'evaporazione nei due casi si è mantenuta, nelle condizioni almeno in cui sperimentavo, molto approssimativamente la stessa.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota I del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In un'altra Nota, pubblicata in questi Rendiconti, stabilivo le equazioni differenziali che reggono il moto di un pendolo sferico ([2]). Cercando poi di risolvere con maggior generalità ed esattezza il problema fondamentale della sismografia, da me già risoluto nella Nota citata ed in un'altra successiva (seduta del 17 marzo), venni condotto a considerare il pendolo sferico come caso particolarissimo d'un sistema meccanico assai più generale, cioè d'una *catena di corpi rigidi*: e quindi le equazioni trovate come caso particolare d'un altro sistema d'equazioni, alle quali si può arrivare con metodo identico e con grande facilità, grazie alla perfetta simmetria di formole che la stessa generalità del problema consente.

([1]) *Die Entladung der Elektricität durch Gase*, pag. 10, Leipzig 1900.

([2]) *Sulla determinazione dei moti sismici.* Seduta del 3 marzo 1901, vol. X, pagg. 144-148.

In questa prima Nota stabilirò le equazioni dinamiche relative al caso generale; in un'altra successiva applicherò i risultati ottenuti ad un caso speciale, che mi pare importante per la teoria degli strumenti sismici, e ritroverò, a guisa di corollario, la soluzione del problema testè citato.

1. Si immagini un sistema di n corpi rigidi

$$C_r \ (r = 1, 2, \dots, n),$$

tale che ciascuno di essi è legato *almeno per un punto* al precedente (1). Fissato poi in ciascuno di essi un sistema d'assi cartesiani ortogonali, il quale serve a individuarne i punti, si può prescindere dal concetto fisico dei *corpi* e considerare in loro vece i corrispondenti sistemi di assi cartesiani. Sarà conveniente prendere ad arbitrio l'origine del primo sistema, e per origine di ogni altro il punto o uno dei punti per i quali esso è fissato al precedente; in tal modo nel sistema C_r sono messi in evidenza due punti: la sua origine, di coordinate nulle, e un punto di coordinate a_r, b_r, c_r, coincidente coll'origine del sistema successivo. Convenendo di rappresentare con P_{ri} un punto generico del sistema C_r, stabilisco di attribuire sempre l'indice $i = 0$ all'origine, l'indice $i = 1$ al punto che coincide coll'origine del sistema successivo, e l'indice $i = 2$ al baricentro, quando sarà necessario considerarlo.

In tal modo abbiamo intanto:

$$(1) \qquad P_{r1} \equiv P_{r+1\,0} \ ; \ [r = 1, 2, \dots, n-1]$$

$$\left.\begin{aligned} (1') \qquad & x_{r0} = y_{r0} = z_{r0} = 0 \ ; \\ (1'') \qquad & x_{r1} = a_r, \ y_{r1} = b_r, \ z_{r1} = c_r \ ; \\ (1''') \qquad & x_{r2} = \frac{\sum_{C_r i} m_{ri} x_{ri}}{M_r}, \text{ etc., } (2) \end{aligned}\right\} \ r = 1, \dots n$$

essendo

$$(1^{(IV)}) \qquad M_r = \sum_{C_r i} m_{ri},$$

e rappresentando col simbolo $\sum_{C_r i}$ la somma estesa a tutti i punti materiali P_{ri} del corpo C_r.

2. Riferendo questa catena di corpi a un sistema cartesiano immobile $\Omega(\xi \eta \zeta)$, chiamerò *coordinate assolute, rotazioni assolute*, etc. d'un punto o d'un corpo, le coordinate e le rotazioni rispetto al sistema immobile, e rappresenterò con $\xi_{ri}, \eta_{ri}, \zeta_{ri}$ le coordinate assolute di P_{ri}.

(1) S'intende che l'*ordine* dei corpi costituenti la catena è definito dall'indice r.

(2) Questa sigla *etc.*, messa dopo un'equazione o un'espressione qualunque, sostituisce per brevità le equazioni od espressioni dedotte da quella scritta mediante permutazioni circolari nelle terne di lettere $(x\,y\,z)$, $(a\,b\,c)$, $(\pi\,\chi\,\varrho)$.... etc.

Il più generale movimento della catena consiste della *rotazione* di ciascun corpo C_r intorno ad un asse istantaneo o permanente passante per la sua origine P_{r0}, e di una *traslazione* variabile da corpo a corpo, che può essere definita dalle coordinate assolute della rispettiva origine, che ha cioè per componenti secondo gli assi fissi: ξ_{r0}, η_{r0}, ζ_{r0}. Allora, se tutte le rotazioni sono infinitesime (1), in modo da potersi decomporre ciascuna in tre rotazioni infinitesime e successive π_r, χ_r, ϱ_r intorno agli assi delle ξ, η, ζ, e se gli assi solidali col corpo C_r sono scelti in modo che per $\pi_r = \chi_r = \varrho_r = 0$ essi risultano rispettivamente paralleli agli assi fissi, trascurando le seconde potenze delle rotazioni elementari, si trova che la posizione assoluta d'un punto P_{ri} è definita dalle equazioni:

$$\xi_{ri} - \xi_{r0} = x_{ri} + (\pi x_i)_r, \text{ etc.}, \tag{2}$$

avendo fatta per brevità la posizione generica

$$(\pi x_i)_r = \chi_r z_{ri} - \varrho_r y_{ri}, \text{ etc.} \tag{A}$$

Per calcolare il valore di ξ_{r0} notiamo che la (2) vale per qualunque valore degli indici r, i: dunque in particolare ponendo $r = s$, $i = 1$, ricordando la (1″), e osservando che, per la (1), è

$$\xi_{s1} = \xi_{s+1\,0},$$

si avrà:

$$\xi_{s+1\,0} = \xi_{s0} + a_s + (\pi a)_s:$$

sommando i due membri di questa eguaglianza da $s = 1$ a $s = r - 1$, e notando che in tal modo vengono eliminate $\xi_{20}, \xi_{30}, \ldots, \xi_{r-1\,0}$, si ottiene

$$\xi_{r0} = \xi_{10} + \sum_1^{r-1}{}_s a_s + \sum_1^{r-1}{}_s (\pi a)_s. \tag{3}$$

Vediamo intanto che di tutte le traslazioni si può ritenere arbitraria soltanto quella del primo sistema: convenendo di rappresentare le sue componenti con ξ, η, ζ, cioè omettendo gli indici nella combinazione $r = 1$, $i = 0$, si ottiene infine dalla (2) e dalla (3):

$$\xi_{ri} = \xi + \sum_1^{r-1}{}_s a_s + x_{ri} + \sum_1^{r-1}{}_s (\pi a)_s + (\pi x_i)_r, \text{ etc.} \tag{4}$$

$$r = 1, 2, \ldots, n-1, n$$

$$\xi_{1i} = \xi + x_i + (\pi x_i)_1, \text{ etc.} \tag{4'}$$

(1) Come si può facilmente arguire, non uso questa parola *infinitesimo* nel suo significato classico di grandezza variabile evanescente, ma bensì per « grandezza della quale sia trascurabile ogni potenza superiore alla prima ».

Per calcolare gli spostamenti virtuali parto dall'espressione generale

$$\delta\xi_{ri} = \delta\xi_{r0} + \delta\chi_r(\zeta_{ri} - \zeta_{r0}) - \delta\varrho_r(\eta_{ri} - \eta_{r0}) \text{ , etc.}$$

da questa, deducendo il valore di $\delta\xi_{r0}$ nell'identico modo che ci condusse dalla (2) alla (3), si ottiene infine:

$$\begin{aligned}\delta\xi_{ri} = \delta\xi &+ \sum_{1}^{r-1}{}_s \delta\chi_s(\zeta_{s1} - \zeta_{s0}) + \delta\chi_r(\zeta_{ri} - \zeta_{r0}) \\ &- \sum_{1}^{r-1}{}_s \delta\varrho_s(\eta_{s1} - \eta_{s0}) - \delta\varrho_r(\eta_{ri} - \eta_{r0}) \text{ , etc.}\end{aligned} \tag{5}$$

3. Applichiamo le formole fin qui trovate all'equazione simbolica dei lavori virtuali

$$\sum_{1}^{n}{}_r \sum_{C_r}{}_i (\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri})\,\delta\xi_{ri} + \text{etc.} = 0 \text{ ;}$$

nella quale, come al solito, con Ξ_{ri} , H_{ri} , Z_{ri} rappresento la proiezione sugli assi fissi della risultante di tutte le forze applicate nel punto P_{ri}, di massa m_{ri}.

Posto per brevità

$$X_r = \sum_{C_r}{}_i (\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \text{ , etc. ,} \tag{B}$$

e sostituendo a $\delta\xi_{ri}$ la sua espressione (5), la somma testè scritta prende la forma:

$$\begin{aligned}\delta\xi \sum_{1}^{n}{}_r X_r &+ \sum_{1}^{n}{}_r \Big[X_r \sum_{1}^{r-1}{}_s \delta\chi_s(\zeta_{s1} - \zeta_{s0}) + \delta\chi_r \sum_{C_r}{}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0})\,(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \Big] \\ &- \sum_{1}^{n}{}_r \Big[X_r \sum_{1}^{r-1}{}_s \delta\varrho_s(\eta_{s1} - \eta_{s0}) + \delta\varrho_r \sum_{C_r}{}_i (\eta_{ri} - \eta_{r0})\,(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \Big]\end{aligned} \tag{6}$$

Di queste due somme doppie basta considerare soltanto la prima, giacchè l'altra si ottiene da quella scambiando χ con ϱ e ζ con η; ponendo per brevità

$$\begin{cases} A_{sr} = (\zeta_{s1} - \zeta_{s0})\,X_r \\ A'_{rr} = \sum_{C_r}{}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0})\,(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \text{ ,} \end{cases} \tag{C}$$

essa si può scrivere sotto la forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\left[\sum_{1}^{r-1}{}_{s}\,\delta\chi_s\,A_{sr}+\delta\chi_r\,A'_{rr}\right]=$$

$$=\sum_{1}^{n}{}_{r}\left[\delta\chi_1\,A_{1r}+\delta\chi_2\,A_{2r}+\cdots+\delta\chi_{r-1}\,A_{r-1\,r}+\delta\chi_r\,A'_{rr}\right]$$
$$=\delta\chi_1\,A'_{11}$$
$$+\delta\chi_1\,A_{12}+\delta\chi_2\,A'_{22}$$
$$+\delta\chi_1\,A_{13}+\delta\chi_2\,A_{23}+\delta\chi_3\,A'_{33}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\delta\chi_1\,A_{1n}+\delta\chi_2\,A_{2n}+\delta\chi_3\,A_{3n}+\cdots+\delta\chi_{n-1}\,A_{n-1\,n}+\delta\chi_n\,A'_{nn}:$$

donde, sommando per colonne,

$$=\sum_{1}^{n-1}{}_{r}\delta\chi_r\left(A'_{rr}+\sum_{r+1}^{n}{}_{s}A_{rs}\right)+\delta\chi_n\,A'_{nn}.$$

Sostituendo infine ai simboli A, A' i loro valori (C), e ripetendo lo stesso calcolo per la seconda somma doppia che comparisce nella espressione (6), questa si trasforma nella seguente:

$$\delta\xi\sum_{1}^{n}{}_{r}X_r+\sum_{1}^{n-1}{}_{r}\delta\chi_r\left[\sum_{C_r}{}_{i}(\zeta_{ri}-\zeta_{r0})\,(\Xi_{ri}-m_{ri}\,\xi''_{ri})+(\zeta_{r1}-\zeta_{r0})\sum_{r+1}^{n}{}_{s}X_s\right]$$
$$+\delta\chi_n\sum_{C_n}{}_{i}(\zeta_{ni}-\zeta_{n0})\,(\Xi_{ni}-m_{ni}\,\xi''_{ni})$$
$$-\sum_{1}^{n-1}{}_{r}\delta\varrho_r\left[\sum_{C_r}{}_{i}(\eta_{ri}-\eta_{r0})\,(\Xi_{ri}-m_{ri}\,\xi''_{ri})+(\eta_{r1}-\eta_{r0})\sum_{r+1}^{n}{}_{s}X_s\right]$$
$$-\delta\varrho_n\sum_{C_n}{}_{i}(\eta_{ni}-\eta_{n0})\,(\Xi_{ni}-m_{ni}\,\xi''_{ni}).$$

I termini omessi dell'equazione simbolica dei lavori virtuali si possono ottenere da questa espressione permutando circolarmente tutte le terne di lettere: eseguendo quest'operazione e raccogliendo poi a fattori comuni tutte le variazioni arbitrarie, si arriva infine all'equazione

$$(7)\qquad A\delta\xi+B\delta\eta+C\delta\zeta+\sum_{1}^{n}{}_{r}(H_r\,\delta\pi_r+K_r\,\delta\chi_r+L_r\,\delta\varrho_r)=0,$$

avendo fatte le posizioni

$$(D)\qquad A=\sum_{1}^{n}{}_{r}X_r=\sum_{1}^{n}{}_{r}\sum_{C_r}{}_{i}(\Xi_{ri}-m_{ri}\,\xi''_{ri}),\ \text{etc.}$$

$$\text{(E)}\quad \begin{aligned} H_r = {} & \sum_{C_r i}(\eta_{ri}-\eta_{r0})(Z_{ri}-m_{ri}\zeta''_{ri}) + (\eta_{r1}-\eta_{r0})\sum_{r+1}^{n}{}_s \sum_{C_s i}(Z_{si}-m_{si}\zeta''_{si}) \\ & - \sum_{C_r i}(\zeta_{ri}-\zeta_{r0})(H_{ri}-m_{ri}\eta''_{ri}) - (\zeta_{r1}-\zeta_{r0})\sum_{r+1}^{n}{}_s \sum_{C_s i}(H_{si}-m_{si}\eta''_{si}), \text{ etc.}; \\ & (r = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

$$\text{(E')}\quad H_n = \sum_{C_n i}(\eta_{ni}-\eta_{n0})(Z_{ni}-m_{ni}\zeta''_{ni}) - \sum_{C_n i}(\zeta_{ni}-\zeta_{n0})(H_{ni}-m_{ni}\eta''_{ni}) \text{ etc.}$$

È da notare subito che queste equazioni furono dedotte senza fare alcuna restrizione sull'ordine di grandezza delle traslazioni ξ, η, ζ, sulla orientazione dei varî corpi rispetto alla traslazione, sulla natura delle forze nè sulla loro direzione rispetto agli assi fissi.

4. Se si volesse ora passare alle equazioni effettive del moto, bisognerebbe stabilire completamente i legami che esistono fra i varî corpi rigidi costituenti la catena. Nel caso che le traslazioni del primo corpo siano arbitrarie e che ciascuno sia legato al precedente per un punto solo, il sistema ha $3n+3$ gradi di libertà, corrispondenti alle equazioni

$$A = B = C = H_r = K_r = L_r = 0:$$

in qualsiasi altro caso il numero delle equazioni diventa minore o per la soppressione di alcuna di esse (p. e. nel caso di traslazioni del primo corpo nulle o determinate), o per la sostituzione ad alcune di esse di certe loro combinazioni lineari (p. e. nel caso che uno dei corpi ruoti intorno ad un asse permanente) (1).

5. La forma definitiva delle funzioni H, K, L risulta molto complicata, anche tenendo conto che le rotazioni sono infinitesime e facendo delle ipotesi speciali circa gli assi fissi nei corpi.

(1) Infatti suppongasi che i corpi C_r, C_{r+1} abbiano una retta costantemente in comune: allora il moto di C_{r+1} è perfettamente definito quando sia data la sua rotazione ω intorno a questa retta, perchè se essa ha rispetto agli assi fissi i coseni di direzione λ, μ, ν avremo $\pi_{r+1} = \lambda\omega$, $\chi_{r+1} = \mu\omega$, $\varrho_{r+1} = \nu\omega$: d'altra parte se i suoi coseni di direzione rispetto agli assi (C_r) sono l, m, n (costanti), valgono le relazioni:

$$\lambda = l + \chi_r n - \varrho_r m \text{ etc.};$$

e quindi

$$\delta\pi_{r+1} = \lambda\delta\omega + \omega\delta\lambda = \lambda\delta\omega + \omega(n\,\delta\chi_r - m\,\delta\varrho_r) \text{ etc.}$$

Sostituendo questi valori nella (7), si trovano, in luogo delle 6 equazioni indipendenti

$$H_r = H_{r+1} = K_r = K_{r+1} = L_r = L_{r+1} = 0,$$

le 4 equazioni:

$$H_r + \omega(m L_{r+1} - n K_{r+1}) = K_r + \omega(n H_{r+1} - l L_{r+1}) = L_r + \omega(l K_{r+1} - m H_{r+1}) = 0$$
$$\lambda H_{r+1} + \mu K_{r+1} + \nu L_{r+1} = 0,$$

nelle quali a $\pi_{r+1}, \chi_{r+1}, \varrho_{r+1}$ si intendono sostituiti i valori testè trovati.

Perciò, senza procedere per ora ad un ulteriore sviluppo, chiuderò la trattazione del caso generale facendo l'ipotesi che il primo corpo sia fissato almeno per il punto P_{10} al terreno, e quindi possa sentire l'influenza d'un eventuale movimento sismico.

A tal fine fissato nell'elemento di crosta solida terrestre, che comprende il punto di sospensione, un sistema d'assi cartesiani S(X Y Z) [$S \equiv P_{10}$], tale da coincidere col sistema $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ quando il terreno è in quiete, definisco il moto sismico mediante le traslazioni ξ, η, ζ e mediante tre rotazioni infinitesime α, β, γ, con le quali si passa dal sistema $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ al sistema S(X Y Z): chiamando poi λ_r, μ_r, ν_r le componenti della *rotazione apparente* del corpo C_r cioè le sue rotazioni (infinitesime) intorno agli assi X, Y, Z, valgono, a meno di quantità trascurabili, le eguaglianze

$$\text{(F)} \qquad \pi_r = \alpha + \lambda_r, \text{ etc.}$$

In tal modo, notando che le variabili $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ hanno in ogni istante un valore determinato, cioè che le loro variazioni arbitrarie sono costantemente nulle, si trova che l'equazione (7) si riduce alla forma

$$\text{(8)} \qquad \sum_{1}^{n}{}_r \left(H_r\,\delta\lambda_r + K_r\,\delta\mu_r + L_r\,\delta\nu_r\right) = 0.$$

È naturale che il valore dei coefficienti H_r, K_r, L_r è sempre dato dalle equazioni (E), (E'), alle quali si devono intendere associate le (2) e le (4) per il calcolo dei binomi $(\xi_{ri} - \xi_{r0}), \ldots$ e delle accelerazioni $\xi''_{ri}, \ldots$ Volendo poi scindere gli elementi del moto sismico dagli elementi del modo apparente dei singoli corpi, basterà sostituire nelle (2) e nelle (4) in luogo di π_r, χ_r, ϱ_r i loro valori dati dalle (F).

Chimica. — *Sulla distinzione fra polimorfismo ed isomeria chimica.* Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio G. Ciamician.

La questione indicata nel titolo di questa breve Nota non formò finora oggetto di studî molto estesi nonostante l'interesse teorico che essa presenta. Essa viene ora rimessa di nuovo in campo da una recente pregevole pubblicazione di R. Wegscheider [1]. Questo autore comincia a porsi anzitutto la domanda se la distinzione fra i due concetti di polimorfismo (od isomeria fisica) ed isomeria chimica sia veramente giustificata. In base alla teoria atomica molecolare si possono dare dei due ordini di fenomeni definizioni soddisfacenti: attribuendo cioè l'isomeria ad una diversa costituzione o con-

[1] Wiener Monatshefte f. Chemie CXXII, 917 (1901).

figurazione della molecola, il polimorfismo ad una diversa distribuzione delle molecole nella particella cristallina.

Però, giustamente osserva Wegscheider, la diversità di queste definizioni basantesi su di una ipotesi non sarebbe sufficiente per far ritenere giustificata ed opportuna la distinzione in questione, se ad essa non corrispondessero nel fatto reali differenze di proprietà e di comportamento.

La distinzione secondo quanto è generalmente ammesso, deve consistere in questo: i corpi isomeri chimicamente possono esistere come tali con proprietà diverse tanto allo stato solido, che a quello liquido (fuso o disciolto) ed a quello gassoso; pei corpi polimorfi la diversità fra le due modificazioni si limita allo stato cristallino. Si capisce però agevolmente che mentre la questione della diversità o meno dei liquidi o delle soluzioni fornite dalle due modificazioni, può spesso esser deciso in senso positivo, il deciderlo negativamente con sicurezza non è possibile mai, poichè vi hanno isomeri che si trasformano l'uno nell'altro con tale rapidità da non lasciar tempo a constatare con misure fisiche la diversità dei liquidi che forniscono.

Wegscheider esamina però altre serie di fenomeni, giungendo alla conclusione che la distinzione del polimorfismo dall'isomeria è giustificata e conveniente; propone quindi alcuni criterî che possono servire a distinguere in pratica i due casi. In generale però questi criterî permettono, come quello suaccennato, una decisione sicura in un solo senso, cioè per l'esistenza di isomeria; il polimorfismo può esser dimostrato in modo sicuro od assai verosimile in un solo caso, quando cioè esso corrisponda al tipo dell'enantiotropia, e vi sia cioè un punto fisso di trasformazione fra le due forme; nel caso frequente di due corpi polimorfi monotropi nessuna decisione è possibile.

Ora sembra a me che il Wegscheider non abbia posto abbastanza in rilievo uno dei principali caratteri distintivi fra isomeria e polimorfismo, ed abbia perciò trascurato un criterio più preciso e sensibile di quelli da lui proposti. Ad esso si arriva basandosi sulla teoria delle fasi che è qui come sempre in questo genere di questioni, una guida preziosa ed infallibile.

La distinzione fra polimorfismo ed isomeria è questa: dei due corpi polimorfi uno solo ha un punto di fusione stabile; il punto di fusione dell'altro corrisponde ad uno stato di equilibrio instabile che la presenza della più piccola traccia della prima modificazione può far sparire. Invece due corpi isomeri hanno ciascuno un punto di fusione stabile nel senso della teoria delle fasi. Wegscheider indica come uno dei criterî per concludere all'esistenza di isomeria il seguente: « che il corpo *più stabile* in vicinanza del punto di fusione, abbia il punto di fusione più basso ». Ciò è infatti giustissimo, ma è facile vedere come il concetto della maggiore o minore stabilità qui invocato sia più vago e ad ogni modo assolutamente diverso da quello della stabilità od instabilità di una fase solida in equilibrio con una fase liquida. Di due corpi polimorfi uno solo è capace di esistenza *stabile* in presenza

della fase liquida e precisamente quello che fonde più alto; l'altro è *instabile* e può esistere solo in assoluta assenza del primo; di tale stabilità ed instabilità si può dare una definizione termodinamica rigorosa: è stabile quella modificazione per cui alla temperatura data è minore il valore della fuzione ζ di Willard Gibbs. Di due corpi isomeri invece ve ne è uno *più* ed uno *meno stabile*; tale differenza di stabilità può essere maggiore o minore, e non può essere definita in modo preciso e rigoroso.

Da ciò che venne sin qui detto risulta in modo assai chiaro quale sia il criterio per decidere se due corpi siano polimorfi od isomeri. Se sono isomeri ciascuno di essi aggiunto all'altro si dovrà comportare come un corpo estraneo qualsiasi, cioè abbassando il punto di congelamento o di fusione del solvente. Si dovrà quindi anche per due corpi isomeri avere il solito sistema di due curve discendenti ed incrociantisi nel punto crioidratico, dove le due sorta di cristalli coesistono.

Che questo si possa osservare anche nel caso di isomeri facilmente trasformabili gli uni negli altri come certi isomeri geometrici, ed anche fra isomeri nelle cui miscele liquide si formi uno stato di equilibrio come i corpi tautomeri o desmotropi. venne già dimostrato da una serie di studî teorici o di osservazioni sperimentali che mi sembra siano sfuggiti al Wegscheider. Così il Bakhuis Roozeboom [1] diede la teoria completa delle curve di congelamento per le miscele di corpi tautomeri, ed il Bancroft ed alcuni suoi scolari [2] determinarono le curve di congelamento per le miscele di taluni stereoisomeri assai facilmente trasformabili l'uno nell'altro, come: α e β acetaldossima, α e β benzaldossima, α e β anisaldossima. Anche prima Garelli e Montanari [3] avevano dimostrato che sciogliendo acido isocrotonico nel crotonico si ottengono abbassamenti del punto di congelamento che sono perfettamente normali secondo la legge di van 't Hoff. Citerò infine un'osservazione fatta da me; ognuno sa come sia rapida e difficile da evitare la trasformazione degli eteri maleici nei corrispondenti fumarici; tuttavia anche nelle loro miscele possono esistere equilibrî eterogenei perfettamente stabili. In una preparazione di etere dimetilico dell'acido maleico fatta in occasione di precedenti ricerche, mi si formò una certa quantità dell'isomero fumarico che anche per distillazione non potei separare. Il miscuglio dei due eteri fu chiuso in tubetto saldato alla lampada e si conserva da circa tre anni; dalla massa si separarono alcuni cristalli dell'etere fumarico (che fonde a 102°, mentre il maleico si gela solo a circa — 20°); questi cristalli si sciolgono per riscaldamento, si riformano e si accrescono col raffreddamento; l'etere fumarico ha dunque una solubilità determinata nell'altro isomero.

(1) Zeitschr. f. physik. Ch. XXVIII. 289 (1899).

(2) Bancroft, Journ. of physical Chem., II, 143, 245; Carveth, ibidem, III, 457; Cameron, ibidem, II, 376, 409.

(3) Gazz. chim. ital. 1894, II, 260.

Quando si tratti di isomeri che si trasformino l'uno nell'altro rapidamente sarà difficile od impossibile il tracciare quantitativamente delle curve di congelamento; *sarà però possibile il realizzare e l'osservare punti di fusione intermedî a quelli dei due isomeri od inferiori ad entrambi.*

Ben diverso è naturalmente ciò che accade aggiungendo ad un corpo polimorfo fuso una certa quantità dell'altra forma. Evidentemente da qualunque delle due si parta e qualunque quantità dell'altra si aggiunga, si avrà sempre un solo punto di fusione, quello più elevato della modificazione più stabile, o, se tutte le particelle cristalline di esso sono distrutte, si potrà avere quello della modificazione instabile. Così supponiamo di partire dalla forma labile del benzofenone che fonde a 26° e dopo averlo fuso di aggiungervi una quantità qualunque della forma stabile (p. fus. 48°); quest'ultima anzichè abbassare il punto di congelamento dell'altra, provocherà una cristallizzazione completa della massa ed un inalzamento del termometro a 48°. Partendo invece dalla modificazione stabile ed aggiungendovi l'altra, il suo punto di fusione non verrà affatto mutato; se però distruggeremo col riscaldamento ogni traccia di particelle cristalline e raffredderemo lentamente, potremo riavere il punto di congelamento della forma labile. *Questi due soli punti sono possibili; punti di fusione intermedî ai due od inferiori ad entrambi, e un punto crioidratico a cui le due sorta di cristalli possano coesistere sono qui assolutamente impossibili.*

Il criterio qui indicato oltre ad essere il più rigoroso, è anche di una esecuzione così semplice (bastano poche determinazioni di punto di fusione) che esso potrà esser applicato facilmente alla risoluzione di varî interessanti problemi di chimica organica non ancora ben chiariti: ciò che mi propongo di fare.

Patologia vegetale. — *La peronospora del frumento (Sclerospora graminicola) nel Ferrarese* [1]. Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Corrispondente Cuboni.

Dalle osservazioni che ero riuscito a riunire intorno alla peronospora del frumento negli anni 1900-01 poteva apparire che questo parassita fosse cagione di danni praticamente apprezzabili soltanto in poche località di cui avevo cercato di definire le caratteristiche più salienti, subordinando la possibilità di infezione peronosporica nei seminati al ristagno prolungato di acqua negli stessi, durante il periodo vegetativo del frumento, a patto però che nel territorio inondato od in prossimità di questo e soggetti ad inon-

[1] *Relazioni e studi della Cattedra ambulante di agricoltura per la provincia di Ferrara.*

dazioni esistessero dei canneti che albergassero i germi ibernanti od oospore del parassita. Questo, che è il quadro clinico della malattia quale potei desumere dalla configurazione delle località ove per la prima volta ho avvertito la calamità del frumento in questione, se può ritenersi tipico della bassa valle del Tevere, al di là di Roma, non è il solo che accada di osservare in pratica. In un precedente mio lavoro ho indicato che, nel giugno dello scorso anno, in alcune accuratissime coltivazioni di frumento del Ferrarese ben distanti da qualsiasi canneto eventualmente infetto e precisamente a Marrara ed a Vigarano, avevo riscontrato alcuni cespi di frumento, sporadicamente colpiti dalla infezione, resa allora manifesta dalle deformazioni della spica tanto caratteristiche da render quasi superflua la ricerca della cagione di esse mediante l'esame microscopico. Tale constatazione di fatto ribadiva il concetto già espresso, che non può non tornar gradito a chi attenda con amore all' esercizio dell' industria agraria, e cioè che la scoperta di questa manifestazione patologica del frumento si riduce a dare una spiegazione positiva logica, di un fenomeno sino allora insoluto, ma preesistente da tempo e sfuggito all' osservazione metodica o frainteso, per cui non si tratta di un malanno nuovo, come fu ad es. la peronospora all' indomani della sua introduzione nei vigneti europei.

Le osservazioni raccolte in questi ultimi mesi negli estesi seminati di frumento del Ferrarese ed una qualche località del Bolognese così duramente provati dalla tristissima stagione autunno-vernina scorsa, mi hanno dato agio di constatare quanto l'infezione peronosporica del frumento sia diffusa malgrado che faccia difetto una delle condizioni suenunciate, che sulle prime avevo indicato fra quelle che sembravano indispensabili, e cioè la presenza di canneti infetti. Da queste recenti osservazioni chiaramente appare che la conservazione del parassita possa essere affidata ai germi od oospore che si formano anche in altre graminacee spontanee crescenti ininterrottamente durante l'anno, quasi ovunque cosicchè torna sempre maggiormente indicato il raffronto tra la perpetuazione di questo parassita e ciò che accade praticamente per la ruggine del frumento.

Premetto che fin dallo scorso luglio l'egregio prof. Massalongo compiacevasi trasmettermi esemplari di *Setaria sp.* raccolti nel Veronese, sui quali si osservavano le caratteristiche fruttificazioni conidiali di *Sclerospora graminicola*, così egregiamente riprodotte dal Fischer. Nel medesimo tempo osservai una infezione nella *Setaria viridis*, estesissima nell'orto agrario e nei dintorni di Ferrara; i conidiofori ricoprivano di uno spesso strato bianco ceraceo le foglie così da simulare all'osservazione macroscopica un intenso sviluppo di nebbia (*Erysiphe graminis*). Avendo seguito metodicamente il comportamento del parassita sopra piante crescenti spontanee lungo le mura della città, dall'agosto in poi, ebbi agio di rilevare che le foglie e le infiorescenze delle piante infette di *Setaria* andarono man mano assumendo lo sviluppo

ipertrofico e le deformazioni caratteristiche dell' infezione peronosporica, mentre scompariva qualsiasi traccia di fruttificazione conidiale e soltanto l'esame microscopico rivelava la presenza del micelio e delle oospore del parassita in seno ai tessuti.

Questa estesissima infezione nella *Setaria* mi indusse ad esaminare più davvicino le condizioni dei seminati di frumento non appena le condizioni dell'ambiente concessero alla vegetazione di rimettersi in attività, specialmente in non pochi punti della Provincia dove, malgrado che nello scorso inverno vi fosse stato appena qualche ristagno d'acqua nelle scoline o tutt'al più qualche leggero straripamento da queste, durato per poco, all' infrigidimento del suolo veniva dai pratici agricoltori attribuito il deperimento delle piante crescenti lungo le testate degli appezzamenti stessi.

A me parve esagerata l' importanza attribuita all'azione diretta ed esclusiva del ristagno dell'acqua quale determinante del deperimento che avviene in siffatte condizioni; la ragione prima per cui i frumenti sommersi muoiono è la deficienza d'ossigeno, l'asfissia pura e semplice. Ciò appare evidente quando si mettano a raffronto le conseguenze della sommersione e del semplice allagamento nei terreni alti o terre vecchie rispetto ai terreni vallivi: in questi, tanto più sollecitamente per quanto più sia accentuato il tenore in materia organica (cuora e mezza cuora, fino ad essere quasi torba), un ristagno anche brevissimo dell'acqua determina la morte delle piante, poichè le fermentazioni che accadono quando detti terreni siano saturi o ricoperti d'acqua, sono eminentemente riduttrici [1] e l'ossigeno esistente sciolto nelle acque interstiziali o che derivi dalla riduzione dei nitrati, è avidamente assorbito così che l'ambiente che attornia la pianta sommersa diventa sollecitamente asfittico.

Nelle terre alte o terre vecchie normalmente costituite la resistenza alla sommersione è assai più accentuata perchè difficilmente il terreno stesso diventa sede di fermentazioni riduttrici: il Vilmorin ha segnalato nel 1887 una varietà di frumento aristato, proveniente dal dipartimento di Sâone et Loire chiamato sopra luogo frumento *di riviera*, perchè esso aveva la preziosa dote di poter restare sommerso per quindici giorni ed anche tre settimane di continuo senza soffrirne. L'opinione prevalente fra gli agricoltori e suespressa non trova, di certo, appoggio in queste osservazioni di fatto, onde ho assoggettato ad esame microscopico numerosi campioni di piantine deperenti raccolte qua e là in provincia, ed ho potuto costantemente accertarmi che il deperimento intensissimo che esse manifestano e da cui non è più possibile

[1] Ciò rilevasi dalla presenza di idrogeno solforato e di metano, nelle acque superficiali e di scolo dei pozzi e di veli di solfo che, unitamente a tracce di idrocarburi, rendono iridescenti le acque stesse stagnanti nelle scoline.

di farle riavere mediante le solite pratiche colturali primaverili, sia esclusivamente dovuto al parassitismo della *Sclerospora graminicola*.

I pratici ben riconoscono queste piante patite che oltre a dimostrare un sensibile arresto di sviluppo rispetto al rimanente, per cui esse formano *bolla* lungo le testate, sono intensamente clorotiche a tal segno che si dicono volgarmente *imbiancate*. Esse talliscono in modo eccezionale e presentano delle anomalie nelle foglie che ho già descritte in precedenti mie pubblicazioni.

Da quanto sono venuto succintamente esponendo, parmi di poter dedurre alcune conclusioni di un certo interesse pratico: prima di tutto è meglio risparmiare la spesa del nitrato e delle zappettature che si intendesse di applicare alle testate onde la vegetazione delle piante deperite potesse pareggiarsi col rimanente. In secondo luogo, nel fare il lavoro di scerbatura o *curatura* è necessario estirpare i cespi peronosporati, che è facilissimo di discernere senza fallo, e distruggerli metodicamente. Non occorre aggiungere che il provvedimento preventivo di maggior efficacia dal punto di vista pratico, è sempre la sistemazione accurata degli scoli onde far sì che « lo smaltimento delle acque stesse sia sollecito ed impediti i ristagni che comunque avvengano sono sempre funesti alla vegetazione ».

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sui Protozoi delle infusioni.* Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

Mi sono occupato in una Nota precedente a questa di questioni osmotiche riguardanti l'adattamento degli Infusorii a vivere in ambienti diversamente concentrati da quello in cui si trovavano. Riferisco qui un'altra serie di ricerche, avente per scopo lo studio della possibilità a nascere in ambienti diversi da quello abituale. Gli animali che ne sono stati oggetto sono Flagellati ed Infusorii delle infusioni.

Mi si permetta, prima di entrare nell'esposizione delle mie esperienze, di riportare alcuni risultati di altri autori, che si riferiscono in parte anche alle questioni che ho studiato nella Nota precedente, ma che riunisco qui per ragioni di spazio.

Non sembri inutile occuparsi di questioni osmotiche riguardanti i Protozoi, dopo lunghi lavori di varî autori, nei quali tali questioni sono trattate.

Giacchè sia le ricerche del Jennings, che quelle del Kunstler (1), e in massima parte quelle del Massart (2) riguardano specialmente questioni di

(1) Kunstler J. *Influence du milieu et des variations chez les Protozoaires.* C. R. Tome 126, pag. 765-767, 1898.

(2) Massart J. *Récherches sur les organismes inférieurs.* II. *La sensibilité à la concentration chez les êtres unicellulaires marins.* Bull. Acad. Belg. Tome 22, pag. 148-167, 6 figg. 1891.

chemiotassi, tonotassi ecc., rimanendo per lo più al di fuori della questione della permeabilità osmotica della parete esterna. Massart ha però fatto alcune interessanti esperienze sulle cisti delle vorticelle ecc., le quali hanno stretta attinenza con tali problemi. Egli ha mostrato che, quando su esse si fanno agire delle soluzioni concentrate, la parete esterna rimane immutata, come la parete cellulosica delle cellule vegetali, e si osservano dei fenomeni di plasmolisi. L'autore però ha potuto dimostrare anche il passaggio del nitrato di potassio nell'interno delle cisti, servendosi del reattivo di Molisch. Ma in questo caso non si è in condizioni di esperienza tali da poter ritenere il fenomeno del passaggio del sale come normale; i sali di potassio, spesso molto dannosi per le cellule viventi, possono alterare la parete esterna delle cisti, in modo da renderla più permeabile. Noi non possiamo mai considerare come *fisiologico* il passaggio di un sale attraverso ad una membrana, quando questo sale è di per sè capace (o si può sospettare che sia capace) di alterare il protoplasma vivente, o lo diventa per condizioni anormali di pressione osmotica.

Non dico tutto ciò per togliere valore all'esperienza del Massart; ma solo per affermare questo: che dal passaggio del nitrato di potassio non si può mai inferire che possa passare un altro sale, anche composto di ioni i quali più facilmente di quelli del nitrato di potassio traversino membrane inorganiche poco permeabili. È per la non possibilità di questa illazione che insisto in modo particolare sul fatto delle condizioni non fisiologiche di un'esperienza fatta col nitrato di potassio.

Atusky Yasuda (1) ha trovato in varie specie di Cigliati e Flagellati una diversa adattabilità a soluzioni tra loro isotoniche di sostanze differenti; questo risultato mi pare assai notevole per la questione della permeabilità delle membrane, almeno come indizio. Giacchè se i sali sperimentati non penetrassero nell'interno dell'Infusorio o del Flagellato, mal si intenderebbe come soluzioni tra loro isotoniche di corpi differenti potessero agire in modo diverso, ostacolando in modo diverso la vita di questi Protozoi; e d'altra parte mette in evidenza ancora una volta come si debba aver prudenza nel ritenere che un effetto dannoso di un sale in soluzione anisotonica sia la conseguenza soltanto della anisotonicità e non piuttosto, e spesso in maggior grado, anche della sua azione chimica sul protoplasma.

Ma un poco più lungamente ci dobbiamo fermare a discutere alcune esperienze e considerazioni del Balbiani (2). Egli studia più che altro l'adattabilità maggiore o minore dei varî Protozoi a soluzioni anisotoniche; non

(1) Yasuda Atusky, *On the accomodation of some Infusoria to the solutions of certain substances in various concentrations.* Annot. Z. Japon. Tokyo, vol. I, pag. 23-29, 1897.

(2) Balbiani E. G. *Études sur l'action des sels sur les Infusoires.* Arch. Anat. micr. Paris, tome 2, pag. 518-600, 1899.

mancano tuttavia accenni a questioni di permeabilità, accenni che vale la pena di riferire e di discutere.

Egli considera la soluzione di Na Cl 0,3 % come isotonica al contenuto interno del *Paramaecium aurita*. Che cosa egli voglia dire, io non capisco affatto. Riferisco il suo passo (pag. 547): « Cette conclusion est confirmée par ce fait, que non seulement les Paramécies de toutes provenances peuvent vivre pendant un temps indéfini dans cette solution à 0,30 p. 100, mais s'y multiplier aussi énergiquement que dans l'eau pure... Les animalcules s'y trouvent naturellement adaptés en vertu des lois physiques de l'osmose, et n'ont aucun effort physiologique à faire pour s'equilibrer avec leur nouveau milieu: la vie des Paramécies dans ce milieu n'est donc pas un phénomene d'accoutumance proprement dit, comme dans les milieux à plus forte concentration saline ». L'autore insomma considera isotonica questa soluzione per il Paramecio, perchè non lo uccide nè disturba la sua prolificazione! La contraddizione è manifesta con ciò che egli dice altrove, in molti luoghi, p. es. quando a pag. 539 accenna a ristringimenti e dilatazioni osmotiche per passaggio di acqua; con tutto ciò insomma che è ormai acquisito alla scienza relativamente alla permeabilità all'acqua delle membrane cellulari. Giacchè, dato questo, ne segue di conseguenza necessaria che il Paramecio deve essere in equilibrio osmotico coll'ambiente in cui vive; e quindi non ha senso parlare di una soluzione isotonica con i liquidi del Paramecio, in generale, mentre si sa, e l'autore lo sa meglio di me, che il Paramecio può vivere e vive in ambienti varî per tonicità. Non siamo per il Paramecio nel caso di quegli animali che hanno un ambiente interno a pressione osmotica invariabile, in qualunque ambiente esterno l'animale si trova immerso.

L'autore ha confuso il concetto di « isotonicità » con quello di « tonicità *optimum* » per la vita del Paramecio, o forse con quello di ultimo limite di concentrazione la quale non danneggia la vita del Paramecio. Del resto per quanto io non abbia fatto esperienze sul Paramecio, quelle fatte su altri Infusorii, e che ho esposto nella Nota precedente, mi autorizzano ad affermare come molto probabile che un Paramecio condotto a vivere, per graduale adattamento, in una soluzione di Na Cl assai più concentrata di quella al 0,3 %, morrebbe in pochi secondi scoppiando, quando venisse ricondotto in questa.

Balbiani non conferma il passaggio del nitrato di potassio nell'interno delle cisti (*Colpoda cucullus*). Facendo con questa stessa specie esperienze di disseccamento delle cisti in soluzioni di nitrato di potassio e di cloruro di sodio, trova l'autore che le cisti non muoiono e possono dar luogo nuovamente a Infusorii liberi, tostochè vengano opportunamente ribagnate. La ragione che spiega questa loro resistenza alle soluzioni concentrate dei sali su ricordati, è, secondo l'autore, questa, che la ciste è impermeabile ai sali, permeabile all'acqua, mentre l'Infusorio libero è permeabile anche alle sostanze disciolte (pag. 583). Vi è qui un seguito di errori di logica: infatti, l'Infusorio libero muore nelle

soluzioni concentrate per ristringimento e perdita d'acqua, cioè proprio perchè la sua membrana è semipermeabile, e non lascia passare i sali (o solo in tracce). Quando li lascia passare, si hanno i fenomeni di adattamento e di sopravvivenza, come ho mostrato nell'altra Nota. E se per le cisti fosse vero ciò che l'autore afferma, quando esse, provenendo da una soluzione diluitissima, p. e., di NaCl, resistono al disseccamento, dovrebbero perdere quasi completamente tutta l'acqua, per arrivare coi succhi interni alla stessa concentrazione molecolare della soluzione satura di NaCl; per tale condizione di saturità passa infatti necessariamente l'ambiente per disseccarsi. Ora, mi sembra, non è punto probabile nè questo disseccamento interno quasi completo, nè che la sostanza vivente possa impunemente essere condotta ad una concentrazione molecolare corrispondente a quella di una soluzione satura di NaCl. Noi non possiamo fare delle affermazioni recise a questo proposito; ma se dobbiamo o vogliamo fare *a priori* delle supposizioni, non è forse molto più semplice immaginare che la parete esterna della ciste finisca col diventare impermeabile tanto ai sali quanto all'acqua?

Passando ora a riferire le mie esperienze, le riporto suntando le mie note giornaliere:

16 aprile. Si preparano quattro infusi, ciascuno con 50 granelli di pepe nero e 50 cm. c. di liquido. Si adoperano per i varî infusi (*a, b, c, d*) i seguenti liquidi:

a) acqua distillata: *b*) NaCl 5 ‰; *c*) NaCl 1 %; *d*) NaCl 2 %.

18 aprile. Si cominciano a vedere nell'infuso *a* dei piccolissimi flagellati, del genere *Oikomonas.*

20 aprile. Aumentati molto in *a*; anche in *b* qualcheduno.

Nei giorni seguenti vanno aumentando, e compaiono poi anche nelle altre infusioni. Nella porzione *d*, però, nascono molto tardivamente, verso la fine del mese. Nascono anche dei *Colpidium colpoda.*

Vengono fatte varie prove, prendendo piccole quantità dei varî infusi, e mischiandole con altre soluzioni. Si possono trasportare gli *Oikomonas* dalla concentrazione 0 (o quasi) o 5 ‰, fino al 2 %, senza che si notino variazioni nè subito, nè nei giorni seguenti all'operazione; e così dal 2 % all' 1 %, o dall'1 % al 2,5 ‰; se si trasportano dal 2 %, al 5 ‰ o si fanno altri passaggi molto grandi, qualche volta tutti gli Infusorî si incistidano. Ma si deve notare che ciò accade qualche volta anche in piccole porzioni di liquido degli infusi, poste per confronto in vetrini da orologio, senza aggiunta di altre soluzioni (dentro ad una camera umida).

Verso la fine del mese di aprile, in *a* non vi son più *Oikomonas*, i quali si sono tutti incistidati; ed a molti è accaduto lo stesso anche in *b.*

Si lasciano evaporare lentamente tutti gli infusi. A poco a poco si incistidano tutti gli *Oikomonas.*

9 giugno. Gli infusi *a* e *c* sono completamente disseccati da qualche giorno. Si aggiunge circa 50 cm. c. di liquido in ambedue. In *a* di NaCl al 3 %, e in *c* di una soluzione di NaCl tale che, tenuto conto del sale contenuto nel recipiente dopo il disseccamento del liquido del primitivo infuso, tutto il liquido arrivi ugualmente alla concentrazione di 3 % NaCl.

12 giugno. Si cominciano a vedere in *c* degli *Oikomonas*, che aumentano il giorno dopo.

14 giugno. Questi *Oikomonas* diminuiscono e dopo un altro giorno o due sono tutti incistidati.

In *a* nè in questi giorni nè mai, fino ai primi di luglio, sono nati *Oikomonas*.

Varî tentativi, fatti in epoche differenti, di far nascere *Oikomonas* in infusi di pepe al 3 °/₀ eran sempre riusciti vani.

Si consideri dunque, in primo luogo, come si tratti qui di una specie che nasce indifferentemente in infusi fatti con acqua distillata o con soluzioni, anche assai forti, di NaCl (2 °/₀); e, quello che è più notevole, che si può trasportare da un ambiente all'altro, senza che, coi più forti ingrandimenti, si possano vedere fenomeni di contrazione o rigonfiamento. Le soluzioni di NaCl non agiscono, insomma, osmoticamente su questi animali. E allora, due supposizioni sono possibili: o la loro parete esterna è impermeabile tanto all'acqua che al sale, o è permeabile tanto all'una che all'altro. Nel primo caso è evidente che il trasporto da un ambiente all'altro non può avere nessun effetto; come accade per esempio a noi che, se facciamo un bagno di mare, non perdiamo tutta l'acqua che uscirebbe per l'osmosi, se l'acqua potesse uscire attraverso alla nostra pelle. Nel secondo caso l'equilibrio osmotico si ristabilisce subito, passando da un ambiente all'altro, senza fenomeni di variazione di volume, per l'ingresso o la fuoriuscita del sale. Noi non abbiamo prove di fatto per decidere la questione. Ma dov'è in questi animali una parete esterna che, all'aspetto, mostri o una certa grossezza o una certa consistenza, in modo da resistere al passaggio dell'acqua? Questi animali, anzi, facilmente si disfanno, appena premuti un poco col vetrino copri-oggetti. È vero che potrebbe questa condizione di impermeabilità risiedere in condizioni speciali di tensione superficiale, ma, fino a che questo od altro speciale meccanismo avente lo stesso effetto non sia dimostrato, dobbiamo ritenere, mi sembra, come cosa più probabile, anzi molto probabile, che esista qua una permeabilità all'acqua e ai sali (NaCl). Forse altri protozoi presentano condizioni intermedie, come per esempio i *Chilodon*, i quali sono sensibili alle soluzioni anisotoniche ma non però molto, sì che si acquista il concetto che essi siano un poco permeabili al NaCl, che questo passi, ma difficilmente.

Dobbiamo dunque discendere tanto in basso per trovare degli esseri viventi i quali non abbiano nelle proprie membrane questa proprietà di impedire ai sali il passaggio, mentre si lasciano traversare dall'acqua!

Ma un altro curioso resultato ci dà questa esperienza. Vi è un limite anche per questi Flagellati alla possibilità di nascere in infusi fatti con soluzioni concentrate. Così, normalmente, in NaCl 3 °/₀ non nascono mai, e tardivamente anche in NaCl 2 °/₀. Ebbene, quando ho fatto l'infuso al 3 °/₀, in quel recipiente ove si era disseccato un primitivo infuso all'1 °/₀, gli *Oikomonas* nacquero! Nel primitivo infuso gli *Oikomonas* avevano vissuto finchè il liquido, disseccandosi, era arrivato circa alla metà del volume primitivo

(concentrazione di NaCl 2 %), poi si erano incistidati. Ora, questa nuova nascita esprime evidentemente il fatto che i germi degli *Oikomonas* non sono tutti uguali, ma tanto più salati quanto più era salato l'ambiente in cui gli *Oikomonas* erano vissuti. Nel caso dell'esperienza i germi erano forse già alla concentrazione del 3 %, o poco meno, e per questo poterono svilupparsi in NaCl 3 %, mentre non si possono sviluppare i germi di *Oikomonas* vissuti in acqua distillata. Cattiva condizione di vita però per gli *Oikomonas* questa forte concentrazione, giacchè alla nascita seguì dopo poco l'incistidamento.

Nulla di strano in tutti questi fatti; ma io li ho riferiti perchè essi mostrano come possa avvenire un progressivo adattamento a soluzioni sempre più concentrate, attraverso a successive generazioni. Perchè se si pensa che gli *Oikomonas* viventi negli altri infusi in generale non resistevano alla concentrazione del 3 %, se vi venivano repentinamente portati (senza però mostrare raggrinzimento), si vede come il protoplasma vivente, possa, quando passa attraverso alla forma di germe (o di ciste) e poi di nuovo di organismo adulto, adattarsi molto più facilmente a nuove condizioni di vita.

Parassitologia. — *Sulla trasmissibilità della peste bubbonica ai pipistrelli.* Nota preventiva di B. Gosio, presentata dal Socio Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Blaserna dà annuncio della morte del Socio straniero Emanuele Lazzaro Fuchs; ed il Segretario Cerruti legge il seguente cenno necrologico del defunto Accademico.

« Emanuele Lazzaro Fuchs, nato il dì 5 maggio 1832 a Moschin nella Posnania e morto il dì 26 aprile a Berlino, apparteneva alla nostra Accademia quale Socio straniero dal 16 dicembre 1883.

« I casi della sua vita, esclusivamente dedicata alla scienza ed all'insegnamento, si raccolgono in poche parole. Addottorato in filosofia a Berlino nel 1858; insegnante in una scuola industriale di quella città dal 1864 al 1869; dal 1869 al 1874 professore nell'Università di Greifswald e successivamente nelle Università di Gottinga durante l'anno scolastico 1874-75, di Heidelberg dal 1875 al 1884, di Berlino dal 1884 in poi.

« Esordì nell' arringo scientifico con una dissertazione intorno alle linee di curvatura e con alcune ricerche attinenti alla dottrina dei numeri; ma, lasciato ben presto sì fatto campo di studi, nel 1865 pubblicava in un programma scolastico la sua prima e tanto celebrata Memoria intorno alla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili, nella qual Memoria mal si saprebbe decidere cosa sia da ammirare più o la profondità dell' indagine o il valore de' risultati acquisiti alla scienza o la semplicità ed eleganza dell' esposizione. Da questo primo lavoro e da' cinquanta e più altri che gli fecero seguito e che direttamente o indirettamente si collegano col medesimo soggetto, derivarono non solo il razionale e definitivo assetto di uno de' più importanti capitoli del calcolo integrale, ma anche delle scoverte da annoverarsi fra le più geniali e memorabili nell' alta analisi matematica che si sieno compiute negli ultimi decenni, scoverte alle quali il nome del Fuchs rimane indissolubilmente legato ».

Su proposta del Segretario Cerruti, la Classe approva unanime che siano inviate speciali condoglianze, a nome della R. Accademia dei Lincei, tanto alla famiglia del defunto Socio straniero Fuchs, quanto alla R. Accademia delle scienze di Berlino.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle inviate dai Soci Celoria, Lapparent e Lockyer. Richiama inoltre l'attenzione della Classe su di un volume contenente le *Ricerche di biologia pubblicate per il XXV anniversario cattedratico di Pietro Albertoni dai suoi discepoli,* e sopra gli Atti dell'Associazione britannica per il progresso delle scienze e del Congresso internazionale degl' ingegneri, che tennero le loro riunioni a Glasgow nel 1901.

Il Vicepresidente Blaserna presenta, a nome del Socio Tacchini, le pubblicazioni sottoindicate del Comandante Cattolica, direttore dell' Istituto idrografico della R. Marina in Genova, dandone la seguente notizia:

I. *Trattato di idrografia.* Parte. I^a^. *Nozioni di geodesia e topografia.* Libro di testo per la R. Accademia navale.

II. *Fari e segnali marittimi. Nozioni sulla costruzione e funzione dei segnali, con un cenno critico sull' amministrazione dei Fari in Italia.*

III. *Dei metodi seguiti dal R. Ufficio idrografico nel disegno e riproduzione delle carte idrografiche.*

La nostra letteratura nautica data da pochissimo tempo; nelle nostre scuole di marina, una diecina d' anni fa si insegnava soltanto con testi fran-

cesi. L'astronomia nautica si studiava sul Caillet, l'idrografia sul Dubois e la manovra navale sul Bonnefoux. Se questo si verificava per gli studî, che sono la base della coltura, si può immaginare come a più forte ragione mancassero nella nostra lingua le opere, che trattano argomenti speciali, ma pure di grande importanza, come sarebbe, ad esempio, il segnalamento delle coste, in relazione alla navigazione.

Colle due prime opere il Cattolica si è proposto di colmare qualcuna delle più importanti lacune, tuttora esistenti.

Il volume contenente le nozioni di Geodesia e Topografia è il primo dei tre, che costituiranno un trattato di Idrografia, cioè un'esposizione teorico-pratica completa dei metodi e degli istrumenti impiegati per il rilievo di un esteso tratto di costa.

Riguardo al volume dei Fari e segnali marittimi, è certo che esso risponde ad un bisogno non meno sentito dalla gente di mare, nel campo pratico.

Con lo sviluppo della navigazione a vapore, vale a dire col moltiplicarsi dei piroscafi e coll'aumentare continuo delle loro dimensioni e velocità, si sono accresciuti straordinariamente i pericoli, e perciò è da apprezzarsi maggiormente l'opera di coloro, come il Cattolica, che intendono migliorare la funzione del segnalamento.

Infine è importante quanto il Cattolica scrive sulla nostra amministrazione dei Fari, affermando la necessità di una riforma del suo ordinamento, se si vuole che essa risponda efficacemente al suo ufficio.

Il Socio Mosso presenta il fascicolo I del volume XXXVI delle *Archives italiennes de Biologie*, il quale contiene i Rendiconti del quinto Congresso internazionale dei Fisiologi tenutosi a Torino nel settembre scorso. Nell'ultima adunanza del Congresso essendosi fatto un voto che riguarda l'Accademia dei Lincei, il Socio Mosso prima di leggerlo fa precedere alcune notizie che servano a spiegarlo.

Per iniziativa di S. M. la Regina Madre venne ora ampliato l'Osservatorio che porta il suo nome augusto sulla vetta del Monte Rosa. Mentre che prima sulla punta Gnifetti a 4560 metri, vi erano appena tre camere, delle quali una sola serviva alle ricerche scientifiche, ora si costrussero altre quattro stanze, due delle quali più grandi, sovrapposte, con un terrazzo, serviranno alle osservazioni meteorologiche ed agli studî di fisica terrestre, ed una alle ricerche fisiologiche. I fondi per questa impresa ardita vennero offerti da S. M. la Regina Madre che fu la prima a concepire il progetto di dare all'Italia un laboratorio scientifico a grandi altezze, da S. A. R. il Duca degli Abruzzi, dal Club alpino italiano, e dal Ministero di Agricoltura e Commercio. In quest'anno tutto l'edificio sarà ultimato e rivestito di rame.

Il Ministro dell' Istruzione on. Nasi non potendo intervenire all' inaugurazione del Congresso internazionale dei fisiologi, come ne aveva manifestato il desiderio, accordò in tale circostanza lire tremila per arredare la stanza destinata agli studî fisiologici ed il prof. Mosso metteva i suoi apparecchi per le indagini fisiologiche sull'uomo a disposizione dei naturalisti italiani e stranieri che volessero intraprendere delle spedizioni scientifiche sul Monte Rosa.

Il Ministro di Agricoltura e Commercio on. Baccelli stanziò nel bilancio di quest'anno la somma di lire quattromila per l' acquisto degli strumenti registratori che dovranno servire alla meteorologia ed alla fisica terrestre, e venne pure fissata la somma per lo stipendio di un assistente e di un inserviente incaricati del servizio meteorologico di questo Osservatorio nell' altitudine di 4560 metri.

Durante il Congresso di Torino venne fatta una esposizione internazionale di strumenti fisiologici molto bene riuscita, alla quale presero parte i costruttori più celebri di apparecchi scientifici: molti avendo avuto notizia dell' iniziativa presa dal Ministro Nasi in favore degli studî fisiologici a grandi altezze, offrirono dei loro strumenti per questo nuovo laboratorio alpino; e varî fisiologici mandarono i loro apparecchi. La grande facilità colla quale dal versante italiano si può giungere sulla vetta del Monte Rosa, permetterà di dare nuovo impulso allo studio dell' uomo nelle alpi e la piccola capanna Regina Margherita che aveva già acquistato un nome nella scienza colle spedizioni fatte da Mosso, da Giacosa e da Zuntz di Berlino insieme al prof. Loewy ed ai suoi colleghi, diventerà un centro fecondo di nuove indagini fisiologiche.

Il prof. Sir Michael Foster, segretario della Società Reale di Londra, e il prof. Bowditch dell' Università di Boston, nella seduta di chiusura del Congresso di fisiologia fecero la proposta « che il Congresso internazionale dei fisiologi riunito a Torino chiedesse all'Associazione internazionale delle Accademie, di considerare il laboratorio fisiologico del monte Rosa come una istituzione internazionale e la pregasse di prenderlo in considerazione per i grandi vantaggi che esso può recare alla scienza.

Questa proposta che venne accolta con voto unanime viene ora presentata all'Accademia dei Lincei dal prof. Mosso che era il presidente del Congresso. La prima adunanza dell'Associazione internazionale delle Accademie avrà luogo in Londra; il voto del Congresso internazionale dei fisiologi deve essere prima accolto favorevolmente dall'Accademia dei Lincei che rappresenta l' Italia nell'Associazione internazionale delle Accademie.

Il Vicepresidente Blaserna dichiara che egli da varî anni prestò ben volentieri l'opera sua perchè la punta Gnifetti fosse munita di un Osservatorio di fisica terrestre e di scienze affini. Egli è lieto di poter aggiungere che nulla osta a che il voto del Congresso internazionale di fisiologia possa

essere esaudito; vale a dire che una stanza di quell'Osservatorio sia destinata a ricerche fisiologiche. In tal modo un terrazzo coperto servirà per la meteorologia, due altre stanze sottostanti serviranno alla fisica terrestre. Vi saranno inoltre: una stanza destinata alla fisiologia; una destinata ad abitazione dell'Assistente incaricato di rimanere lassù durante la stagione calda; una stanza destinata per alloggio agli ospiti che vorranno recarsi colà per fare delle ricerche; una stanza destinata a cucina; e finalmente due locali da servire come ricovero per i membri del Club Alpino.

Il Vicepresidente dice di essere ben lieto di poter presentare all'Accademia il voto del Congresso di Torino, e propone quindi che questo Osservatorio, costruito tutto per cura degli Italiani, sia raccomandato all'Associazione internazionale delle Accademie nella sua prossima riunione.

La Classe approva all'unanimità la proposta del Vicepresidente.

COMITATO SEGRETO

La Classe dichiara, in seguito all' iniziativa presa dalla Classe di scienze morali, storiche e filologiche, che ogni Socio ha il diritto di inserire negli Atti accademici tutte quelle osservazioni che egli crede di poter fare nell' interesse della scienza in fatto di Regolamenti Universitari; ma in pari tempo essa opina che non sia il caso di sottoporre queste osservazioni ad una deliberazione dell'Accademia, perchè in fatto di verità o di opportunità scientifiche non vi sono maggioranze o minoranze che possano decidere una questione.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; le Società zoologiche di Londra e di Amsterdam; le Società geologiche di Manchester, di Calcutta e di Sydney; la Biblioteca Vaticana di Roma.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto ed Orto botanico di Palermo; il R. Istituto geodetico di Potsdam; l'Osservatorio Haynald di Kalocsa.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 maggio 1902.

Cattolica P. L. — Dei metodi seguiti dal R. Ufficio Idrografico nel disegno e nella riproduzione delle carte idrografiche. Firenze, 1899. 8°.

Id. — Fari e segnali marittimi. Genova, 1902. 4°.

Id. — Trattato di idrografia. P. I. Nozioni di geodesia e topografia. Genova, 1902. 8°.

Celoria G. — Studî e ricerche specialmente italiane sulle variazioni delle latitudini terrestri. Milano, 1901. 8°.

Compte-rendu du 5e Congrès international de physiologie, Turin 17-21 sept. 1902, publié par le Secrétaire local Dr. Z. Treves. Turin, 1901. 8°.

D'Achiardi G. — Descrizione di alcune rocce della Colonia Eritrea, raccolte dal dott. G. Bartolommei Gioli. Pisa, 1902. 8°.

Daniel J. — Dictionnaire des matières explosives. Paris, 1902. 8°.

De Angelis D'Ossat G. — Fauna liasica di Castel del Monte (Umbria). Roma, 1902. 8°.

Id. — Un pozzo trivellato presso Napoli. Roma, 1902. 8°.

In memoria di Giulio Bizzozero nel primo anniversario della sua morte, la famiglia. Torino, 1902. 4°.

International Engineering Congress, Glasgow 1901. Meeting held at the University Glasgow on the 3th-5th Sept. 1901. Proceedings of the Section I and II. London, 1902. 8°.

Lapparent A. de — Atomes et Molécules. Louvain, 1902. 8°.

Lockyer N. — The chemical origins of the lines in Nova Persei. London, 1902. 8°.

Id. — Total Eclipse of the Sun, May 28, 1900. London, 1902. 4°.

Longo B. — Contribuzione alla conoscenza della vegetazione del bacino del fiume Lao. Roma, 1902. 4°.

Mc Lean A. — Local industries of Glasgow and the West of Scotland. London, 1902. 8°.

Maggiora A. — L'opera igienica di Bernardino Ramazzini. Modena, 1902. 8°.

Pierantoni L. F. — Dimostrazione del postulato di Euclide. Chieti, 1902. 8°.

Raulin V. — Variation séculaire du magnétisme terrestre. Paris, 1902. 8°.

Relazione dimostrativa dello stato e dello andamento dei lavori catastali dal 1° luglio 1900 al 30 giugno 1901. Roma, 1902. 8°.

Ribaga C. — Gamasidi planticoli. Portici, 1902. 8°.

Ricerche di biologia pubblicate per il XXV anniversario cattedratico di Pietro Albertoni dai suoi discepoli. Siena 1876 — Bologna 1901. Bologna, 1901. 4°.

Sars G. O. — An Account of the Crustacea of Norway. Vol. IV. Copepoda Calanoida. Part 5-6. Bergen, 1902. 8°.

Schreiber P. — Gewitter-Registrator. Calocsa 1901. 8°.

Valli V. — Rivendichiamo all' Italia la priorità della scoperta dell' inoculazione del virus rabido e del pus antipestilenziale. Roma, 1901. 8°.

Verri A. — Sorgenti, estuario e canale del fiume Sarno. Roma, 1902. 4°.

Id. — Un capitolo della geografia fisica dell' Umbria. Roma, 1901. 8°.

Vinassa de Regny P. — Paleontologia. Milano, 1902. 16°.

Worel K. — Ueber directe Photographie in natürlichen Farben auf Papier. Wien, 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 maggio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Anatomia. — *Sopra gli organi escretori delle Salpidi.* Nota del Socio Todaro.

Gli organi escretori o renali delle Salpidi sono rimasti sconosciuti fino ai nostri giorni. L'anno scorso, nella seduta 11 aprile del III Congresso Zoologico Italiano tenuto in Napoli (1), io dimostrai le numerose e voluminose concrezioni uriche, che si trovano nel mesenchima attorno all'esofago e allo stomaco degli individui adulti della prole solitaria e della prole aggregata della *Helicosalpa virgola* (*), delle quali avevo ottenuto la prova non dubbia dell'acido urico con la reazione caratteristica della murexide.

Contemporaneamente W. Dahlgrün, nella comunicazione preliminare (2) sopra la struttura degli organi escretori dei Tunicati e nella Memoria pubblicata sopra lo stesso argomento (3), ha fatto conoscere che nel mesenchima, che occupa lo spazio tra l'esofago e lo stomaco da un lato ed il retto dall'altro degli individui adulti di ambedue le forme, solitaria ed aggregata, della

(1) F. Todaro, *L'organo renale delle Salpe.* Monitore zoologico italiano, anno XII, N. 7, 1901.

(*) Divido la famiglia delle *Salpidae* Forbes in tre generi: *Helicosalpa* mihi; *Cyclosalpa* Blainv.; *Salpa* Forsk.

(2) W. Dahlgrün, *Untersuchungen über den Bau der Excretionsorgane der Tunicaten.* Zoologischer Anzeiger, Bd. XXIV, N. 638, 1901.

(3) W. Dahlgrün, *Untersuchungen über den Bau der Excretionsorgane der Tunicaten.* Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. 58, Heft 2, 1901.

Salpa democratica e della *S. fusiformis*, si trovano cellule ovali contenenti granulazioni uriche, che egli perciò definì come vere cellule renali, derivate dalle cellule del mesenchima. Quindi sostenne che l'insieme di queste cellule forma il rene delle Salpidi, il quale sarebbe semplice come quello delle Synascidie e delle Cionadi, in cui, secondo lo stesso autore, sarebbe rappresentato da cellule renali isolate; nell'un caso e nell'altro perdurerebbero per tutta la vita dell'animale, e per conseguenza crescerebbero di numero man mano che altre cellule mesenchimatiche si caricano di granulazioni uriche. Egli paragona la funzione di queste cellule a quella della vescica renale delle Molgulidi e delle vescicole renali delle Phallusie, nelle quali C. Kupffer (1) ha stabilito che la secrezione non viene espulsa, ma depositata in sostanza densa entro vescicole chiuse. Però la comparazione non regge: nelle Molgulidi e nelle Phallusie le cellule epiteliali della parete della vescicola non accumulano, ma segregano i prodotti del ricambio materiale, il quale per la mancanza d'un condotto escretore rimane nella cavità della stessa vescicola ove si addensa; mentre le così dette cellule renali isolate del Dahlgrün non segregano, ma accumulano tali prodotti nel loro protoplasma senza, secondo lui, soggiacere ad altre mutazioni.

Invece io dimostrai al Congresso di Napoli che le concrezioni uriche si disgregano in finissime granulazioni, le quali, insieme all'acqua dell'emolinfa delle lacune vascolari, vengono a formare l'urina che si elimina per la via dell'esofago. Questo fatto mi ha condotto a scoprire gli organi renali delle Salpidi nel maggior numero delle specie che vivono nel Mediterraneo, organi che sono sfuggiti totalmente alle indagini del Dahlgrün.

Pubblicherò quanto prima le mie ricerche; per ora mi limito a comunicare all'Accademia soltanto i risultati principali.

Il mesenchima della regione viscerale delle Salpidi, e credo forse di tutti i Tunicati, ha la proprietà di formare gli endotelî ed il sangue, vale a dire, durante tutta la vita dell'individuo, le cellule del mesenchima di questa regione si moltiplicano e si trasformano in endotelî, in globuli sanguigni ed in linfociti, che sono cellule prive di membrana, come le cellule del mesenchima dalle quali derivano (*).

(1) C. Kupffer, *Zur Entiwckelung der einfachen Ascidien.* Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. VIII, 1872.

(*) Gli endotelî ed il sangue hanno anche altre fonti d'origine: durante la vita embrionale si formano nella placenta fetale e nell'oeleoblasto della prole solitaria, e nello stoloblasto della prole aggregata. Nelle specie del gen. *Helicosalpa* ed in quelle del gen. *Cyclosalpa*, il cosidetto organo allungato, che perdura per tutta la vita ai lati del corpo della Salpa, come già io ho dimostrato, è pure una glandula emopojetica (vedi Todaro, *Sopra lo sviluppo e l'anatomia delle Salpe.* Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. II, serie 2ª, 1875).

I globuli sanguigni sono gli elementi più numerosi e si presentano sotto due fasi: in origine sono piccole cellule rotonde prive di membrana, con un nucleo relativamente grande; quindi, crescendo, perdono il nucleo e presentano l'aspetto di morula, a motivo della ripartizione del loro protoplasma in piccoli campi poligonali.

I linfociti sono grandi cellule rotonde od ovali senza membrana, con citoplasma chiaro e leggermente granuloso; hanno un piccolo nucleo rotondo, e corrispondono ai così detti fagociti.

Nel mesenchima, che sta intorno agli organi renali e specialmente in corrispondenza dell'esofago e dello stomaco, il citoplasma, tanto de' globuli sanguigni quanto dei linfociti, si carica di sostanze uriche.

Nel corpo del linfocito si vede in principio una minuta granulazione, che col carminio si colora in rosso rubino. Via via che questa granulazione aumenta, sparisce il nucleo, ed il corpo protoplasmatico, notevolmente ingrandito, si colora tutto intensamente in rosso rubino.

I globuli sanguigni (fig 1), in questa parte del mesenchima (mesenchima renale), perdono il nucleo non appena formati, e si presentano in principio come piccoli corpi sferici, che si colorano leggermente in rosso col carminio. Sono talora isolati, circondati da una zona chiara, ma per lo più stanno riuniti insieme in tre, quattro, cinque o più globuli dentro le lacune vascolari. In questi piccoli globuli cominciano a comparire le concrezioni uriche, omogenee, sferiche od ovali, alcune delle quali hanno il colore bianco-cretaceo, altre bruno-giallognolo. Le prime col carminio, o colla doppia colorazione di ematossilina acida e carminio boracico, si colorano intensamente in rosso rubino; nelle seconde il colorito bruno-giallognolo rimane quasi invariato. Oltre di questi piccoli globuli sanguigni, non è raro vedere, in qualche lacuna del mesenchima che circonda l'esofago, un corpo sferico isolato, carico di concrezioni uriche, il quale conserva la grandezza e la forma del globulo sanguigno nella fase di morula.

I globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, si comportano diversamente secondo le specie: scarsissimi nelle specie del genere *Cyclosalpa*; scarsi nella *Salpa democraticà* e nella *Salpa fusiformis*; sono invece abbondanti nella forma aggregata della *Salpa Tilesii* e della *Salpa confoederata*, ma sopratutto abbondano in tutte e due le forme dell'*Helicosalpa virgola*.

In queste tre ultime specie si vedono i globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, formare grossi conglobati o corpi di forma ora ovoidale, ora sferica. Questi corpi nella *Salpa Tilesii* lasciano nettamente vedere i globuli che concorrono a formarli; poichè le granulazioni uriche, brune e rosse, stanno nel corpo dei globuli come sferule di grandezza variabile, per lo più piccole, isolate e non molto abbondanti. Viceversa, nella prole aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 1, *Cu*) e in ambedue le forme della *Helicosalpa virgola*, i globuli del sangue accumulano tanta sostanza urica, che questa si mostra fusa in massa, e non si veggono più i limiti netti tra un globulo

e l'altro. Tutto il conglobato si presenta come un corpo, o sferico, od ovale, circondato da uno strato chiaro di sostanza organica, ed intersecato da linee bianchicce della stessa sostanza, che rappresentano i primitivi limiti di adesione dei globuli fra loro.

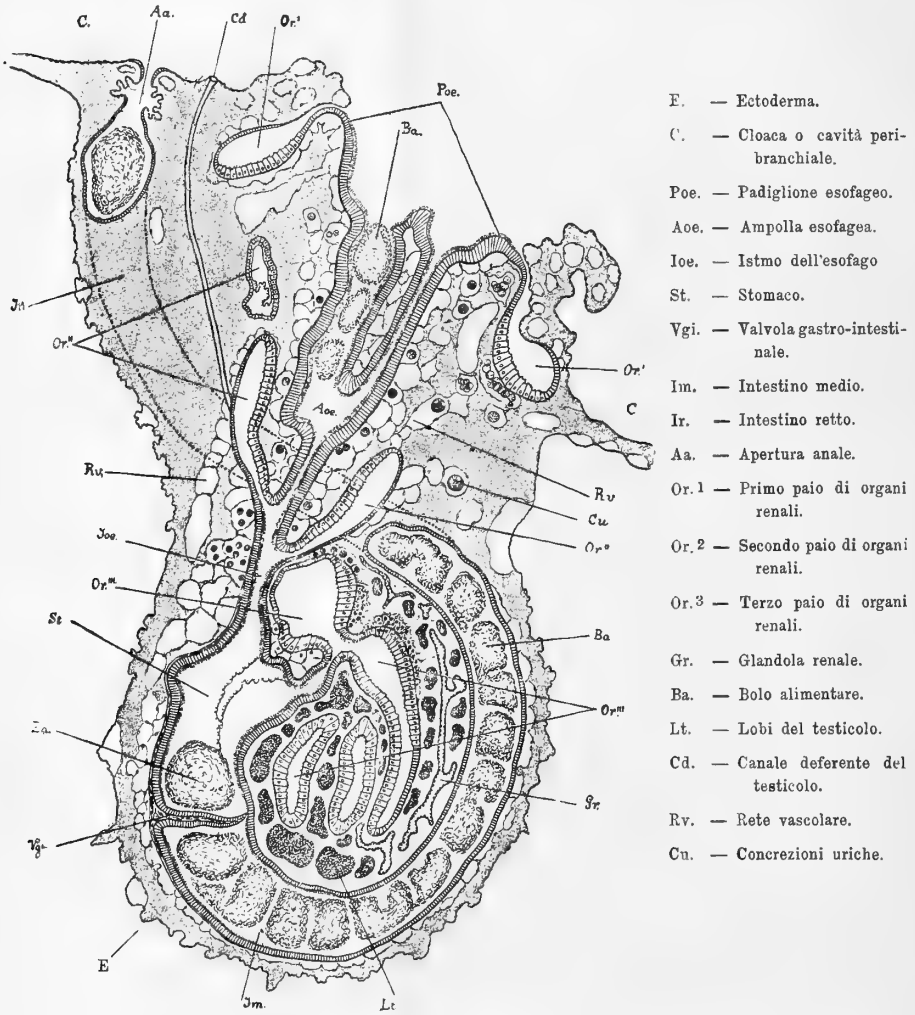


Fig. 1. — Schema dell'apparecchio uro-digerente e del testicolo della *Salpa confoederata. (prol. ag.).*

Non tutti questi corpi presentano uniformemente il colorito bruno-giallognolo; ma in alcuni si distinguono dei settori bianco-cretacei o rosso-rubini; ciò sta in rapporto con i globuli diversi, che sono entrati nella loro composizione. Nell'*Helicosalpa virgola* questi corpi, tanto nella prole solitaria come

nella prole aggregata, sono così voluminosi che fanno prominenza sulla superficie; e negli individui adulti, sono tanto abbondanti ai lati dell'esofago, che danno un carattere particolare al mesenchima renale, il quale, con una lente anche di mediocre ingrandimento, si vede avere la forma presso a poco triango-

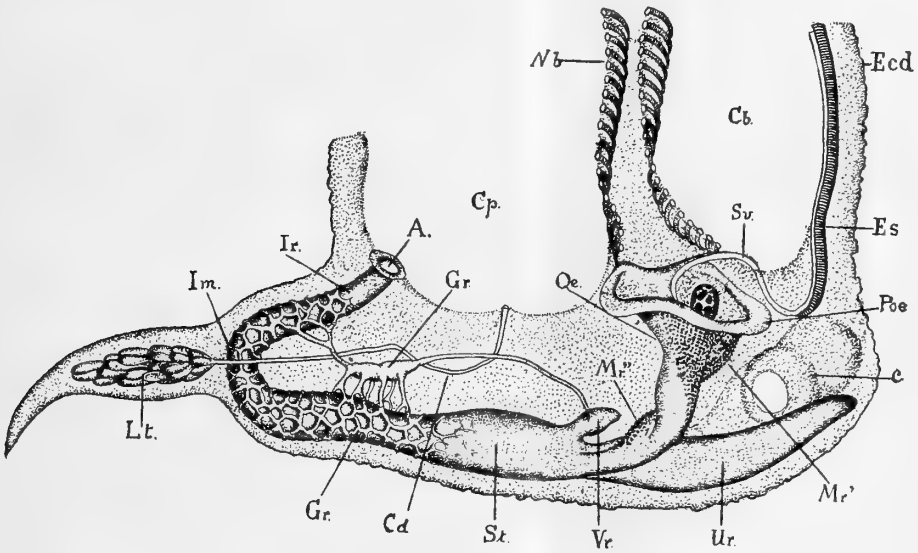


Fig. 2. — Regione viscerale della *Salpa virgola (prol. ag.)*, veduta a debole ingrandimento.

Nb. Nastro branchiale. — Sv. Solco ventrale. — Es. Endostilo. — Oe. Esofago. — St. Stomaco. — Im. Intestino medio. — Ir. Intestino retto. — A. Ano. — Lt. Lobi del testicolo. — Cd. Canale deferente. — Gr. Glandola renale. — Vr. Vescichetta o ampolla renale. — De. Dutto escretore. — Ur. Utricolo renale. — Cb. Cavità branchiale. — Cp. Cavità peribranchiale o cloaca. — Ecd. Ectoderma. — c. Cuore. — Mr.' Mesenchima renale destro. — Mr.'' Mesenchima renale sinistro.

lare col vertice rivolto indietro e prolungato fino allo stomaco (fig. 2, *Mr'*, *Mr''*). In questo mesenchima i corpi o conglobati urici, si presentano come i pezzi di un mosaico. Essi sono composti di uno stroma di sostanza organica, derivata dal protoplasma dei globuli sanguigni, e delle concrezioni uriche in essa contenute.

I globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, che si veggono nelle lacune vascolari del mesenchima renale, non tutti nascono *in situ*, ma molti provengono dalle parti lontane, e servono a trasportare i prodotti del ricambio materiale agli organi escretori. Difatto la sostanza organica dei corpi che risultano dalla fusione di questi globuli e quella dei linfociti, si va lentamente assottigliando e riassorbendo; quindi le concrezioni uriche si disgregano in finissime granulazioni, che, trasportate dall'idrolinfa del sangue, traversano il mesenchima e penetrano nell'epitelio degli organi renali, dal quale sono eliminate nel modo che dirò.

Nella regione viscerale (fig. 1, *Or'*, *or''*, *or'''*) si trovano, circondati dal mesenchima, tre paia di organi escretori o renali, diversamente sviluppati secondo la specie ed anche secondo la prole nella stessa specie. Questi organi hanno diversa relazione con l'esofago e lo stomaco, e si possono, secondo la posizione che occupano, distinguere in primo, secondo e terzo paio. Ma sia direttamente, sia indirettamente l'orina segregata da loro viene ad essere versata nella cloaca, donde è emessa all'esterno. Avvegnachè nelle Salpidi l'esofago e lo stomaco hanno un doppio ufficio: conducono cioè nell' intestino il bolo alimentare formatosi nell'endostilo, e servono a versare nella cloaca l'urina percolata nella loro cavità dagli organi renali.

L' esofago (figg. 1 e 2) ha la forma ad imbuto, aperto largamente innanzi; quindi possiamo distinguere in esso tre parti: il padiglione (*Poe*), che circonda l'apertura anteriore; l'ampolla (*Aoe*), che segue al padiglione; l'istmo (*Ioe*), che va ad aprirsi nello stomaco (*st*). Questo è distinto dall' intestino per un leggiero strozzamento. Nella *Salpa confoederata* (*Vgi*), in corrispondenza di questo strozzamento, si trova una valvola rappresentata da un largo lembo, che abbassandosi permette il passaggio del bolo alimentare, ed innalzandosi impedisce la penetrazione nell' intestino dell' urina che si versa nello stomaco, donde, per la via dell'esofago e della cloaca, viene emessa all'esterno.

L' esofago presenta nella parete dorsale dell' ampolla una cresta longitudinale, che la divide in due canali: uno largo e l'altro ristretto; nel primo ho veduto impegnato il bolo alimentare (fig. 1, *Ba*); il secondo sembra destinato al passaggio dell'urina, che dall' esofago si riversa nella cloaca. Invero l'apertura anteriore dell'esofago è circondata da una larga ripiegatura ovale, che presenta la forma di un padiglione (figg. 1, 2, *Poe*), posto trasversalmente sopra le due radici del nastro branchiale, che separano l'una dall'altra, nella loro parete posteriore, la cavità branchiale, e la cavità peribranchiale, le quali, come è noto, comunicano largamente ai lati del nastro branchiale. Il padiglione dell'esofago adunque è dorsalmente posto, cioè nella cavità peribranchiale o cloaca; esso (fig. 2, *Sv*) riceve il solco ventrale della faringe o cavità branchiale, il quale, al di là dell' estremità posteriore dell' endostilo (*es*), si prolunga ricurvato all' innanzi, e risalendo dorsalmente sul padiglione, con cammino a spira si porta nella parete posteriore dell'ampolla esofagea, ove si continua coll' estremità superiore del canale, che conduce il bolo alimentare.

La parete di tutto il tubo alimentare è composta di due membrane: una interna rappresentata da un solo strato di epitelio; ed una esterna, che si colora in rosso, e che è stata descritta come formata di semplice cellulosa, ma invece contiene molte fibre muscolari liscie.

L'epitelio del padiglione esofageo è pavimentoso, come quello della faringe e della cloaca. L'epitelio pavimentoso si continua nella parete ventrale dell'ampolla; mentre in quella dorsale è cilindrico e vibratile, come l'epitelio delle pliche, che limitano l'endostilo o meglio il solco ventrale della cavità

branchiale. Nell' istmo dell'esofago, nello stomaco e nell' intestino, l'epitelio è sempre cilindrico e vibratile, meno nel retto ove è cubico o semplicemente pavimentoso.

Tutto l'epitelio del tubo digestivo è secernente. Il liquido segregato dalle cellule epiteliali dell' intestino agisce sopra il bolo alimentare; ma l'epitelio dell'esofago segrega molto muco, che si colora intensamente con l'ematossilina acida ed il carminio boracico, e lascia vedere difficilmente le lunghe ciglia vibratili di cui è provvisto. Queste però si mostrano chiaramente, riunite ai granuli basali della cellula, nelle sezioni colorite con l'ematossilina ferrica secondo il metodo Heidenhain.

Delle tre paia di organi renali, di cui abbiamo parlato sopra, il primo (fig. 1, *Or'*) è rappresentato da due vesciche; una a destra e l'altra a sinistra, che stanno nel mesenchima ai lati dell' inizio dell' esofago. Queste due vesciche, nella sezione, hanno la forma di un fiasco coricato col collo ripiegato in alto, il quale si apre, con una stretta fissura, ai lati del padiglione esofageo e quindi direttamente nella cloaca.

I due organi renali, uno destro e l' altro sinistro, che rappresentano il secondo paio (fig. 1, *Or''*), sono compressi, e sboccano nell'istmo esofageo, che circondano a spira. Si terminano a fondo cieco, e variano di grandezza e di forma l'uno dall'altro: quello di sinistra è sempre molto più grande di quello di destra. Inoltre la forma e la grandezza di questi due organi variano da una specie all'altra: piccoli nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis*; sono viceversa grandi nelle altre specie, specialmente il sinistro che, nella *Salpa confoederata*, *Salpa Tilesii*, *Salpa zonaria*, *Salpa maxima*, ecc., si prolunga molto, innanzi ed indietro.

I due organi renali posteriori, che fanno il terzo paio (fig. 1, *Or'''*), sboccano in un infossamento dello stomaco che sta ai lati della sua apertura superiore o esofagea, il quale infossamento è a forma di imbuto ciliare capovolto, più o meno pronunciato secondo la specie. Questi due organi sono diversamente sviluppati, non solo tra una specie e l'altra, ma anche tra una prole e l'altra della stessa specie. Nella prole solitaria delle specie appartenenti al genere *Helicosalpa* ed al gen. *Cyclosalpa*, ove sono stati veduti fin dai primi tempi senza essere stati riconosciuti come reni, hanno entrambe la forma di un utricolo o di un'appendice cecale a dito di guanto, e sono presso a poco di uguale grandezza. Viceversa nella prole aggregata di tutte le specie di questi due generi, l'appendice destra si riduce ad una semplice ampolla. In questa viene a sboccare (fig. 2, *Gr*) il lungo condotto escretore d'una glandola tubulare, disposta a rete attorno l' intestino medio, la quale forma parte integrante del terzo paio degli organi renali. Ma questa glandula si sviluppa indipendentemente dagli organi renali.

Tutti gli organi renali, che ho descritto, si sviluppano contemporaneamente al tubo alimentare per estroflessioni dell'entoderma; mentre la glandula in discorso si sviluppa più tardi dalle cellule epiteliali, che si trovano isolate

all'intorno dell'intestino medio, sotto della sua tunica o membrana propria. Molto tempo dopo che dall'entoderma si sono formati gli organi renali, ed il tubo alimentare si è differenziato in esofago, stomaco ed intestino, le predette cellule epiteliali isolate si moltiplicano e formano altrettanti gruppi cellulari, i quali prima solidi divengono poi cavi, trasformandosi così in vescicole epiteliali. Queste vescicole, mano mano che si allungano, si toccano per la loro estremità, ove si fondono e comunicano tra loro; così vengono a costituire la rete tubulare, che rappresenta questa glandula. Le vescicole, che stanno in prossimità dello stomaco, sono più grandi e, riunendosi, formano il condotto escretore di questa glandula, della quale ho seguito tutte le fasi dello sviluppo, fino all'unione del suo dutto con l'ampolla renale, nella prole aggregata della *Salpa democratica*.

Nella forma aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 1, *Or'''*), come in tutte le specie del gen. *Salpa*, i due organi renali, che formano il paio posteriore, si trovano nel mesenchima, che occupa lo spazio fra lo stomaco e l'intestino medio, unitamente alla glandula, il condotto escretore della quale (fig. 1, *Gr*) decorre nella concavità dell'intestino, e sbocca nell'organo renale dorsale che si presenta come una vescica, mentre l'organo ventrale è sviluppato in un lunghissimo tubulo convoluto a forma di coclea, che, in tutte le specie del genere *Salpa* (*Salpae carioenteratae*), occupa il centro del cosidetto nucleo viscerale.

Nel mesenchima, interposto fra le spire del tubulo convoluto l'intestino medio e lo stomaco si trovano sparsi i lobi del testicolo, i quali, sotto l'estremità posteriore dell'esofago, vengono a formare il canale deferente. Questo, decorrendo in avanti fra il retto e l'esofago, si viene ad aprire nella cloaca (fig. 1, *Lt*, *cd*).

La figura schematica (fig. 1), che qui ho posto per indicare la posizione ed i rapporti degli organi renali, è stata ricostruita sopra le sezioni longitudinali, orizzontali e sagittali, della regione viscerale della prole aggregata della *Salpa confoederata* Forsk., nello stato adulto. Ma sebbene la posizione di questi organi non cambia nelle altre specie, pur tuttavia tanto la grandezza quanto i rapporti loro mutano da un genere all'altro e, più o meno, anche fra una specie e l'altra dello stesso genere. Quindi bisognerà trattarne particolarmente, come farò nella Memoria. Ora mi limito soltanto a dire alcune parole intorno la struttura di questi organi.

Da quanto innanzi ho detto risulta che i reni delle Salpidi sono organi cavi, i quali contengono l'urina, che viene segregata dalle pareti loro e quindi versata nella cloaca, o direttamente, o indirettamente per la via dello stomaco e dell'esofago.

La parete di questi organi è composta di una membrana propria (tunica esterna) e di un epitelio. La membrana propria è molle, sottile, amorfa, e si colora con l'ematossilina acida e col carminio. L'epitelio è composto di

un solo strato di cellule, il quale a livello dell'apertura dell'organo si continua con l'epitelio della superficie su cui sbocca. Quindi, a livello dell'apertura, è pavimentoso, come quello della cloaca, negli organi renali anteriori, o del primo paio; è vibratile, come quello dell'esofago e dello stomaco, negli organi renali del secondo e terzo paio.

In tutti gli organi renali, l'epitelio propriamente glandulare si distingue in pavimentoso e cilindrico.

Negli organi del primo paio (fig. 1, *or'*), l'epitelio pavimentoso si trova lungo la parete esterna, ove riveste una procedenza di mesenchima ricco di lacune vascolari. Quest'epitelio non ha altro ufficio che quello di segregare l'acqua, come l'epitelio pavimentoso dei glomeruli del Malpighi del rene dei vertebrati. L'epitelio cilindrico occupa invece tutta la parete interna di questi organi, e presenta i caratteri dell'epitelio dei tubuli contorti del rene dei vertebrati.

Queste due diverse specie di epitelio si trovano ugualmente negli organi renali del secondo e terzo paio (fig. 1, *or''*, *or'''*); ma in questi organi l'epitelio cilindrico, che segrega i principî specifici dell'urina, è molto esteso, riducendosi l'epitelio pavimentoso ad un tratto, che si trova nella parete esterna di essi verso l'estremità distale chiusa a fondo cieco.

Nella glandola renale (fig. 2, *gr*), la quale, come ho detto sopra, nella forma aggregata delle specie del gen. *Helicosalpa* e del gen. *Cyclosalpa* è connessa con l'ampolla del terzo paio, e nella *Salpa confoederata* (fig. 1, *gr*) si apre nel sacco dorsale del terzo paio degli organi renali, l'epitelio è pavimentoso da per tutto: le cellule sono cubiche o piatte, hanno un nucleo rotondo e granuloso, ed il protoplasma chiaro. Nei piccoli tubuli, che formano questa glandola, e nel suo condotto escretore si trova sempre un liquido chiaro; quindi essa segrega l'acqua come l'epitelio pavimentoso del primo e secondo paio e per conseguenza come i glomeruli del Malpighi.

Le cellule dell'epitelio cilindrico, che negli organi renali delle Salpidi hanno l'ufficio di eliminare dall'organismo i prodotti del ricambio materiale, sono molto alte, e in esse, come nelle cellule dei tuboli contorti dei vertebrati, si possono distinguere due porzioni, una basale e l'altra assiale, fra le quali è interposto il nucleo, il quale è vescicoloso, e contiene uno scarso reticolo di linina e alcuni granuli di cromatina variamente disposti.

Queste cellule non hanno membrana nè orlo cuticulare, ed il corpo protoplasmatico loro varia di tessitura, secondo le fasi della sua attività secretiva. Nelle sottili sezioni (7-10 micromillimetri), colorite con la doppia colorazione di ematossilina acida e carminio boracico, si osserva che il corpo di queste cellule contiene le fine granulazioni uriche caratteristiche, colorite alcune in nero o bruno giallognolo, altre in rosso rubino, perfettamente simili alle granulazioni che si trovano nel sottostante mesenchima, e che, come

innanzi si è detto, derivano dalla disgregazione delle masse di concrezioni uriche, che occupano le lacune vascolari del mesenchima renale.

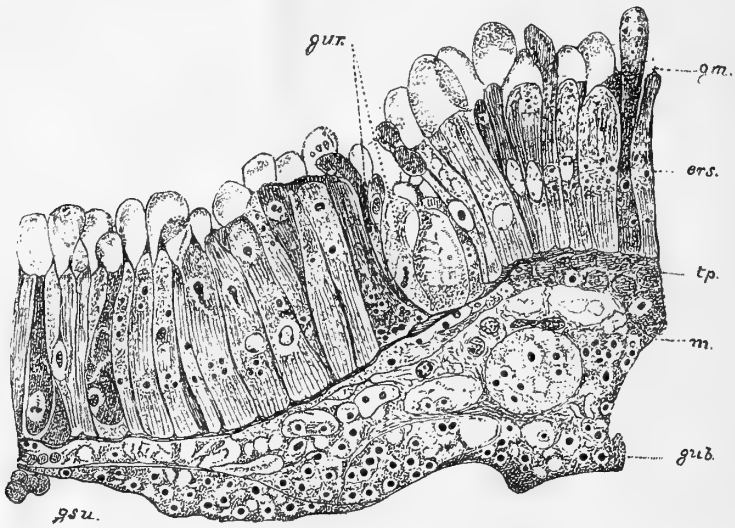


Fig. 3. — Epitelio cilindrico della parte prossimale all'apertura del 3° paio degli organi renali della *Salpa confoederata (prol. ag.)*.

ers. Epitelio renale secernente. — *tp.* Tunica propria. — *m.* Mesenchima. — *gsu.* Globuli sanguigni con concrezioni uriche. — *gm.* Globi mucosi. — *gub.* Granuli urici bruno-giallognoli. — *gur.* Granuli urici rossi.

Nella prole aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 3) e dell'*Helicosalpa virgola* (fig. 4), è facile vedere le granulazioni uriche in tutto l'epitelio

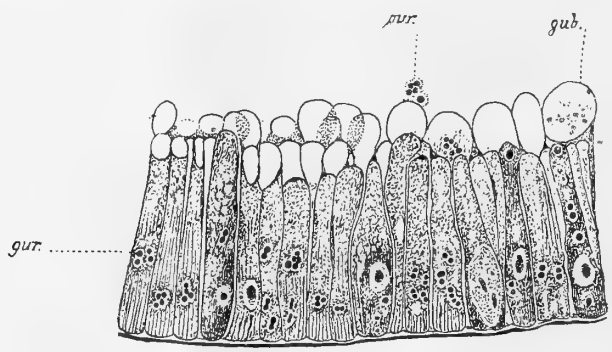


Fig. 4. — Epitelio cilindrico dell'utricolo del 3° paio degli organi renali della *Helico salpa virgola (prol. ag.)*.

gur. Granuli urici rosso-rubino. — *gub.* Granuli urici bruno-giallognoli.

cilindrico renale, ma specialmente in quello degli organi renali del terzo paio, ed in modo più distinto in prossimità allo sbocco di questi ultimi organi, ove le cellule dell'epitelio cilindrico si trovano in tutte le fasi della loro funzione

secretiva, e le granulazioni uriche si mostrano evidenti e caratteristiche, tanto nell'epitelio, quanto nel sottostante mesenchima. Nella *Helicosalpa virgola* tali granulazioni si colorano in rosso rubino, ad eccezione di alcune molto rare che conservano il colorito nero o bruno giallognolo. Viceversa nella *Salpa confoederata* prevalgono le granulazioni bruno-giallognole.

Adunque si vede nel modo più chiaro che i prodotti urici sono eliminati dall'economia animale, mercè la secrezione mucosa delle cellule renali.

Nella prima fase il corpo protoplasmatico di queste cellule si colora da per tutto intensamente, e presenta la struttura reticolare, nelle cui maglie, più o meno strette, si trova il muco segregato. Vi sono in questo muco disseminate qua e là le granulazioni uriche, penetrate dal mesenchima sottostante.

Ma a poco a poco il muco aumenta, e viene ad accumularsi successivamente tutto nella porzione assiale, trascinando con sè le granulazioni uriche. In questa seconda fase la porzione basale si mostra striata longitudinalmente, e nell'estremità libera della porzione assiale delle cellule si veggono i grossi globi di muco, contenenti le granulazioni uriche.

Questi globi mucosi, quando giungono nell'estremità libera delle cellule, sono circondati da un sottile strato di protoplasma, il quale forma una specie di vescicola che, scoppiando, dà luogo alla fuoriuscita del muco contenente le granulazioni uriche. Così mentre il muco si spande a forma di strato sopra l'epitelio, le concrezioni uriche vengono a prender parte principale nella formazione della urina.

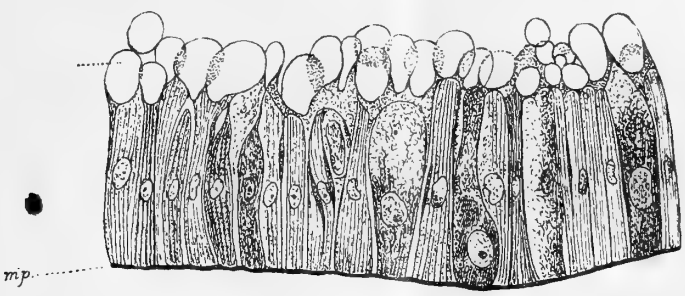


Fig. 5. — Epitelio cilindrico dell'utricolo del 3° paio degli organi renali della *Cyclosalpa piumata (prol. ag.)*.

mp. membrana propria.

Anche negli organi renali posteriori della *Cyclosalpa pinnata* (fig. 5) l'epitelio cilindrico ha le sue cellule in tutte le fasi della funzione renale, e quindi presenta le stesse variazioni di struttura come quelle ora descritte nelle specie sopradette; ma le granulazioni uriche sono poco apprezzabili, poichè, come notammo (pag. 407), in questa specie, ed in tutte le altre del gen. *Cyclosalpa*, le concrezioni uriche sono scarsissime ed estremamente fine,

e quindi nelle cellule dell'epitelio cilindrico appaiono solo come una scarsa e fina punteggiatura nera nel fondo bianco che presentano i globi di muco.

Negli organi renali, che sboccano nell'istmo dell'esofago e formano il secondo paio, le cellule dell'epitelio cilindrico, nella prole aggregata della *Helicosalpa virgola* (fig. 6), hanno la porzione basale striata longitudinalmente.

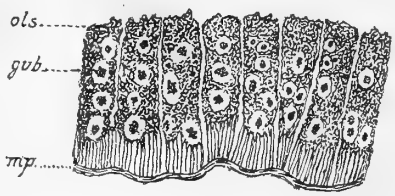


Fig. 6. — Epitelio cilindrico della parte prossimale allo sbocco del 2° paio degli organi renali della *Helicosalpa Virgola (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *gub*. Nuclei composti di granuli urici. — *ols*. Orlo libero sfrangiato.

Viceversa il protoplasma della loro porzione assiale è reticolato. In questo protoplasma vi sono vari grossi cumuli di muco, nel cui centro si trovano aggruppate le concrezioni uriche che formano un nucleo di colorito nero. Ma in queste cellule il muco non si concentra tutto; rimane invece sparso nel reticolo protoplasmatico della porzione assiale, che cade più tardi tutta in un *detritus*, il quale si mescola con l'urina contenuta nella cavità dell'organo, come si vede nel tratto epiteliale che segue a quello qui descritto.

Nella *Salpa confoederata* le cellule dell'epitelio cilindrico degli organi renali anteriori, che sboccano ai lati del padiglione esofageo, sono striate longitudinalmente, meno nella base che viene occupata dal nucleo (fig. 7).

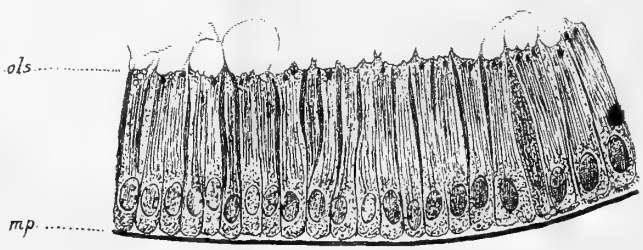


Fig. 7. — Epitelio cilindrico della parete interna (mediale) della vescicola del primo paio degli organi renali della *Salpa confoederata (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *ols*. Orlo libero sfrangiato.

L'epitelio cilindrico del tubulo convoluto del terzo paio di organi renali della prole aggregata della *Salpa Tilesii* (fig. 8) è quello che più si avvicina nella sua struttura all'epitelio dei tubuli contorti dei vertebrati. Le cellule sono regolarmente cilindriche e quasi tutte della stessa grandezza; sono striate in tutta la loro lunghezza, dall'estremità basale all'estre-

mità libera, ove ogni stria termina in un punto nodale sotto l'orlo sfrangiato. Questo ricorda l'orlo a spazzola delle cellule dei tuboli contorti del rene dei vertebrati; ma esso non è fatto di ciglia, bensì di sfrangiature protoplasmatiche, derivate dallo scoppio delle vescicole ripiene di muco.

Nel tubolo convoluto del terzo paio d'organi renali della prole aggregata della *Salpa zonaria* e della *Salpa maxima* la struttura dell'epitelio è simile a quella della *Salpa Tilesii*. Nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis* si presentano alcune particolarità che mi riservo descrivere più tardi.

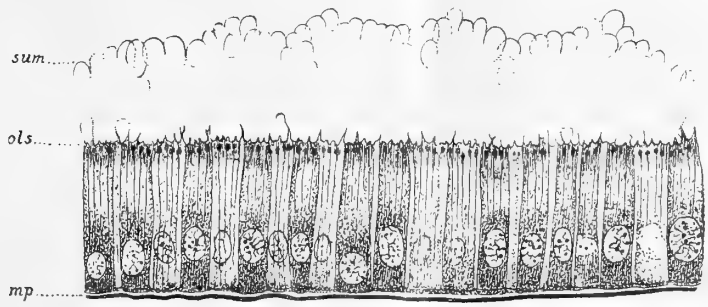


Fig. 8. — Epitelio cilindrico del tubolo convoluto del 3° paio degli organi renali della *Salpa Tilesii (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *ols*. Margine sfrangiato. — *sum*. Secreto uro-mucoso.

Intanto da quanto qui brevemente ho comunicato si può concludere che nelle Salpidi si ha la prova diretta dell'eliminazione dei principî specifici dell'urina per mezzo delle cellule dell'epitelio cilindrico degli organi renali, e si acquista la conoscenza del meccanismo, col quale il corpo protoplasmatico di queste cellule compie tale funzione.

Matematica. — *Sulle serie di fattoriali.* Nota II del Socio S. Pincherle.

In una Nota presentata all'Accademia nella seduta del 16 febbraio del corrente anno (1), ho preso a considerare le serie procedenti per funzioni della forma

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)},$$

e ne ho dato le condizioni di convergenza dipendentemente dalle variabili

(1) Quella Nota verrà qui citata con I, seguìto dal numero del paragrafo.

x ed y, con qualche maggiore precisione di quanto si faccia ordinariamente (1).

Era necessario di fare precedere quelle considerazioni alle altre, di cui intendo ora occuparmi, di sviluppabilità di una funzione in serie di tal forma. Sono più particolarmente degne d'interesse (per le loro applicazioni, in special modo al calcolo delle differenze finite e allo studio delle relazioni fra le funzioni generatrici e le loro determinanti) le serie procedenti secondo le funzioni

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots n},$$

o secondo le

$$\gamma_n(x) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\dots(n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Queste ultime sono quelle serie che hanno formato oggetto delle recentissime comunicazioni del sig. Nielsen all'Accademia di Parigi (2), già citate nella precedente nota; le prime, che formano l'argomento della presente Nota, danno pure luogo ad alcune interessanti osservazioni.

1. Di una data successione

$$c_0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ \dots\ c_n\,,\ \dots \tag{1}$$

si dirà *caratteristica* il massimo limite k (I, § 1) di

$$\frac{\log|c_n|}{\log n}\ (3);$$

la serie $\Sigma\, c_n\, n^{-\varrho}$ è assolutamente convergente per $\mathrm{R}(\varrho) > k+1$ (4); essa non è convergente per $\mathrm{R}(\varrho) < k$.

Assumendo i numeri (1) a coefficienti della serie di fattoriali

$$\sum c_n \binom{x}{n}, \tag{2}$$

si possono presentare i seguenti casi:

(1) Il sig. Bendixson (Acta Math., T. II, pag. 24), ha già avuto occasione di distinguere, per serie procedenti secondo prodotti di fattori lineari, il campo di convergenza semplice da quello di convergenza assoluto.

(2) Comptes Rendus, 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902. Sul medesimo argomento v. anche J. C. Kluyver nei medesimi Comptes Rendus, 10 mars 1902 e nel Nieuw Archief voor Wiskunde di Amsterdam: « Over de ontivikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks » (S. II, T. IV, 1900).

(3) La caratteristica di (1), aumentata di un'unità, dà ciò che il sig. Hadamard (J. de Mathém., S. IV, T. VIII, 1892, pag. 170 e seg.; e *La série de Taylor*, nella raccolta *Scienzia*, Paris, C. Naud, 1901, pag. 459), chiama *ordine* della serie $\Sigma\, c_n\, z^n$ lungo il cerchio $|z| = 1$.

(4) $\mathrm{R}(x)$ indica sempre la parte reale di x.

O si ha $k = -\infty$; la (2) appartiene allora alla prima classe (I, § 3); essa converge assolutamente ed uniformemente per tutti i valori finiti di x e rappresenta in tutto il piano una funzione intera.

O k è finito; in tal caso la (2) converge assolutamente ed uniformemente per $R(x) > k$ e rappresenta per tali valori di x [1] un ramo ad un valore $\sigma(x)$ di funzione analitica monogena. La serie si riduce ad un numero finito di termini per $x = 0$ o per x intero positivo e rappresenta quindi, in ognuno di tali punti, un numero determinato; tuttavia questi punti non si ascriveranno al campo di convergenza della serie (2), ed i valori che essa assume nei punti stessi possono benissimo non essere quelli della funzione $\sigma(x)$ rappresentata dalla serie (2) nel suo campo di convergenza $R(x) > k$, anche se la funzione $\sigma(x)$ esiste nel campo $R(x) \leq k$.

O infine si ha $k = +\infty$: la (2) non ha campo di convergenza e non rappresenta quindi alcuna funzione analitica di x. Essa ha significato solo per $x = 0$ e per x intero positivo.

2. Qualunque sia quello dei tre casi ora considerati in cui si trova la serie (2), facendovi $x = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ si otterrà sempre una successione determinata

$$b_0 , b_1 , b_2 , \ldots b_n , \ldots \tag{3}$$

dove b_n è data da

$$b_n = c_0 + n c_1 + \binom{n}{2} c_2 + \cdots + c_n. \tag{4}$$

Inversamente, risolvendo le (4) rispetto a c_n, si otterrà immediatamente la successione (1), data che sia la (3), per mezzo della formula

$$c_n = b_n - n\, b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} - \cdots + (-1)^n b_0 , \tag{5}$$

che, mediante la notazione usuale del calcolo delle differenze finite, può anche scriversi

$$c_n = \Delta^n b_0 .$$

Sia ora data una funzione analitica $f(x)$ regolare per ogni valore $R(x) \geq 0$, e si formi la successione

$$\Delta^n f(0) .$$

Se questa ammette una caratteristica k che non sia $+\infty$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n f(0) \binom{x}{n}$$

[1] Che si diranno costituire il campo di convergenza della serie.

convergerà assolutamente ed uniformemente per $R(x) > k$, e la differenza

$$f(x) - \sum \Delta^n f(0) \binom{x}{n} \tag{6}$$

rappresenterà, per ogni $R(x)$ maggiore del maggiore fra i numeri 0 e k, una funzione analitica regolare, nulla nei punti

$$x = E(k) + 1, \qquad E(k) + 2, \ldots,$$

essendo $E(k)$ il massimo intero contenuto in k.

L' espressione (6) è nulla per $x = 0, 1, 2, \ldots E(k)$, anche se è $E(k) \geq 0$, sebbene per $R(x) \leq k$ essa espressione (6) non rappresenti una funzione analitica.

Può accadere che la differenza (6) sia identicamente nulla: in tal caso la funzione $f(x)$ sarà sviluppabile in serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, e se ne conclude intanto che è

« condizione n e c e s s a r i a a che una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie « di fattoriali, che la caratteristica di $\Delta^n f(0)$ non sia $+\infty$. »

Si può aggiungere ancora che

« condizione n e c e s s a r i a a che una funzione $f(x)$ trascendente intera sia « rappresentabile in tutto il piano da una serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, è che la « caratteristica di $\Delta^n f(0)$ sia $-\infty$. »

3. Le considerazioni precedenti conducono naturalmente a chiedere se possono esistere sviluppi dello zero in serie di fattoriali, e di conseguenza, se per una stessa funzione possono esistere più sviluppi di tale forma. L' esistenza di sviluppi dello zero è stata dimostrata dal Frobenius [1] per le serie procedenti secondo funzioni della forma

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n);$$

egli considera più particolarmente il caso in cui $\Sigma |a_n|$ è convergente, ma pure accennandoli, nel § 7 della sua Memoria, per altri casi e in particolare per quello di serie di fattoriali, non costruisce effettivamente, per questo caso, i detti sviluppi dello zero.

Tali sviluppi si possono ottenere direttamente dalle relazioni che abbiamo dal § precedente, nel seguente modo, del tutto elementare.

Dapprima, non può esistere uno sviluppo dello zero

$$\sigma(x) = \sum c_n \binom{x}{n} = 0 \tag{7}$$

[1] Crelle, Bd. LXXIII, pag. 7 (1871).

in cui la caratteristica k di c_n sia negativa, a meno che tutte le c_n non siano nulle. Infatti, se ciò fosse, i punti $x = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ cadrebbero nel campo di convergenza di (7), e sarebbe pertanto $b_0 = b_1 = \cdots = b_n = 0$, da cui, per le (5), $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Può invece esistere uno sviluppo (7) in cui la caratteristica di c_n sia nulla. In tal caso, $x = 0$ cadendo al contorno del campo di convergenza di (7), può b_0 essere differente da zero, e siccome è ammissibile in (7) la presenza di un moltiplicatore arbitrario costante, si può supporre senza restrizione $b_0 = 1$, da cui $c_n = (-1)^n$.

Si giunge così alla serie

$$\sigma_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{x}{n}.$$

Ora questa rappresenta effettivamente lo zero per ogni $\mathrm{R}(x) > 0$: ciò risulta dalla nota formola [1]

$$\frac{1}{x-y} = -\frac{1}{y-1} - \frac{x-1}{(y-1)(y-2)} - \frac{(x-1)(x-2)}{(y-1)(y-2)(y-3)} - \cdots$$

valida per $\mathrm{R}(x) > \mathrm{R}(y)$; facendovi $y = 0$, se ne deduce

$$\sigma_0(x) = 1 - x + \binom{x}{2} - \binom{x}{3} + \cdots = 0.$$

Dato un numero positivo k, cerchiamo finalmente se possa esistere uno sviluppo dello zero dato da una serie (7) in cui k sia la caratteristica del sistema c_n dei coefficienti. Sia $m-1$ il massimo intero contenuto in k; i punti $x = 0, 1, \ldots m-1$ non apparterranno allora al campo di convergenza della (7), e quindi si potranno fissare arbitrariamente le $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$, mentre saranno nulle le b_n per $n \geq m$. Ne viene dalle (5),

$$c_n = (-1)^n \left(b_0 - n\, b_1 + \binom{n}{2} b_2 - \cdots + (-1)^{m-1} \binom{n}{m-1} b_{m-1}\right).$$

La serie (7) formata con questi coefficienti essendo una combinazione lineare a coefficienti costanti delle m serie

$$(8) \qquad \sigma_r(x) = \sum_{n=r}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{r} \binom{x}{n}, \qquad (r = 0, 1, \ldots m-1),$$

dove i coefficienti hanno per caratteristica r, ne viene che k deve essere uguale precisamente ad $m-1$, cioè ad un numero intero. Di più, si verifica che ognuna delle serie $\sigma_r(x)$ rappresenta effettivamente lo zero per $\mathrm{R}(x) > r$,

[1] V. p. es. Bendixson, Mem. cit., pag. 7.

poichè si ha immediatamente

$$\sigma_r(x) = (-1)^r \binom{x}{r} \sigma_0(x-r) \ (^1).$$

Esistono dunque, per ogni intero $m-1$, infinite serie (7) convergenti uniformemente ed assolutamente e rappresentanti lo zero per ogni $R(x) > m-1$; queste serie sono combinazioni lineari

$$b_0 \sigma_0(x) + b_1 \sigma_1(x) + \cdots + b_{m-1} \sigma_{m-1}(x), \tag{9}$$

a coefficienti $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ arbitrarî, delle serie (8).

Non può esistere uno sviluppo dello zero avente $R(x) > m-1$ per campo di convergenza che non sia della forma (9); abbiasi infatti un tale sviluppo

$$\bar{\sigma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \binom{x}{n};$$

deve essere intanto

$$c'_0 + n c'_1 + \binom{n}{2} c'_2 + \cdots + c'_n = 0 \quad \text{per } n \geq m;$$

posto poi

$$b'_0 = c'_0, \ b'_1 = c'_0 + c'_1, \ \ldots \ b'_{m-1} = c'_0 + m c'_1 + \binom{m}{2} c'_2 + \cdots + c'_{m-1},$$

si vede subito che la serie

$$b'_0 \sigma_0(x) - b'_1 \sigma_1(x) + \cdots + (-1)^{m-1} b'_{m-1} \sigma_{m-1}(x)$$

coincide colla $\bar{\sigma}(x)$ in tutti i suoi coefficienti.

Risulta da quanto precede che se una funzione $\psi(x)$ ammette uno sviluppo $s(x)$ in serie di fattoriali col campo di convergenza $R(x) > a$, essa non ne ammette altri convergenti in quel campo se è $a < 0$, mentre se è $a \geq 0$, essa ammette nel campo medesimo lo sviluppo più generale

$$s_1(x) = s(x) + b_0 \sigma_0(x) + b_1 \sigma_1(x) + \cdots b_{m-1} \sigma_{m-1}(x), \tag{10}$$

essendo $m-1$ il massimo intero contenuto in a; e se m' è un intero maggiore di $m-1$, ammette nel campo $R(x) > m'$ lo sviluppo

$$s_2(x) = s_1(x) + b_m \sigma_m(x) + b_{m+1} \sigma_{m+1}(x) + \cdots + b_{m'} \sigma_{m'}(x):$$

le $b_0, b_1, \ldots b_{m'}$ essendo costanti arbitrarie.

Infine, se una funzione uniforme o un ramo uniforme di funzione $\psi(x)$ ha significato per tutto il semipiano $R(x) \geq 0$, ma è rappresentata da una

(1) Per i punti $0, 1, \ldots r-1, r$ posti fuori o al contorno del campo di convergenza la $\sigma_r(x)$ ha rispettivamente i valori $0, 0, \ldots 0, (-1)^r$.

serie $s(x)$ di fattoriali solo nel campo $R(x) > a > 0$, si potrà, considerando la serie (10) $s_1(x)$ più generale che rappresenta la funzione stessa in quel campo, giovarsi dell'indeterminazione delle costanti $b_0, b_1, \dots b_{m-1}$, per fare in modo che i valori assunti da $s_1(x)$ nei punti $0, 1, \dots m-1$, sebbene fuori del campo di convergenza della $s_1(x)$ stessa, coincidano coi valori $\psi(0), \psi(1), \dots \psi(m-1)$ della funzione; basta evidentemente fare

$$b_r = (-1)^r (\psi(r) - s(r)) \ , \ r = 0, 1, 2, \dots m-1 .$$

4. Accanto ad una serie di fattoriali

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}$$

si consideri la serie di potenze $\varphi(t)$ di t^{-1}, formata colla stessa successione di coefficienti, in modo che a $t^{-(n+1)}$ sia dato il coefficiente di $\binom{x}{n}$. La successione c_n avendo per caratteristica un numero k che non è l'infinito positivo, la serie $\varphi(t)$ convergerà fuori di un cerchio $t = 0$ e di raggio generalmente uguale all'unità, ma che nel caso di $k = -\infty$ potrà anche essere minore. Diremo che la serie $\varphi(t)$ ammette la caratteristica k.

Fra le due serie $s(x)$, $\varphi(t)$, si viene in tal modo a stabilire una corrispondenza che si indicherà mediante la scrittura

$$s(x) = A(\varphi(t)) ,$$

dove il simbolo A sta a rappresentare un'operazione, manifestamente distributiva, che può venire applicata formalmente ad ogni serie di potenze di t^{-1}

$$\varphi(t) = \sum \frac{c_n}{t^{n+1}} ,$$

ed il cui risultato ha significato, se la caratteristica di c_n è k, per $R(x) > k$. Si aggiungerà l'ipotesi che l'operazione A dia come risultato lo zero qualora venga applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t.

Per l'operazione A si verificano immediatamente le due seguenti proprietà:

Se $\varphi'(t)$ è la derivata di $\varphi(t)$, si ha, per $R(x) > k+1$:

$$A(\varphi') = -x\, s(x-1) ; \tag{11}$$

si ha inoltre:

$$A((1+t)\varphi(t)) = s(x+1) . \tag{12}$$

5. Si tratta ora di dare un'espressione analitica effettiva per l'operazione A. Cominceremo coll'esaminare il caso di $k < -1$, in cui l'espressione di A si troverà senza difficoltà. Infatti, in questo caso, $\varphi(t)$ è assolu-

tamente ed uniformemente convergente lungo la circonferenza di centro $t = 0$ e di raggio 1; pertanto nell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)\,(1+t)^x\,dt\,,\quad \mathrm{R}(x) > 0\,, \tag{13}$$

esteso a questa circonferenza, l'integrazione si può eseguire termine a termine e come risultato si ottiene immediatamente la serie $s(x)$. Onde:

Per le serie $\varphi(t)$ aventi una caratteristica minore di -1, l'operazione $\mathrm{A}(\varphi)$ è, per $\mathrm{R}(x) > 0$, rappresentata dall'integrale definito (13).

La (13), applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t, dà zero come risultato.

Le serie $\varphi(t)$ per le quali si realizza in tal modo l'operazione A, formano un insieme lineare, cui si può aggiungere un numero arbitrario di potenze intere positive di t, ed anche una serie di potenze intere positive di t purchè convergente in un cerchio di centro $t = 0$ e di raggio maggiore d'uno. Per queste serie $\varphi(t)$, si verifica immediatamente che l'operazione A, espressa per $\mathrm{R}(x) > 0$ da

$$\mathrm{A}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)\,(1+t)^x\,dt\,, \tag{14}$$

soddisfa alle relazioni (11) e (12), la prima sotto la condizione $\mathrm{R}(x) > 1$, la seconda per $\mathrm{R}(x) > 0$.

6. Conviene ora ricercare se, anche per il caso in cui sia $k \geq -1$, sia possibile una rappresentazione analitica per l'operazione A. A tale uopo ci servirà un principio che, sebbene abbia già trovate numerose applicazioni in varî campi dell'analisi, non pare sia stato ancora enunciato nella sua generalità. Questo principio è il seguente:

Siano A, K due operazioni univocamente definite per gli elementi di un insieme C; sia G la trasformata di K mediante A. Se φ appartiene a C, e vi appartiene anche $\mathrm{K}(\varphi)$, si avrà per definizione

$$\mathrm{AK}(\varphi) = \mathrm{GA}(\varphi)\,,$$

onde

$$\mathrm{G}^{-1}\,\mathrm{AK} = \mathrm{A}\,. \tag{15}$$

Supponiamo ora che φ appartenga ad un campo C′ che comprende C, ma non necessariamente a C stesso; che K sia applicabile a φ, e che $\mathrm{K}(\varphi)$ appartenga a C. Sotto questa ipotesi, il primo membro della (15) si potrà assumere come definizione dell'operazione A per gli elementi dell'insieme più esteso C′, e si verificherà in generale che l'operazione A, così estesa, mantiene nel nuovo campo le sue proprietà formali.

Il principio ora enunciato è quello che viene applicato in sostanza nella continuazione analitica secondo il Weierstrass; nel classico teorema di Mittag-Leffler per la costruzione di una funzione uniforme con date singolarità; nella sommabilità delle serie secondo il Borel e nei varî tentativi fatti per l'interpretazione delle serie divergenti; nell'integrazione finita, data dal Guichard, di una funzione trascendente intera, ecc. Di questo principio ci gioveremo ora per ottenere l'espressione analitica dell'operazione A per tutte le serie $\varphi(t)$ appartenenti a caratteristica finita.

7. Da ogni serie di potenze di t^{-1}

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{n+1}}$$

si può dedurre la serie

$$K_m(\varphi) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)\, t^{n+1}};$$

questa deduzione è fatta mediante un'operazione distributiva che diremo K_m, la quale non è altro che la $D^{-m} \frac{1}{t^m} \varphi$, dove D è il simbolo di derivazione, quando si facciano nulle le costanti introdotte dall'integrazione. L'operazione K_m ha evidentemente la proprietà di diminuire di m unità la caratteristica cui appartiene φ; se φ ha la caratteristica k, $K_m(\varphi)$ avrà la caratteristica $k - m$.

Sia φ una tale serie di potenze che le sia applicabile l'operazione A definita al § 4; essa operazione sarà a fortiori applicabile alla serie $K_m(\varphi)$: si vuole vedere quale sia la trasformata di K_m mediante A. Usando, a questo uopo, i soliti simboli del calcolo delle differenze finite Δ e θ (1), si deduce dalla proprietà (12) della A, che se $A(\varphi) = s(x)$, sarà:

$$A(t\varphi(t)) = \Delta s(x), \quad A(t^{-1}\varphi(t)) = \Delta^{-1} s(x),$$

e dalla (11), che

$$AD^{-1}\varphi(t) = -\frac{1}{x+1}\theta s(x).$$

Ne viene

$$AD^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right) = \frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}\theta^m \Delta^{-m} s(x)$$

e quindi la trasformata G_m di K_m mediante A è

$$G_m = \frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}\theta^m \Delta^{-m},$$

(1) $\Delta\psi(x) = \psi(x+1) - \psi(x)$; $\theta\psi(x) = \psi(x+1)$; Δ^{-1} è l'operazione d'integrazione finita, o inversa di Δ.

onde

$$G_m^{-1} = (-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}.$$

Con ciò, la (15) ci dà

$$A = (-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m. \tag{16}$$

Ora, se $\varphi(t)$ è una serie di caratteristica minore di -1, le si può applicare, per $R(x) > 0$, l'operazione A rappresentata dall'integrale definito (14), e la (16) non è altro che una semplice identità. Invece, se $\varphi(t)$ ha una caratteristica $k \geq -1$, sia $m-2$ il massimo intero contenuto in k; la serie $K_m(\varphi)$ avrà per caratteristica un numero minore di -1 e le sarà quindi applicabile per $R(x) > 0$ l'operazione A sotto forma d'integrale definito, ottenendosi

$$AK_m\,\varphi = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \binom{x}{n};$$

da cui

$$(-1)^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n+m},$$

e infine, poichè $\Delta^m \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$:

$$(-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}.$$

L'operazione A definita dalla (16), cioè data, per $R(x) > m$, da

$$A(\varphi) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1) \int_{(1)} D^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right)(1+t)^{x-m}\,dt, \tag{17}$$

coincide dunque coll'operazione A definita in principio del § 4 per ogni serie $\varphi(t)$ avente caratteristica k finita, e quindi per ogni tale serie l'operazione A ivi definita ammette l'espressione analitica (17), dove m è il massimo intero contenuto in k aumentato di 2, se è $k \geq -1$, ed è zero se è $k < -1$.

In questo modo, ad ogni serie di fattoriali $s(x)$ della prima o della seconda classe corrisponde una funzione analitica $\varphi(t)$ regolare nell'intorno di $t = \infty$, che si costruisce immediatamente e mediante la quale si ha l'espressione analitica (17) della $s(x)$.

È facile vedere che a $\varphi(t) = (1+t)^{-m}$ per un intero positivo, la (17) fa corrispondere gli sviluppi dello zero già ottenuto per altra via al § 3.

Ad ogni proprietà di carattere lineare della $\varphi(t)$, le relazioni (11) e (12) cui soddisfa l'operazione A fanno corrispondere proprietà pure di carattere lineare per la $s(x)$. Di questa corrispondenza, della sua applicazione alle equazioni alle differenze, come pure del significato da attribuire alle serie $s(x)$ della terza classe, tratterò in una prossima Nota.

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota II di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

6. Facendo seguito alla Nota pubblicata col medesimo titolo nel fascicolo precedente dei Rendiconti di questa R. Accademia, osserveremo che *il calcolo della funzione* θ, *che ci dà, eguagliata ad una costante, tutte le traiettorie del punto, richiede,* come risulta dalle formole (8) e (9), *due sole quadrature.* È un risultato che dovevamo attenderci, appena si fosse osservato quali sono le superficie per cui il problema delle geodetiche equivale a quello delle traiettorie nel nostro movimento piano. L'elemento lineare di queste superficie è dato, come è noto, da

$$ds^2 = 2U\,(dx^2 + dy^2)\,;$$

calcolandone la curvatura totale K, si trova

$$K = -\frac{1}{2U}\,\Delta_2 \lg U = 0\,.$$

Il problema di movimento che abbiamo studiato nel piano equivale dunque alla ricerca delle geodetiche sopra una superficie sviluppabile: ora si sa appunto che sopra una tale superficie le geodetiche si ottengono con due quadrature.

A completare la risoluzione del problema meccanico manca il calcolo del tempo. A questo riguardo il metodo di Jacobi non si può più, nel caso attuale, applicare. Ed invero si dovrebbe, secondo Jacobi, calcolare la derivata di θ rispetto ad h (cost. delle forze vive) supposto di averla lasciata indeterminata in θ, ed il tempo verrebbe allora dato da

$$t_0 - t = \frac{\partial\theta}{\partial h}\,.$$

Ma siccome noi abbiamo posto fin dal principio $h = 0$, così in θ il parametro h non figura affatto. Ad ogni modo per avere il tempo non vi sarà che da eseguire una quadratura, dal momento che si conoscono tutte le traiettorie.

7. Applicheremo la teoria precedente allo studio del moto di un punto attratto (o respinto) da un centro fisso. Bisognerà anzitutto vedere quale sia la forma della funzione potenziale nel caso da noi considerato, in cui le traiettorie del punto si possono distribuire in infiniti sistemi ortogonali isotermi.

Poichè nell'ipotesi delle forze centrali la funzione potenziale dipende soltanto dalla distanza del punto mobile dal punto fisso, indicando con r

questa distanza, e posto

$$U = f(r),$$

occorrerà determinare $f(r)$ in modo che si abbia

$$\Delta_2 \lg f(r) = 0 ,$$

equazione che sviluppata diventa

$$\frac{d^2}{dr^2} \lg f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \lg f(r) = 0 .$$

Da questa con una prima integrazione otteniamo

$$\frac{d}{dr} \lg f(r) = \frac{c}{r} ,$$

ed integrando una seconda volta si ha

$$U = f(r) = Cr^c : \tag{12}$$

c e C sono due costanti arbitrarie.

La forza applicata sarebbe poi di intensità

$$F = Ccr^{c-1} .$$

Adunque: *nel moto di un punto soggetto a forze centrali si potranno distribuire le traiettorie in infiniti sistemi ortogonali* (*isotermi*) *quando la funzione potenziale* (*e quindi anche la forza applicata*) *è proporzionale ad una potenza, del resto qualunque, della distanza del punto mobile dal punto fisso.*

Troviamo ora l'equazione in termini finiti delle traiettorie. Si ha dalla (12):

$$\frac{\partial \lg U}{\partial x} = \frac{cx}{r^2} , \quad \frac{\partial \lg U}{\partial y} = \frac{cy}{r^2} ,$$

onde

$$\int \left(\frac{\partial \lg U}{\partial x} dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y} dx \right) = c \int \frac{x dy - y dx}{r^2} = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x} ,$$

e quindi le (8) diventano:

$$\theta_1 = K r^{k-1} \operatorname{sen} \left\{ a + (k-1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\}$$

$$\theta_2 = K r^{k-1} \cos \left\{ a + (k-1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\} ,$$

avendo posto

$$c = 2(k-1) \quad , \quad \sqrt{2C} = K . \tag{13}$$

Per ottenere θ converrà riferirsi a coordinate polari, assumendo

$$x = r\cos\omega\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\omega\,,$$

ed in conseguenza

$$dx = \cos\omega\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega\,, \qquad dy = \mathrm{sen}\,\omega\,dr + r\cos\omega\,d\omega\,;$$

per cui si avrà

$$\theta = \mathrm{K}\int r^{k-1}\{\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\,dr + r\cos(a+k\omega)\,d\omega\}\,. \tag{14}$$

8. Supponiamo dapprima $k \neq 0$. Eseguendo la quadratura nella (14) abbiamo

$$\theta = \frac{\mathrm{K}}{k}\,r^k\,\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\,;$$

l'equazione delle traiettorie $\theta =$ cost. diventa dunque

$$r^k\,\mathrm{sen}\,(a+k\omega) = b\,, \tag{15}$$

dove a e b sono costanti arbitrarie (cioè variano da una traiettoria all'altra), mentre k è fissa per tutte queste curve, potendo però avere un valore qualunque diverso da zero.

Accanto all'equazione (15) delle traiettorie scriviamo anche le espressioni della funzione potenziale e della forza, sostituendo, mediante le (13), la costante k a c:

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}\,r^{2(k-1)}\,, \qquad \mathrm{F} = 2\mathrm{C}\,(k-1)\,r^{2k-3}\,.$$

Per avere infine il tempo si ricorrerà all'integrale delle forze vive

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{U}\,,$$

che si scrive, nel caso attuale,

$$\frac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2} = 2\mathrm{C}\,r^{2(k-1)}\,.$$

Questa equazione si può trasformare, mediante la (15), in una relazione fra dt, $d\omega$, ω, oppure fra dt, dr, r, e così si ottiene il tempo con una sola quadratura dall'una o dall'altra delle seguenti due formole:

$$dt = \frac{m\,d\omega}{\{\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\}^{\frac{2}{k}}} = \frac{n r\,dr}{\sqrt{r^{2k} - b^2}}$$

dove m e n contengono la costante arbitraria b.

Suppongasi, ad es., $k = \frac{1}{2}$; la funzione potenziale diventa

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{C}}{r}\,,$$

e siamo nel caso dell'attrazione Newtoniana. Le traiettorie hanno per equazione

$$\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\,(a+\frac{\omega}{2}) = b\,,$$

ovvero

$$r = \frac{2\,b^2}{1-\cos\,(2\,a+\omega)}$$

e sono parabole col fuoco nel punto attraente, come dovevamo attenderci. Si ha pure il significato delle costanti a e b: quest'ultima determina il parametro delle varie parabole, mentre la prima definisce l'inclinazione del loro asse sull'asse polare.

Questo esempio ci ha così condotti a trovare un sistema ortogonale isotermo composto di sole parabole: esso è formato di tutte le parabole aventi lo stesso fuoco e lo stesso asse; quelle dell'una famiglia volgono tutte la concavità da una stessa parte, quelle dell'altra famiglia volgono la concavità dalla parte opposta. Facendo poi rotare tutto il sistema di un giro completo intorno al fuoco, si avranno tutte le traiettorie di un punto attratto (o respinto) da un punto fisso colla legge di Newton, quando la costante delle forze vive sia nulla.

9. Consideriamo da ultimo il caso in cui sia $k = 0$. La (14) allora diventa

$$\theta = \mathrm{K}\int\frac{1}{r}\,(\mathrm{sen}\,a\,dr + r\cos a\,d\omega)\,,$$

e integrando, si ha come equazione delle traiettorie $\theta = \mathrm{cost.}$:

$$\mathrm{sen}\,a\,\lg r + \omega\cos a = b\,,$$

ovvero

$$r = e^{\frac{b}{\mathrm{sen}\,a}}\,e^{-\omega\,\mathrm{cotg}\,a}\,.$$

Esse sono dunque spirali logaritmiche, e se ne ottiene un sistema isotermo tenendo fissa la costante a e facendo variare b. Le curve di questo sistema sono tutte eguali fra di loro, e quelle di una medesima famiglia non differiscono l'una dall'altra che per una rotazione intorno al polo. Fra gli altri sistemi isotermi si avrà pure quello formato dalle rette per il polo ($a = 0$) e dalle circonferenze col centro in questo medesimo punto $\left(a = \frac{\pi}{2}\right)$.

La funzione potenziale e la forza in questo movimento sono

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{C}}{r^2}\,,\quad \mathrm{F} = -\frac{2\mathrm{C}}{r^3}\,,$$

e il tempo è dato da

$$t - t_0 = \mathrm{M}\,(e^{-2\omega\cot g\,a} - e^{-2\omega_0\cot g\,a}) = \mathrm{N}\,(r^2 - r_0^2)\,,$$

dove s'è posto

$$\mathrm{M} = -\,\mathrm{N}\,e^{\frac{2b}{\mathrm{sen}\,a}}\,,\quad \mathrm{N} = \frac{1}{2\sqrt{2\mathrm{C}}\cos a}$$

e quindi M e N dipendono la prima dai parametri a e b, la seconda soltanto da a.

Geodesia. — *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite a Roma (S. Pietro in Vincoli), a M. Cimino ed a M. Peglia negli anni 1900 e 1901.* Nota del prof. V. Reina, presentata dal Socio A. Ferrero.

In alcune Note, inserite nei Rendiconti di questa Accademia, venne già reso conto delle operazioni astronomiche eseguite sui punti trigonometrici di primo ordine circostanti a Roma, allo scopo di determinarvi l'attrazione locale. I risultati conseguiti mi indussero ad estendere la ricerca ai punti della rete trigonometrica che cadono in prossimità del meridiano di Roma, per determinare il profilo del Geoide lungo il meridiano stesso.

La necessità di trasportare gli strumenti in punti sempre più lontani, e di difficile accesso, mi persuase a semplificare quanto più fosse possibile i procedimenti di osservazione, ed in particolare a ricercare se il metodo di determinazione della latitudine colla misura delle distanze zenitali meridiane di stelle fondamentali culminanti a Nord ed a Sud dello zenit, non potesse venire vantaggiosamente sostituito a quello precedentemente impiegato, delle osservazioni circummeridiane. Oltre ad una grande riduzione nei calcoli, ne sarebbe conseguita una notevole semplificazione nell'impianto della stazione, potendo sopprimere l'uso del cronografo.

Nell'ottobre e novembre 1900 tale metodo venne perciò assoggettato ad un esame dettagliato e minuto nella Specola di S. Pietro in Vincoli, risultandone in me la convinzione che esso sia da preferirsi a quello classico delle osservazioni circummeridiane, quando venga usato colle dovute avvertenze e cautele. In tale occasione venne anche effettuata una determinazione dell'azimut di M. Mario rispetto alla Specola.

Nel luglio ed agosto 1901 si eseguirono le due stazioni di M. Cimino e M. Peglia, che si presentano successivamente lungo il meridiano al nord di M. Soratte. A M. Peglia, come nuovo controllo del metodo dei passaggi meridiani, la latitudine venne determinata anche con osservazioni circummeridiane.

Nell'effettuare i calcoli relativi alle tre stazioni, alle posizioni apparenti delle stelle osservate vennero applicate le « correzioni provvisorie » di Auwers. I risultati di tali calcoli sono qui riassunti.

Stazione a Roma (S. Pietro in Vincoli).

Latitudine (risultante da 240 osservazioni meridiane di 40 stelle)

$$\varphi = 41°.\,53'.\,35''.37 \pm 0''\,08 \qquad \text{(Epoca 1900. 85)}$$

Azimut della direzione S. Pietro in Vincoli - **M.** Mario (media di 96 determinazioni)

$$A = 315°.\,20'.\,19''.42 \pm 0''.17 \qquad \text{(Epoca 1900. 82)}$$
$$dA = +\,0{,}33\,d\alpha^s - 0{,}01\,d\delta'' - 0{,}01\,d\varphi''$$

Stazione a M. Cimino.

Latitudine (risultante da 246 osservazioni meridiane di 50 stelle)

$$\varphi = 42°.\,24'.\,31''.09 \pm 0'',06 \qquad \text{(Epoca 1901. 54)}$$

Azimut della direzione M. Cimino - M. Soratte (media di 72 determinazioni)

$$A = 125°.\,53'.\,57''.49 \pm 0''.27 \qquad \text{(Epoca 1901. 53)}$$
$$dA = -\,0{,}02\,d\alpha^s - 1{,}18\,d\delta'' + 0{,}02\,d\varphi''$$

Stazione a M. Peglia.

Latitudine (risultante da 193 osservazioni meridiane di 60 stelle, e da 65 doppie osservazioni circummeridiane)

$$\varphi = 42°.\,49'.\,09''.36 \pm 0''.06 \qquad \text{(Epoca 1901. 58)}$$

Azimut della direzione M. Peglia - M. Cimino (media di 72 determinazioni)

$$A = 180°.\,51'.\,52''.36 \pm 0''.25 \qquad \text{(Epoca 1901. 57)}$$
$$dA = +\,0{,}06\,d\alpha^s - 1{,}08\,d\delta'' + 0{,}02\,d\varphi''$$

Se si applicano le correzioni di Auwers anche alle determinazioni astronomiche fatte negli anni precedenti (valendosi delle espressioni differenziali che, nelle precedenti pubblicazioni, vennero registrate di fianco ai singoli risultati), e si mettono a raffronto le coordinate astronomiche con quelle geodetiche, ordinando tutto per latitudini crescenti, si ottiene il seguente specchio:

STAZIONE	Latitudine astronomica φ_a	Latitudine geodetica φ_g	Azimut astronomico A_a	Azimut geodetico A_g	$\varphi_a - \varphi_g$	$A_a - A_g$	Epoca
M. Pisarello	41°.28′.36″.03	36″.24	15°.28′.57″.07	58″.96	—0″.21	—1″.89	1899.5
M. Cavo	41. 45. 03. 42	2. 12	. . . .	. .	+1. 30	. .	1898.5
Fiumicino	41. 46. 14. 59	12. 86	47. 29. 36. 67	38. 57	+1. 73	—1. 90	1898.6
S. Pietro in Vincoli.	41. 53. 35. 37	33. 39	315. 20. 19. 42	21. 11	+1. 98	—1. 69	1900.8
M. Mario	41. 55. 26. 25	24. 38	131. 50. 32. 29	33. 08	+1. 87	—0. 79	1898.3
M. Soratte	42. 14. 46. 38	40. 76	186. 36. 58. 56	61. 48	+5. 62	—2. 92	1900.5
M. Cimino	42. 24. 31. 09	24. 75	125. 53. 57. 49	59. 72	+6. 34	—2. 23	1901.5
M. Peglia	42. 49. 09. 36	2. 73	180. 51. 52. 36	54. 34	+6. 63	—1. 98	1901.6

Le coordinate geodetiche, calcolate dall' Istituto Geografico Militare, provengono dal segnale trigonometrico di Castanea. L'ellissoide di riferimento ha le dimensioni di Bessel.

Per rendere fra loro confrontabili le deviazioni in latitudine ed azimut determinate in corrispondenza ad epoche diverse, converrebbe ancora ridurle alla posizione media del Polo. Ma ciò non si può fare per le determinazioni posteriori alla fine del 1899, ancora non essendo stato pubblicato dal *Centralbureau der Internationalen Erdmessung* il relativo rapporto cogli elementi di riduzione. Il precedente specchio basta però per mostrare qual è l'andamento generale della verticale. Mentre la deviazione in azimut si conserva pressochè costante, la deviazione in latitudine va aumentando, procedendo verso il Nord, rivelando una progressiva depressione del Geoide al di sotto dell'ellissoide di riferimento.

È mia intenzione, nella prossima stagione estiva, spingendomi ancora al Nord, di eseguire le stazioni di Alta S. Egidio (Toscana), M. Carpegna (Marche) e Bertinoro (Romagna), e di pervenire quindi alla valle del Po, superando l'Appennino.

La redazione di un lavoro completo e dettagliato, che renda conto del complesso delle operazioni eseguite lungo il meridiano di Roma, si rimetterà all'epoca in cui saranno compiuti i calcoli relativi alle nuove stazioni.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota II del dott. M. CONTARINI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

In una Nota precedente (1) ho stabilita l'equazione simbolica dei lavori virtuali relativa a una catena di corpi rigidi, fissati, almeno per un punto, il primo al terreno e gli altri ciascuno al precedente: ora, applicando i risultati ottenuti, mi propongo di studiare il caso particolare di due corpi soli, cercando specialmente di trarre quelle conseguenze che possono avere appli-

(1) V. seduta del 4 maggio, pag. 380.

cazione nella teoria matematica degli strumenti sismici. — Per ciò che riguarda il significato delle lettere e dei simboli che verranno usati in appresso, mi riferisco senz'altro al lavoro testè citato.

6. Dalla equazione (8) si ricava per il caso attuale l'equazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{r} (\mathrm{H}_r\, \delta\lambda_r + \mathrm{K}_r\, \delta\mu_r + \mathrm{L}_r\, \delta\nu_r) = 0\,, \tag{9}$$

essendo (vedi le equazioni (E) (E') a pag. 385).

$$\text{(G)}\quad \begin{cases} \mathrm{H}_1 = \sum\limits_{\mathrm{C}_1 i} (\eta_{1i} - \eta_{10})(Z_{1i} - m_{1i}\zeta''_{1i}) + (\eta_{11} - \eta_{10}) \sum\limits_{\mathrm{C}_2 i} (Z_{2i} - m_{2i}\zeta''_{2i}) \\ \quad - \sum\limits_{\mathrm{C}_1 i} (\zeta_{1i} - \zeta_{10})(H_{1i} - m_{1i}\eta''_{1i}) - (\zeta_{11} - \zeta_{10}) \sum\limits_{\mathrm{C}_2 i} (H_{2i} - m_{2i}\eta''_{2i}),\ \text{etc.} \\ \mathrm{H}_2 = \sum\limits_{\mathrm{C}_2 i} (\eta_{2i} - \eta_{20})(Z_{2i} - m_{2i}\zeta''_{2i}) - \sum\limits_{\mathrm{C}_2 i} (\zeta_{2i} - \zeta_{20})(H_{2i} - m_{2i}\eta''_{2i}),\ \text{etc.} \end{cases}$$

Come fu già osservato, queste equazioni valgono qualunque siano le forze, qualunque sia l'ordine di grandezza delle traslazioni ξ, η, ζ, e comunque siano orientati i varî sistemi di assi, purchè tutti rispettivamente paralleli nel caso di rotazioni nulle.

Supponiamo ora:

1° che nei punti $\mathrm{P}_{r1}(a_r\, b_r\, c_r)$ siano applicate delle forze *infinitesime* di componenti Ξ_{r1}, H_{r1}, Z_{r1}; nei baricentri $\mathrm{P}_{r2}(x_{r2}, y_{r2}, z_{r2})$ delle forze *finite* di componenti Ξ_{r2}, H_{r2}, Z_{r2}; e intorno alle origini P_{r0} due coppie di momento infinitesimo, alle quali potremo sempre sostituire due sistemi di forze eguali ed opposte, applicate nei punti opposti $\pm x_{r3}$, $\pm y_{r3}$, $\pm z_{r3}$, di componenti $\pm \Xi_{r3}$, $\pm H_{r3}$, $\pm Z_{r3}$;

2° che le accelerazioni traslatorie ξ'', η'', ζ'' siano dell'ordine di grandezza delle rotazioni, cioè infinitesime;

3° che gli assi fissi nei corpi siano rispettivamente paralleli ai loro assi principali d'inerzia, e di più uno d'essi passi per il rispettivo baricentro: cosicchè valgono le identità

$$\sum_{\mathrm{C}_r i} m_{ri}\, x_{ri}\, y_{ri} = 0\,,\ \text{etc.} \tag{H}$$

Allora, ricordando le (1'), (1''), (1'''), facendo le posizioni

$$\mathrm{M}_r^{(x)} = \sum_{\mathrm{C}_r i} m_{ri}\, (y_{ri}^2 + z_{ri}^2),\ \text{etc.}, \tag{K}$$

e trascurando tutti i termini di secondo grado nelle quantità infinitesime, le (G) dànno:

$$
\begin{aligned}
H_1 = {} & b_1 (Z_{11} + Z_{21} + Z_{22} - \pi_1 H_{22}) - c_1 (H_{11} + H_{21} + H_{22} + \pi_1 Z_{22}) \\
& + Z_{12} (y_{12} + \varrho_1 x_{12} - \pi_1 z_{12}) - H_{12} (z_{12} + \pi_1 y_{12} - \chi_1 x_{12}) \\
& + a_1 (\varrho_1 Z_{22} + \chi_1 H_{22}) + 2 Z_{13} y_{13} - 2 H_{13} z_{13} - \pi_1'' M_1^{(x)} \\
& + M_2 (\eta'' + \varrho_1'' a_1 - \pi_1'' c_1 + \varrho_2'' x_{22} - \pi_2'' z_{22}) + \eta'' z_{12} M_1 \\
& - M_2 (\zeta'' - \chi_1'' a_1 + \pi_1'' b_1 - \chi_2'' x_{22} + \pi_2'' y_{22}) - \zeta'' y_{12} M_1 , \text{ etc.} \\
H_2 = {} & Z_{21} b_2 - H_{21} c_2 + Z_{22} (y_{22} + \varrho_2 x_{22} - \pi_2 z_{22}) - H_{22} (z_{22} + \pi_2 y_{22} - \chi_2 x_{22}) \\
& + 2 Z_{23} y_{23} - 2 H_{23} z_{23} \\
& - \pi_2'' M_2^{(x)} + M_2 [z_{22} (\eta'' + \varrho_1'' a_1 - \pi_1'' c_1) - y_{22} (\zeta'' + \pi_1'' b_1 - \chi_1'' a_1)] \text{ etc.}
\end{aligned}
\qquad (G_1)
$$

7. Si tratti ora di due pendoli sferici, cosicchè il sistema ammette 6 gradi di libertà. Questi siano sospesi in modo che gli assi delle z_r passino per i punti P_{r1} e per i baricentri P_{r2}; cioè sia

$$
\left.
\begin{aligned}
a_r &= b_r = 0 ; \\
x_{r2} &= y_{r2} = 0 ; \quad z_{r2} = l_r
\end{aligned}
\right\} \quad (r = 1, 2).
$$

Le forze applicate nei baricentri siano appunto i pesi dei due pendoli, cosicchè le loro componenti secondo gli assi fissi sono:

$$
\Xi_{r2} = H_{r2} = 0 , \quad Z_{r2} = M_r g ,
$$

supponendo l'asse delle ζ diretto secondo la gravità.

Le coppie intorno ai punti di sospensione agiscano costantemente in un piano normale agli assi delle z_r, cosicchè si possono sostituire a ciascuna d'esse due forze d'intensità $\pm \tau_r$ parallele agli assi delle x_r e applicate in due punti dell'asse delle y_r distanti dall'origine per l'unità di lunghezza. Notando che queste forze sono infinitesime e quindi differiscono per quantità trascurabili dalle loro componenti secondo gli assi fissi, queste ipotesi si esprimono mediante le identità:

$$
\begin{aligned}
x_{r3} = z_{r3} = 0 \quad , \quad & y_{r3} = \pm 1 \\
\Xi_{r3} = \pm \tau_r \quad , \quad & H_{r3} = Z_{r3} = 0 .
\end{aligned}
$$

Poniamo infine per semplicità

$$
\Xi_{r1} = f_r \quad , \quad H_{r1} = \varphi_r .
$$

Allora, ferme restando tutte le ipotesi restrittive fin qui enunciate, dalle (G_1) si arriva alle

$$
(G_2) \quad \left\{
\begin{aligned}
- H_1 = {} & - \eta'' (M_1 l_1 + M_2 c_1) + \pi_1'' (M_2 c_1^2 + M_1^{(x)}) + \pi_2'' M_2 l_2 c_1 + \\
& + \pi_1 g (M_2 c_1 + M_1 l_1) + c_1 (\varphi_1 + \varphi_2) \\
- K_1 = {} & + \xi'' (M_1 l_1 + M_2 c_1) + \chi_1'' (M_2 c_1^2 + M_1^{(y)}) + \chi_2'' M_2 l_2 c_1 + \\
& + \chi_1 g (M_2 c_1 + M_1 l_1) - c_1 (f_1 + f_2) \\
- L_1 = {} & \varrho_1'' M_1^{(z)} + 2 \tau_1
\end{aligned}
\right.
$$

$$(G_2')\quad \begin{cases} -H_2 = -\eta'' M_2 l_2 + \pi_1'' M_2 l_2 c_1 + \pi_2'' M_2^{(\alpha)} + \pi_2 g M_2 l_2 + c_2 \varphi_2 \\ -K_2 = +\xi'' M_2 l_2 + \chi_1'' M_2 l_2 c_1 + \chi_2'' M_2^{(y)} + \chi_2 g M_2 l_2 - c_2 f_2 \\ -L_2 = \varrho_2'' M_2^{(z)} + 2\tau_2 \end{cases}$$

8. Queste equazioni valgono qualunque siano le masse e le dimensioni dei due corpi. Supponiamo ora che il primo si riduca a un filo flessibile e inestendibile, di massa trascurabile rispetto a quella del secondo, di lunghezza c_1 e con gli estremi nei punti P_{10}, P_{11}. Tali ipotesi si esprimono sopprimendo nelle (G_2) tutti i termini contenenti la massa o i momenti d'inerzia del corpo C_1. Così appunto facendo, osservando che la natura dei legami consente il massimo grado di libertà, sostituendo a π_r, χ_r, ϱ_r e alle loro derivate i valori ricavati dalle (F), e separando i termini che non dipendono esplicitamente dalle incognite mediante le posizioni:

$$(L)\quad \begin{cases} c_1 (\mu_1'' M_2 c_1 + \mu_2'' M_2 l_2 + \mu_1 g M_2 - f_1 - f_2) = c_1 \Phi_1 \\ c_1 (\lambda_1'' M_2 c_1 + \lambda_2'' M_2 l_2 + \lambda_1 g M_2 + \varphi_1 + \varphi_2) = c_1 \Psi_1 \end{cases}$$

$$(L')\quad \begin{cases} \mu_1'' M_2 l_2 c_1 + \mu_2'' M_2^{(y)} + \mu_2 M_2 l_2 g - f_2 c_2 = l_2 \Phi_2 \\ \lambda_1'' M_2 l_2 c_1 + \lambda_2'' M_2^{(\alpha)} + \lambda_1 M_2 l_2 g + \varphi_2 c_2 = l_2 \Psi_2 \\ \nu_2'' M_2^{(z)} + 2\tau_2 = X_2 , \end{cases}$$

si arriva infine alle equazioni effettive del moto:

$$(10)\quad \begin{cases} \xi'' M_2 + \beta'' M_2 (c_1 + l_2) + \beta g M_2 + \Phi_1 = 0 \\ -\eta'' M_2 + \alpha'' M_2 (c_1 + l_2) + \alpha g M_2 + \Psi_1 = 0 \end{cases} (1)$$

$$(10')\quad \begin{cases} \xi'' M_2 + \beta'' \left(M_2 c_1 + \dfrac{M_2^{(y)}}{l_2} \right) + \beta g M_2 + \Phi_2 = 0 \\ -\eta'' M_2 + \alpha'' \left(M_2 c_1 + \dfrac{M_2^{(\alpha)}}{l_2} \right) + \alpha g M_2 + \Psi_2 = 0 \\ \gamma'' M_2^{(z)} + X_2 = 0 . \end{cases}$$

Se in queste equazioni si suppongono note tutte le costanti e si possono determinare in funzione del tempo tutte le variabili (forze — rotazioni apparenti) che compariscono nelle funzioni $\Phi_1, \ldots, X_2$, è facilissimo procedere all'integrazione del sistema. Basta infatti seguire il metodo già da me esposto in un'altra pubblicazione (2), sul quale, appunto per ciò, non mi dilungo.

(1) Come si vede, è omessa a bella posta l'equazione $L_1 = 0$, relativa alla rotazione del primo corpo intorno al proprio asse verticale: infatti tale equazione non ha più significato per un corpo filiforme, quale è appunto C_1.

(2) *Sulla determinazione dei moti sismici.* Nota II; Rendic. d. A. d. Lincei, 17 marzo 1901, pag. 205.

9. Alle condizioni teoriche successivamente enunciate fin qui, si approssimerebbero con sufficiente esattezza gli ordinarî pendoli verticali usati in sismografia, purchè vi si apportassero le seguenti modificazioni:

1° un filo di sospensione abbastanza lungo, rispetto al suo diametro, per poter trascurare la curvatura ch' esso subisce, flettendosi, verso le estremità;

2° una massa pendolare costituente un corpo praticamente rigido [1];

3° un sistema di leve, analoghe a quelle applicate alla massa pendolare, che decomponga, amplifichi e registri anche il movimento dell' estremità inferiore del filo di sospensione.

Un tale strumento infatti, oltre alle condizioni geometriche e cinematiche, può soddisfare anche alle restrizioni imposte alle forze nei nn. 6 e 7, perchè: 1° nell' estremità inferiore del filo (P_{11}) e in un punto P_{21} della massa rigida agiscono le resistenze dovute alle leve scriventi, all' aria e alla *flessione* del filo di sospensione, resistenze piccolissime rispetto al peso dello strumento; 2° nel baricentro (P_{22}) della massa pendolare agisce il suo peso gM_2; 3° intorno all' asse delle z_2 agisce il momento di *torsione* del filo e gli attriti di varia natura che si oppongono alla rotazione del pendolo, tutti piccolissimi rispetto alla gravità.

Dunque il moto dello strumento in occasione di microsismi è retto dalle equazioni (10) e (10′).

Ma si può dimostrare anche che il suo moto apparente permette di risalire alle componenti del moto sismico, cioè che le equazioni (10) e (10′) si possono effettivamente integrare. A tal fine si osservi che le costanti relative alle dimensioni e alla massa dello strumento sono suscettibili d' una determinazione diretta esatta quanto si vuole; e così pure le rotazioni apparenti intorno agli assi orizzontali, le quali sono legate alle traslazioni apparenti (X_1 Y_1) (X_2 Y_2) dei punti P_{11}, P_{21} dalle relazioni

$$(M) \qquad \begin{aligned} c_1\lambda_1 &= -Y_1 \quad , \quad c_1\mu_1 = +X_1 ; \\ c_2\lambda_2 &= -(Y_2 - Y_1) \quad , \quad c_2\mu_2 = +(X_2 - X_1). \end{aligned}$$

Restano a determinare la forma e il valore delle forze f_r, φ_r.

Mi pare molto verosimile l' ipotesi che queste forze si oppongano alle traslazioni *apparenti* dei rispettivi punti d' applicazione e siano nulle quando lo strumento si trova in quiete e in equilibrio: ipotesi espressa dalle egua-

[1] Insisto su questa condizione, perchè gli attuali *pendoli verticali* se ne scostano moltissimo: costituiti, come sono, d' un' asta metallica di sezione piccolissima rispetto alla lunghezza, gravata in basso da una massa enorme, realizzano un sistema eminentemente elastico; cosicchè un urto anche leggero provoca considerevoli oscillazioni trasversali dell' asta. Anche quelli a *sospensione trifilare* hanno l' identico difetto: e le perturbazioni che il moto dei pendoli subisce per tali vibrazioni trasversali rende assolutamente inapplicabili, nella massima parte dei casi, le conclusioni matematiche alle quali sono arrivato.

glianze

$$(N) \qquad f_r = -(p_r X_r + p'_r X'_r) \quad ; \quad \varphi_r = -(q_r Y_r + q'_r Y'_r),$$

con p_r, p'_r, q_r, q'_r costanti (1).

In conseguenza delle (L) (L') (M) (N) si ricava:

$$(P) \qquad \begin{cases} \Phi_1 = X_1 p_1 + X'_1 p'_1 + X_2 p_2 + X'_2 p_2 + F_1, \text{ etc.} \\ \Phi_2 = \qquad\qquad X_2 \dfrac{p_2 c_2}{l_2} + X'_2 p'_2 \dfrac{c_2}{l_2} + F_2, \text{ etc.,} \end{cases}$$

essendo F_1 e F_2 funzioni completamente note del tempo.

Ciò posto si possono determinare sperimentalmente i valori delle p, q, con un procedimento analogo a quello seguito nella Nota testè citata (pag. 207). Infatti se allo strumento si dà un urto quando il terreno è in quiete, le equazioni che reggono il suo moto si riducono a

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad \Psi_1 = \Psi_2 = 0 \quad X_2 = 0.$$

Se per due istanti diversi si possono ottenere dai diagrammi del movimento due sistemi diversi di valori per X_2, X'_2, F_2, questi valori, sostituiti nella equazione $\Phi_2 = 0$, daranno due equazioni lineari non omogenee rispetto alle incognite p_2 e p'_2 (V. le posizioni (P)) e quindi permetteranno in generale (2) di determinare queste incognite. Cercati poi per altri due istanti qualunque i valori di X_1, X_1', F_1 e sostituitili nella $\Phi_1 = 0$, si potranno determinare le incognite p_1 e p'_1. Con metodo identico si procederà per le incognite q.

E così un solo strumento permette di determinare *quattro* delle sei incognite sismiche. Per le altre due componenti, *vorticosa* e *sussultoria*, si potrebbe ricorrere a uno strumento analogo al microsismografo « Vicentini » per

(1) Infatti la forza f_r, opponendosi alle traslazioni del punto P_{r1} parallele all'asse delle X, sarà funzione di X_r e di X'_r: sviluppando tale funzione in serie di potenze, omettendo i termini di grado superiore al primo nelle variabili infinitesime X_r, X'_r, e osservando che deve mancare il termine costante, perchè f_r si suppone nulla per $X_r = X'_r = 0$, si trova appunto lo sviluppo (N).

(2) Per evitare il dubbio che il determinante dei coefficienti possa essere nullo, si può scegliere un istante in cui X_2 è *massimo*, e un istante in cui X_2 si annulla, *cambiando segno*: se $F_2^{(1)}$, $F_2^{(2)}$ sono i corrispondenti valori di F_2, le equazioni da risolvere diventano:

$$X_2 p_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2^{(1)} = 0 \quad ; \quad X'_2 p'_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2^{(2)} = 0;$$

perchè nel primo istante X'_2 è nullo e nel secondo invece è necessariamente diverso da zero.

la componente verticale (1), debitamente modificato; ma su questo non insisto, riservandomi di farlo in un altro lavoro.

10. Per esaurire la questione propostami, supporrò infine che il filo abbia una lunghezza trascurabile rispetto alle dimensioni della massa pendolare, e quindi che si sopprima il sistema di leve destinato a registrare il moto della sua estremità inferiore. Allora vengono a mancare i due gradi di libertà rappresentati dalle equazioni (10), e il moto del pendolo è retto dalle equazioni (10′). Considerando soltanto la prima di queste equazioni, ricordando la prima delle (L′) e delle (N) e l'ultima delle (M), e infine che è $X_1 = 0$, si ricava l'equazione:

$$\xi'' M_2 + \beta''_2 \frac{M_2^{(y)}}{l_2} + \beta_2 g M_2 + \left(\mu_2'' \frac{M_2^{(y)}}{l_2} + p_2' c_2 \mu_2' + \mu_2 [M_2 g + p_2 c_2] \right) = 0 ,$$

che differisce per termini trascurabili dalla prima delle equazioni relative al pendolo verticale « Vicentini » (2).

Eguale ragionamento si può ripetere per le rimanenti equazioni (10′): e così resta dimostrato l'asserto premesso alla trattazione del problema generale.

Patologia vegetale. — *Intorno ad un caso speciale di deperimento primaverile del frumento ed ai mezzi di ovviarvi.* Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

Chimica. — *Riduzione dell'Artemisina con cloruro stannoso.* Nota di P. Bertolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) Vicentini e Pacher, *Microsismografo per la componente verticale.* Atti R. Ist. Ven. 1898-99, pagg. 65-89; opp. Bollettino della Soc. Sism. it., vol. V, pagg. 33-58.

(2) V. equazione (7) della mia Nota *Sulla determinazione dei moti sismici,* seduta del 3 marzo 1901, pag. 148.

I termini differenti sono $+ a \xi' + a l \beta'$, che allora apparivano nelle equazioni citate, perchè m'era sfuggita l'osservazione che l'aria si oppone al movimento *relativo,* non già al movimento *assoluto* del pendolo. Del resto il valore della costante a è tanto piccolo che la differenza non ha nessuna importanza pratica.

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sulla Limnaea stagnalis.* Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

1. *Metodo e tecnica.* — Ho fatto sulla *Limnaea stagnalis* ricerche affatto simili, per il loro scopo, a quelle che ho fatto sugli Infusorii, e che ho riferito in una Nota precedente. Rimando dunque a quella, per il concetto informatore delle mie esperienze (pag. 340). Naturalmente qua la tecnica è stata diversa; mentre quelle erano ricerche microscopiche, queste sono ricerche fatte colla bilancia. Si trattava anche qui di sottoporre gli animali a soluzioni variamente concentrate di NaCl, e di dedurre i fenomeni osmotici che ne erano conseguenza, dalle variazioni di peso. Non mi nascondo le gravi difficoltà di questo metodo; anzi dopo la fiera critica fatta sulle ricerche del sig. Quinton sopra le Aplisie (1), potrà meravigliare che io stesso me ne sia servito. Ma, in primo luogo, mi sono sforzato in varî modi di evitare le cause d'errore, in cui quell'Autore era caduto; e poi gli intendimenti della mia ricerca sono diversi da quelli del Quinton. Io voglio sopratutto stabilire i diversi momenti della reazione osmotica, come ho fatto per gli Infusorii, e parto dal concetto della semipermeabilità (o quasi) delle membrane separanti, nella *Limnaea*, l'ambiente interno dall'esterno, come già quasi dimostrato. Nel nostro testè, citato lavoro, è dimostrata tale semipermeabilità per la membrana gastrica dell'*Aplysia*, proprietà che quasi logicamente deve estendersi anche alle altre membrane (pelle, branchia); ora, giacchè questa caratteristica è fondamentale, è di straordinaria importanza nelle condizioni biologiche dell'animale, io non posso *a priori* supporre che in un animale così vicino nella scala zoologica, come è la *Limnaea* rispetto all'*Aplysia*, e così simile per le condizioni di vita e per le proprietà del suo canale digerente, non posso supporre dico che le cose siano in modo diverso. Basteranno dunque come prova anche esperienze fatte sull'animale *in toto*, alla cui interpretazione, se non vi fosse altro, una critica volontariamente troppo severa potrebbe muovere obbiezioni. Del resto, l'esame delle esperienze fatte e della relativa discussione, potrà convincere il lettore, che questa critica io non me la sono risparmiata, nei limiti del giusto.

Gli animali, presi da un bacino di acqua stagnante, eran portati a vivere nell'acqua potabile, come gli Infusorii, e sempre abbondantemente alimentati con Lemne e Conferve, salvo casi speciali che verranno ricordati. Dopo che erano adattati a queste condizioni di vita, ne venivano presi alcuni e posti

(1) Bottazzi e Enriques, *Ueber die Bedingungen des osmotischen Gleichgewichts* ecc. A. f. Anat. Physiol. Abt. Supplementband, pag. 109-170, 1901.

in una quantità nota di acqua potabile, con un poco di erbe o senza, a seconda dei casi. La quantità di liquido era sempre tale che gli animali vi potessero vivere bene, come lo dimostrava il fatto che, se non si peggioravano volontariamente le condizioni di vita, anche senza cambiare il liquido, essi duravano a vivere normalmente a lungo. Ma nelle esperienze il liquido veniva sempre cambiato ogni due o tre giorni. All'acqua aggiungevo del sale (NaCl), secondo che è indicato nelle singole esperienze. Pesavo le Limnee al principio dell'esperienza, e poi più volte nel corso di molti giorni, man mano che aggiungevo il sale, e a distanza di tempo variabile, dal momento dell'aumento di concentrazione. Nello stesso tempo, facevo spesso esperienze di confronto con animali tenuti in una stessa quantità d'acqua potabile, conservata fresca.

Come si fa a pesare una *Limnaea?* Questo è il punto più difficile. Quando si solleva dall'acqua, anche se era distesa, essa si retrae dentro al guscio, cosicchè la maggior parte della superficie del corpo, formata appunto dal guscio, è facilmente asciugabile con un cencio e della carta bibula. Ed anche il piede si può asciugare delicatamente con carta bibula, senza che si possa avere una notevole causa di errore nell'esattezza di questa operazione. Ma quella che invece può influire molto sul peso, è l'acqua contenuta tra il guscio e il corpo dell'animale, acqua che molto facilmente può uscire dalle aperture che vi sono tra il mantello e l'orlo del guscio. Se però si ha cura, nell'asciugare l'animale, di non farlo contrarre, di non stimolarlo con troppa violenza nel mentre che si asciuga il piede, quell'acqua non esce; e lo dimostrano esperienze in cui *Limnaeae* viventi nell'acqua potabile, pesate a poca distanza di tempo dopo successive riimmersioni nel liquido, davano resultato sufficientemente uguale e costante. Questo quanto alla tecnica della pesatura. Ma la critica si può rivolgere con altri argomenti, contro questo metodo, giacchè viene il dubbio che quest'acqua interposta tra il guscio e il corpo possa variare nella sua quantità, quando si variano le condizioni di vita dell'animale. Si interpreterebbero allora come variazioni di peso dell'ambiente interno dell'animale, e — quindi — come passaggio di acqua o di sale dentro o fuori, variazioni che sarebbero invece dell'ambiente esterno e completamente prive di interesse. Per evitare questa causa d'errore, ho fatto alcune esperienze in cui l'animale, prima di pesarlo, veniva stimolato meccanicamente fintantochè non facesse più uscire acqua. Ciò si può fare con notevole esattezza; dapprima l'acqua viene espulsa in abbondanza, poi sempre in minor quantità, e si giunge a un punto in cui, per quanto si stimoli, non si riesce di nuovo a far bagnare la superficie del piede dell'animale contratto. In queste condizioni la superficie interna del guscio ed esterna del corpo, in esso contenuto, sono ancora bagnate, ma sempre nello stesso modo, e le differenze di peso che si riscontrano in momenti diversi sono necessariamente dovute soltanto realmente al corpo dell'animale. Dimostrano l'esattezza di questo metodo speciali esperienze di confronto..

Ma anche l'acqua contenuta nell'interno del canale digerente può variare ed influire sui resultati. Per togliere questa causa d'errore, ho più volte ed in varî momenti aperto una *Limnaea*, pesato il canale digerente pieno, e poi vuotato; ho valutato così, approssimativamente, la quantità d'acqua contenutavi, che non ha mai superato i 5 cgr.; ed io non tengo conto, nelle mie esperienze, di variazioni di peso dell'animale inferiori a 1 dgr. Non si ha dunque qui una causa d'errore.

Le tabelle riportate nelle varie esperienze sono fatte in questo modo. Nella seconda colonna è scritta la concentrazione alla quale è portato il liquido mediante l'aggiunta del sale, in gr. NaCl $^0/_{00}$. Nella terza il peso degli animali in esperienza. Esso corrisponde al giorno e all'ora segnata sulla stessa linea nella prima colonna. In generale, dopo aver pesato gli animali, aggiungevo del sale; per questo alla stessa indicazione di giorno ed ora corrisponde una pesata ed un aumento di concentrazione: ma il valore della concentrazione a cui il liquido è portato, è segnato una linea sotto a quella della pesata, il che significa che prima è stata fatta la pesata, e poi aggiunto il sale. La concentrazione rimane sempre la stessa, finchè non si incontra un'altra indicazione, procedendo in basso nella stessa colonna. Quando (e ciò avviene al principio delle esperienze) il numero della concentrazione è segnato nella stessa linea della pesata, allora esso indica la concentrazione del liquido quale era al momento in cui si è fatta la pesata, quale era già, insomma. Nella quarta colonna sono dati i pesi degli animali senza guscio. I gusci venivano pesati separatamente alla fine delle esperienze, dopo che gli animali erano morti od uccisi, ed il loro peso è stato sottratto dai pesi degli animali *in toto*, perchè evidentemente il guscio non prende parte alle variazioni di peso riscontrate. Le differenze tra i varî pesi, segnate nella penultima colonna, sono calcolate in generale tra ciascun peso e il precedente. Ma qualche volta è saltato qualche numero, e data la differenza tra due numeri non successivi. Ciò è riconoscibile nelle tabelle, senza bisogno di speciali avvertenze. Si veda p. es. a proposito dell'esperienza XI. Il 2° numero della colonna delle differenze (— 0,56) esprime la differenza tra 3,81 e 4,37, essendo saltato il 5,12. Si riconosce questo per il fatto che nella linea del 5,12 non vi è nessun numero nella colonna delle differenze.

2. *Riassunto delle esperienze.*

Esperienza I. — 3 *Limnaeae stagnales* messe in esperienza col cibo, in 500 cm. c. di acqua potabile.

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
2 Maggio ore 12	0	16,72	13,86	
	0,5			
3 » » 14		16,84	13,97	+ 0,12
	1			
4 » » 14		17,05	14,18	+ 0,21
	1,5			
5 » » 12		17,22	14,35	+ 0,17
	2			
6 » » 11		15,89	13,02	— 1,33
7 » » 14		16,89	14,02	+ 1
8 » » 11		16,99	14,12	+ 0,1
8 » » 14		16,78	13,91	— 0,21
9 » » 16		17,62	14,75	+ 0,84
	4			
» » » 17		16,99	14,12	— 0,63
10 » » 9		17,04	14,17	+ 0,05
Una *Limnaea* è vicina a morire e viene tolta.				

Esperienza II. — Delle altre due, una pesa:

10 Maggio ore 10	4	3,82	3,01	
11 » » 10		3,62	2,81	— 0,20
» » » 14		3,54	2,73	— 0,08
13 » » 9		3,76	2,95	+ 0,22
	10			
» » » 14		3,60	2,79	— 0,16
14 » » 10		3,45	2,64	— 0,15
15 » » 10	Molto contratta è vicino a morire.			

Esperienza III. — La 3ª *Limnaea* pesa:

10 Maggio ore 14	4	6,14	5,28	
	0 (a digiuno)			
» » » 14,30′		6,24	5,38	
» » » 15,30′		6,39	5,53	
» » » 16,30′		6,36	5,50	
11 » » 10		6,63	5,77	+ 0,49
13 » » 9		6,14	5,28	— 0,49

Esperienza IV. — 5 *Limnaeae stagnales (1, 2, 3, 4, 5)* in 500 cm. c. di acqua potabile col cibo.

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
17 Maggio	0	19,78		
	0,5			
18 »		19,78		0,00
	1			
19 » ore 9		20,37		+ 0,59
	2			
» » » 16		20,06		— 0,31
20 » » 9		20,60		+ 0,54
	3			
21 » » 9		20,65		+ 0,05
	4			
23 » » 13		21,23		+ 0,58
	5			
24 » » 9		21,07		— 0,16
25 » » 14		21,00		— 0,07
26 » » 16		20,87		— 0,13
27 » » 10		20,83		— 0,04

Esperienza V. — Di queste 5, la 1ª separatamente, pesa:

17 Maggio (1)	0	3,54	2,89	
27 » ore 10	5	3,80	3,15	+ 0,26
Fattale espellere l'acqua:		2,32	1,67	— 1,48

Esperienza VI. — La 2ª *Limnaea* pesa, separatamente:

17 Maggio	0	3,50		
27 » ore 10	5	3,70		+ 0,20
	7			
» » » 10,4′		3,51		— 0,19
» » » 11,15′		3,32		— 0,19
» » » 15		2,94		— 0,38
28 » » 15		3,36		+ 0,42

Esperienza VII. — La 3ª *Limnaea* pesa, separatamente:

17 Maggio	0	5,50		
27 » ore 10	5	5,91		+ 0,41
	7			
» » » 10,10′		5,64		— 0,24
» » » 15		5,16		— 0,51
28 contratta e vicina a morire.				

Esperienza VIII. — La 4ª *Limnaea* pesa, separatamente:

17 Maggio	0	4,53		
27 » ore 10	5	4,84		+ 0,31
	7	4		
» » » 15		4,30		— 0,54
28 » » 15		4,50		+ 0,20
Fattale espellere l'acqua:		3,04		— 1,46

(1) Il canale digerente pesa gr. 0,12
Svuotato dell'acqua . . . . » 0,09

Dunque contiene acqua. . » 0,03

Esperienza IX. — 3 *Limnaeae* in 500 cm. c. di acqua potabile, digiuno:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenza
1 Maggio ore 11,15	0	16,51	13,39	
	6			
» » » 11,45′		16,06	12,94	— 0,45
» » » 13,45′		15,26	12,14	— 0,80
» » » 15,45′		15,37	12,25	+ 0,11
» » » 16,45′		14,66	11,54	— 0,71
11 » » 10		13,81	10,69	— 0,85
Dato loro da mangiare.				
13 Maggio ore 9		14,67	11,55	+ 0,86
14 » » 12		13,19	10,07	— 1,48

Esperienza X. — 10 *Limnaeae* in 1000 cm. c. di acqua potabile, col cibo:

16 Maggio	0	63,90		
	0,25			
18 »	0,5			
19 »	1			
21 »		66,17		+ 2,27

Esperienza XI. — Una *Limnaea stagnalis*, da più di un mese vivente nell'acqua potabile, in 500 cm. c. di acqua potabile, a digiuno, insieme colle due seguenti. Digiunavano da quindici giorni, in modo che gli effetti del digiuno durante le esperienze non potessero essere, ormai, molto notevoli.

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
9 Giugno ore 15	0	7,08	6,00	
Espulsa l'acqua:		4,37	3,29	— 2,71
	2			
9 Giugno ore 16		5,12		
Espulsa l'acqua:		3,81	2,73	— 0,56
10 Giugno ore 18 (1)		5,84		
Espulsa l'acqua:		4,75	3,67	+ 0,94

Esperienza XII. — *Limnaea* c. s., da principio insieme colla precedente:

9 Giugno ore 15	0	6,99		
	2			
» » » 16		6,66		— 0,33
10 » » 18		6,80		+ 0,14
11 » » 14		7,09		+ 0.29
12 » » 17		6,75		— 0,34
Espulsa l'acqua:		4,07		— 2,68
	5			
12 Giugno ore 18		3,98		
Espulsa l'acqua:		3,76		— 0,31
13 Giugno ore 9		4,76		
Espulsa l'acqua:		3,20		— 0,56
14 Giugno ore 10 morta.				

(1) Il canale digerente pesa (10 giugno ore 18), gr. 0,09
Svuotato dell'acqua . . . . . » 0,05

Dunque conteneva acqua . . . . . » 0,04

Esperienza XIII. — *Limnaea* c. s., da principio insieme colle due precedenti:

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
9 Giugno ore 15	0	6,53		
	2			
» » » 16		6,31		— 0,22
10 » » 18		6,45		+ 0,14
11 » » 14		6,34		— 0,11
12 » » 17		6,50		+ 0,16
	5			
» » » 18		6,23		— 0,27
13 » » 9		6,07		— 0,16
14 » » 10		6,48		+ 0,41

Esperienza XIV. — 2 *Limnaeae* nelle stesse condizioni iniziali delle precedenti (v. esp. XI), poste a digiuno in 2000 cm. c. di acqua potabile. La 1ª pesa.

13 Giugno ore 11	0	4,21		
	4			
» » » 14		4,18		— 0,03
14 » » 9	contratta	2,87		— 1,31

Esperienza XV. — La 2ª *Limnaea* pesa:

13 Giugno ore 11	0	5		
	4			
» » » 14		4,88		— 0,12
14 » » 9		4,72		— 0,16

Esperienza XVI. — Una *Limnaea*, nelle stesse condizioni iniziali delle precedenti, in 1000 cm. c. di acqua potabile, a digiuno (esperienza di confronto):

13 Giugno ore 11	0	2,84		
14 » » 9		2,84		0,00

Esperienza XVII. — 3 *Limnaeae* messe in acqua potabile, 500 cm. c. col cibo (esperienza di confronto colla esp. 1ª):

7 Maggio ore 14	0	11,92		
8 » » 11		11,79		— 0,13
9 » » 14		11,78		— 0,01
9 » » 16		11,74		— 0,04
11 » » 17		11,96		+ 0,22

Esperienza XVIII. — 3 *Limnaeae* tolte dall'acqua stagnante e poste in acqua distillata, a digiuno.

27 Maggio ore 11	Acqua stagnante	23,34		
	» distillata			
2 » » 15		24,08		+ 0,74

3. *Discussione delle esperienze.* — Nelle prime esperienze io trovavo, in corrispondenza di un aumento di concentrazione non troppo forte dell'ambiente esterno, un aumento di peso degli animali.

Si osservi p. es. l' esperienza I, 2-5 maggio; esp. X ecc. Quest'aumento poteva esser dovuto da maggiore ingestione di cibo. Ma anche in animali tenuti a digiuno si osservava lo stesso fatto. Siccome però talvolta esso era preceduto da una diminuzione (esp. I, 5-10 maggio), riconobbi la necessità di pesare le *Limnaeae* poco dopo l'aumento della concentrazione, anzichè solo il giorno dopo, come nell' esp. I, e di aumentare addirittura un poco di più la concentrazione. Allora si riesce sempre a cogliere un primo momento in cui si ha una diminuzione di peso seguito poi da un aumento (esp. IV, 19-20 maggio; esp. XII, 9-17 giugno, ecc.). Se l'esperienza si prolunga senza ulteriori modificazioni di concentrazione, anche l'aumento sparisce (esp. XII, 9-12 giugno). Se l'aumento di concentrazione è molto forte, od avviene quando la concentrazione era già elevata, si osservano i due momenti di reazione, ugualmente, ma la seconda reazione non arriva a superare la prima, immediata, ed il peso resta sempre più basso del primitivo (esp. XIII, esp. VI, 27-28 maggio). Ma i due momenti si osservano quasi sempre; sempre, se la soluzione non è tanto forte da condurre rapidamente a morte gli animali, e se si prolunga sufficientemente l' esperienza.

D'altra parte, animali presi dall'acqua stagnante e posti in acqua distillata, aumentano notevolmente di peso (esp. XVIII).

Abbiamo dunque che le *Limnaeae* reagiscono (come prima reazione) alle soluzioni ipo- e ipertoniche assumendo o perdendo acqua. Che quest'acqua è propria dell'ambiente interno e dei tessuti degli animali, lo dimostrano le esperienze in cui è tolta l'acqua che si trova tra il guscio e il corpo. Si veda p. es. l'esp. XI, in cui l'acqua è fatta espellere prima di ogni pesata. Anzi, in questi casi, i risultati son più netti; alla soluzione del 2 ‰ l'animale ha reagito con una diminuzione di 5 dgr., aumentando poi di nuovo di quasi 1 gr. (da 4,37 a 3,81 e a 4,75 gr.). Nell' esp. XII, 12-14 giugno, non si ha il riaumento, perchè l'animale va morendo. Se si guarda qua e là nelle varie esperienze, si vede che sempre manca la seconda reazione, quando l'animale dopo poco muore.

Dunque, alle soluzioni ipertoniche le *Limnaeae* reagiscono in due modi: nel 1° momento con una perdita d' acqua propria dell'ambiente interno e dei tessuti (evidentemente perdita di natura osmotica); nel 2° momento con un riaumento di peso, per il quale è necessario che l'animale sia in buone condizioni di salute; mentre che la prima reazione avviene anche su animali già malandati (p. es. esp. II, 13-14 maggio).

Questa seconda reazione è dovuta a un aumento dell'acqua interna, o anche dal sale? Risponde l' esperienza III, nella quale una *Limnaea* condotta alla concentrazione di 4 ‰, rimessa in acqua potabile (a digiuno) arriva dal peso di gr. 6,14 a quello di gr. 6,63. Questo aumento che è temporaneo, e che è evidentemente di natura osmotica, dimostra che i succhi interni son più concentrati dell'acqua potabile, da cui l'animale originaria-

mente proveniva, ossia che, adattandosi l'animale a vivere in Na Cl 4 ‰ era entrato del sale in esso, in maggior quantità. Evidentemente quando l'aumento per la nuova immersione in acqua potabile sparisce (13 maggio), il sale era uscito nuovamente dall'animale, insieme con acqua.

In sostanza, il comportamento delle *Limnaeae* è perfettamente simile a quello degli Infusorii, ed esprimibile in due parole:

Le Limnaeae reagiscono alle soluzioni anisotoniche dapprima con variazioni del contenuto acquoso (reazione osmetica), poi si ha una variazione che tende a distruggere la prima e qualche volta la supera temporaneamente, dovuta a passaggio di acqua e sale.

Parassitologia. — *Sulla trasmissibilità della peste bubbonica ai pipistrelli.* Nota preventiva di B. Gosio, presentata dal Socio Luciani.

Numerose specie animali vennero già studiate in rapporto alla loro suscettibilità verso la peste bubbonica. Da ricerche batteriologiche sul campo dell'epidemia risultarono spontaneamente recettivi i ratti, i topi ed i porci. Sperimentalmente poi la malattia, oltre che nei succitati animali, venne con maggiore o minor facilità riprodotta nel topo campagnuolo, nel *mus silvaticus*, nella cavia, nel coniglio, nella scimia, nel gatto, nei polli, nel passero e nelle mosche. I piccioni vennero resi sensibili mediante il digiuno; le lucertole ed i serpenti mediante alta temperatura. Il cane, i bovini, il riccio e la rana si rivelerebbero fin ora immuni. Per l'importanza che ha l'argomento dal lato epidemiologico e profilattico, appariva utile estendere anche più le ricerche, prediligendo sempre gli animali, che possono avere qualche rapporto coll'uomo e colle sue abitazioni.

Al tempo della piccola epidemia pestosa di Napoli, quando ebbi incarico di fissarmi per le dovute pratiche sanitarie, sui focolai primitivi della infezione, fu mia cura di raccogliere e far raccogliere dati nel suddetto indirizzo ed il lavoro sistematico, anche nei riguardi zoologici, si sta ora compiendo, col contributo d'un materiale che si raccoglie in varie parti del Regno. Ma intanto giudico opportuno un breve cenno su un punto, che non mi risulta fin ora esplorato, mentre esso apparisce d'un certo interesse.

I grandi magazzini del Punto franco, che reclamavano la massima attenzione come località di probabile origine del morbo, oltrechè d'un grande numero di topi, sono anche facile covo di pipistrelli, che ogni sera vedevo aggirarsi numerosi e contro cui nessuna garanzia offrono le alte mura, che isolano i locali, l'indipendenza del sistema cloacale dalla fognatura cittadina e i varî ripari escogitati per impedire l'evasione dei comuni animali

sospetti. Pertanto fu ovvia la domanda, se i chirotteri potessero eventualmente rendersi veicolo della peste bubbonica.

L' occasione a un tale studio mi venne da poco tempo offerta, quando cioè potei avere a disposizione un certo numero di questi animali scelti fra le specie più resistenti al regime, a cui per necessità sperimentale si è costretti a sottoporli.

Le mie ricerche riguardano la specie *Vesperugo noctula* molto comune in gran parte dell' Italia.

Per le inoculazioni impiegai il germe isolato dalla stessa epidemia di Napoli, mantenuto sempre attivo con passaggi attraverso il decumano albino. Nelle prime esperienze le dosi di *virus* furono alquanto alte (0,5 cmc. di brodocultura a 24 ore di sviluppo), ma poi discesi fino a cmc. 0,1 — 0,05, sempre con esito positivo.

I risultati ottenuti possono sommariamente così riportarsi:

I pipistrelli (per ora *Vesperugo noctula*) contraggono la peste, e ne muoiono in un termine relativamente breve, anche per inoculazione sottocutanea di piccole dosi di materiale infetto; si può parlare di *recettività spiccata*.

Tutti gli organi interni si mostrano in tal caso ricchi di germi specifici, che spiegano virulenza normale per il topo e per la cavia. Sovratutto caratteristica è la splenite pestosa, per cui la milza può talora assumere un volume esagerato.

I parassiti dei pipistrelli morti di peste possono contenere nel loro interno i germi infettivi, e con ogni probabilità ne sono ambiente di sviluppo, come già venne dimostrato per le pulci comuni in questo stesso laboratorio.

Il notevole e svariato numero di parassiti, di cui il pipistrello è facile albergo, il suo speciale mezzo di locomozione e la sua or resa nota squisita recettività verso la infezione pestosa, a differenza di altri animali alati, lasciano di leggieri comprendere come esso possa avere importanza quale veicolo della peste bubbonica.

Zoologia. — *Nota preventiva sulla funzione delle cellule cloragogene nei gen. Lumbricus ed Allolobophora.* Nota del dott. Ciro Bortolotti, presentata dal Socio Emery.

Non starò a riportare le lunghe controversie sulla genesi del *Cloragogeno*, dirò solo che ormai, abbattute dal Rosa le teorie di Cuénot e di Kükenthal sui pretesi rapporti genetici fra il *Cloragogeno* ed i linfociti degli anellidi, si deve considerare questo strato di cellule come una modificazione della membrana peritoneale.

Le cellule cloragogene non si osservano esclusivamente attorno all' intestino, esse si trovano alla superficie esterna dei principali tronchi vascolari

(vaso dorsale e sue ramificazioni): la ripiegatura del *typhlosolis* ne è sempre rivestita.

Le cellule ghiandolari sono libere, ossia non hanno aderenza fra loro; sono ovalari, piriformi e fissate soltanto per una estremità diversamente ramificata alla superficie dell'intestino o dei vasi. Quale è la funzione di queste cellule? Da prima furono chiamate ghiandole epatiche. Si credette segregassero un liquido alcalino digestivo ed a questo liquido si attribuiva l'azione digestiva che Fredericq aveva riscontrato nell'intestino dei vermi terricoli. Si avvicinava così questo liquido al succo pancreatico degli animali superiori (Vogt e Jung). Claparede dopo un complesso di ricerche fu il primo a credere ch'esse fossero soltanto cellule escretrici, e dopo di lui quasi da tutti furono considerate come escretrici dei prodotti del sangue. Nessuno però che io sappia ha stabilito definitivamente la natura dei granuli e degli altri prodotti d'escrezione che (come vedremo) si riscontrano in diverso grado nelle singole cellule. Le cloragogene hanno un citoplasma finamente granuloso ed un nucleo ovale sempre visibile e con interno nucleolo. Il nucleo non ha una posizione stabile, ma si trova a diverse altezze nella cellula. Un grande numero di granuli riempie spesso quasi tutto il corpo della cellula cloragogena. Questi granuli secondo Rosa (1896) non sarebbero che goccioline liquide rivestite di una membrana elastica. Io credo che tutt'al più si possano chiamare semisolidi, giacchè sono sufficientemente resistenti alla pressione. Essi poi sono resistentissimi a tutti i reagenti. L'alcool, l'etere, gli alcali non li sciolgono, tanto che anche in sezioni che abbiano sopportato tutti i passaggi dei diversi alcool, e dello xilolo, i granuli si osservano intatti nella loro forma. Il loro colore è variamente giallastro. Dall'azione che i diversi coloranti hanno sui granuli, si deduce con certezza che questi hanno reazione acida. Del resto le cellule claragogene hanno non solo nei granuli, ma in tutto il loro corpo caratteri manifesti di acidità. I granuli non li trovai mai fuori della cellula cloragogena; è certo dunque che essi si formano nella cellula stessa, come prodotti ultimi delle sostanze escrete dal sangue. Io credo che i granuli in questione siano formati in gran parte, se non esclusivamente, da acido urico. Dico questo perchè dopo ripetuti tentativi ho potuto ottenerne le reazioni caratteristiche.

Oltre a questi granuli, molti autori fra i quali Schneider (1896), Cuénot (1897) riscontrarono nel cloragogeno degli oligocheti delle goccie adipose, anzi il Cuénot dà la figura di una cellula di Phreoryctes Menkeanus ripiena di globuli di grasso anneriti coll'acido osmico. Io non ho potuto trovare nei gen. *Lumbricus* ed *Allolobophora* delle goccie che mi abbiano dato le reazioni del grasso. Ho osservato invece, in diversi individui, nelle cellule cloragogene, dei grossi ammassi giallastri di forma irregolarmente sferica.

Mi sono convinto che questi grossi ammassi sono di glicogeno, presentandone essi le reazioni caratteristiche. Bisogna notare però che gli ammassi

non si trovano soltanto inclusi nelle cloragogene, ma si vedono alle volte intercalati fra le fibre e le cellule degli altri strati dell'intestino. Con tutto ciò è probabile che anche gli ammassi di glicogene, come gli altri granuli, si formino nella cellula cloragogena da materiali escreti dal sangue. Non v'è dubbio che il glicogeno si accumuli nelle cloragogene come materiale di riserva, anche per il fatto che la sua presenza non è costante. Come, e per quale via gli ammassi del glicogeno vengano utilizzati dall'organismo non lo saprei dire. Le cellule cloragogene cariche di granuli vanno staccandosi interamente o a pezzi dalla parete dell'intestino o dei vasi e cadono nella cavità periviscerale, donde in modi diversi vengono eliminate dall'organismo.

Concludendo: Il cloragogeno nei gen. *Lumbricus* ed *Allolobophora* ha una funzione prevalentemente escretoria, però non si può dubitare che possa accumulare dei materiali di riserva.

NOTA. In questi giorni mi furono favorite le bozze di stampa di un magistrale lavoro del prof. Rosa: *Sul Cloragogo tipico degli Oligocheti.*

Credo però ugualmente opportuno di pubblicare il mio modesto scritto per quel poco di nuovo che in quanto alla natura dei prodotti d'escrezione, mi pare d'aver trovato. Invio al lavoro del prof. Rosa chi del cloragogeno (cloragogo) in generale vuol formarsi una completa conoscenza sotto ogni punto di vista e chi vuol trovare la completa bibliografia sull'argomento.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Blaserna annuncia che alla seduta assiste il Socio straniero Simone Newcomb.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 31 maggio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla deformazione delle superficie di rotazione.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Nella Memoria di Ribaucour: *Sur la théorie générale des surfaces courbes* [1] è considerato, al n. 92, un caso assai generale di deformazione di una congruenza rettilinea. Ciascun raggio della congruenza si pensa invariabilmente collegato ad un corrispondente piano tangente di una superficie S, la giacitura del raggio rispetto al piano tangente essendo affatto arbitraria, e si suppone che la superficie S si deformi seco trascinando i suoi piani tangenti, ed i raggi della congruenza C. Se la congruenza C è normale in una configurazione iniziale di S, essa rimane costantemente normale in qualunque deformazione nei due casi particolari seguenti: 1° quando il raggio esce dal punto di contatto del piano tangente (teorema di Beltrami); 2° quando giace nel piano tangente stesso (Ribaucour). Ma negli altri casi la congruenza perde in generale, colla deformazione, la proprietà di essere normale, a meno che la superficie S non sia applicabile sopra una superficie di rotazione, la giacitura della congruenza rispetto alla superficie S essendo poi assoggettata a particolari condizioni, che si traducono in un certo sistema di equazioni alle derivate parziali (Ribaucour, l. c.).

(1) Journal de mathématiques (4ème série, t. VII), 1891.

Le linee seguenti hanno per oggetto di far conoscere un caso particolare di queste deformazioni, notevole per la sua semplicità. Esso viene dato dal teorema: *Se una superficie di rotazione si fa rotolare sopra una qualunque superficie applicabile* (1), *l'asse della superficie descrive sempre una congruenza normale.*

Dimostriamo il teorema colle considerazioni geometriche seguenti. Essendo S una superficie di rotazione e Σ una superficie qualunque applicabile sopra S, partiamo dall'osservazione evidente che l'asse di S passa pel centro di curvatura geodetica di ogni parallelo e giace nel piano normale al parallelo stesso. Considerando dunque S a contatto con Σ in un punto qualunque M, l'asse di S passerà pel centro M′ di curvatura geodetica della trasformata del parallelo e giacerà nel piano condotto pel raggio MM′ normalmente al piano tangente di Σ. Ora il punto M′ descrive la superficie Σ' *complementare* di Σ rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani e il detto piano, normale al piano tangente di Σ, non è altro che il piano tangente in M′ alla Σ'. Dunque l'asse della S è tangente in M′ alla Σ'. Ora se indichiamo con

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2\, d\beta^2 \quad (r = f(\alpha))$$

l'elemento lineare di S (o di Σ), riferito ai meridiani (β) ed ai paralleli (α), l'angolo σ d'inclinazione dell'asse di S sul raggio MM′ (tangente al meridiano) è dato da

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{dr}{d\alpha}.$$

D'altronde, per la formola che lega l'elemento lineare della complementare Σ' a quello di Σ (2), si sa che la Σ' è applicabile essa stessa sopra una superficie di rotazione e il raggio ϱ del parallelo di questa superficie è dato da

$$\varrho = \frac{a}{\dfrac{dr}{d\alpha}},$$

essendo a una costante; ne risulta:

$$\varrho \operatorname{sen}\sigma = a. \tag{1}$$

Ma poichè σ è l'angolo che i detti assi, tangenti a Σ', formano colle deformate dei meridiani, la (1) ci dimostra (pel teorema di Clairaut) che

(1) Quando due superficie S, S′ sono applicabili, diciamo che S rotola sopra S′ se, tenendo fissa S′, si fa acquistare ad S una doppia infinità di posizioni, portando ogni volta un punto P di S a coincidere col corrispondente P′ di S′, in guisa che i piani tangenti in P, P′ coincidano e si sovrappongano gli elementi lineari corrispondenti degli intorni.

(2) Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale* (seconda edizione, I, pag. 296).

queste tangenti inviluppano sopra Σ' un sistema di geodetiche, e per ciò la congruenza C è una congruenza normale, c. d. d.

Di più, la costante a di Clairaut nella (1) rimanendo fissa, vediamo che le geodetiche inviluppate dagli assi sono incontrate da un medesimo parallelo tutte sotto lo stesso angolo, cioè quando la Σ' è conformata a superficie di rotazione esse sono tutte congruenti fra loro. Il teorema superiore risulta quindi completato dal seguente:

La congruenza normale descritta dall'asse di una superficie di rotazione S, *che rotola sopra una superficie applicabile* Σ, *ammette per una falda della superficie focale la superficie complementare* Σ' di Σ, *e conformando* Σ' *a superficie di rotazione le geodetiche inviluppate sopra* Σ' *dagli assi risultano congruenti fra loro.*

2. Esaminiamo ora le superficie Φ ortogonali agli assi. Riferiamo per ciò dapprima la Σ' ai meridiani e paralleli, e sia

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2$$

il suo elemento lineare. Cangiamo linee coordinate prendendo per linee (v) un sistema di geodetiche congruenti, corrispondenti al valore a della costante di Clairaut, e per linee (u) le loro traiettorie ortogonali, essendo u l'arco delle geodetiche (v) contato da una traiettoria ortogonale fissa. Per le note formole relative alle geodetiche sulle superficie di rotazione [1], potremo prendere

$$\begin{cases} u = a\beta + \int \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}\, d\alpha \\ v = -a\beta + a^2 \int \frac{d\alpha}{r\sqrt{r^2 - a^2}}, \end{cases}$$

indi

$$u + v = \int \frac{r\, d\alpha}{\sqrt{r^2 - a^2}}. \tag{2}$$

Se ne trae

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) dv^2,$$

e per la (2) sarà $\frac{r^2}{a^2} - 1$ una certa funzione di $u + v$, che indicheremo con $f^2(u+v)$, Si avrà perciò

$$ds^2 = du^2 + f^2(u+v)\, dv^2, \tag{3}$$

dove la forma della funzione f dipenderà dalla forma della superficie di rotazione e dal valore della costante a.

[1] Vedi *Lezioni* ecc., I, pag. 208.

Le superficie Φ che dobbiamo considerare sono le evolventi della Σ', d'elemento lineare (3), rispetto alle geodetiche (v), cioè le superficie ortogonali alle tangenti di queste geodetiche. Indicando con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura della Φ, si ha

$$r_2 = u\,, \qquad r_1 - r_2 = -\frac{f(u+v)}{f'(u+v)}\,,$$

onde segue il teorema: *Le superficie Φ ortogonali agli assi della superficie di rotazione* S *hanno i raggi principali di curvatura legati da una relazione della forma*

$$\psi(r_1 - r_2) + r_2 = v\,,$$

dove ψ è una funzione dipendente dalla forma di S *e v è il parametro delle linee di curvatura di un sistema sopra Φ.*

3. Come esempio si prenda per S il paraboloide di rotazione. La superficie complementare Σ' ha l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + 2(u+v)\,dv^2\,,$$

le geodetiche (v) essendo in questo caso tangenti al parallelo minimo di Σ'. Qui abbiamo

$$r_2 = u\,, \quad r_2 - r_1 = 2u + 2v$$

e quindi

$$r_1 + r_2 = -2v\,.$$

Dunque: *se si fa rotolare il paraboloide di rotazione sopra una superficie applicabile, le superficie normali alla congruenza descritta dall'asse hanno costante la somma dei raggi principali di curvatura lungo le linee di curvatura di un sistema.*

Le deformate del paraboloide di rotazione essendo tutte note, conosciamo così, in termini finiti, una classe di superficie Φ dotate della proprietà enunciata. Terminiamo coll'osservare che alla considerazione delle superficie Φ per le quali è costante la somma dei raggi principali di curvatura lungo le linee di curvatura di un sistema si è condotti in generale dall'esame della questione seguente: *quando accade che ad ogni sistema coniugato sopra una falda dell'evoluta di una superficie Φ corrisponde nell'immagine sferica della congruenza delle normali di Φ un sistema ortogonale?*

Per ciò è appunto necessario e sufficiente che la superficie Φ appartenga alla classe superiore. Allora la corrispondente falda dell'evoluta ha l'elemento lineare tipico

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \varphi(v)]\,dv^2\,, \tag{4}$$

che figura nelle ultime ricerche di Weingarten sull'applicabilità [1]. Viceversa le tangenti alle geodetiche (v) in una superficie d'elemento lineare (4) formano una congruenza che, flettendo comunque la superficie di partenza, gode sempre della proprietà descritta.

[1] Darboux, *Leçons*, t. IV, pag. 323.

Fisica. — *Sulla produzione di suoni per mezzo delle scariche nei tubi a gas rarefatto o nelle fiamme.* Nota II del Socio Augusto Righi.

In una precedente Nota [1] ho descritto i fenomeni sonori, che si producono, quando le armature di un condensatore sono messe, attraverso ad un telefono, in comunicazione cogli elettrodi d'un tubo a gas rarefatto, percorso dalla corrente d'una batteria di piccoli accumulatori. Tali suoni sono dovuti alle scariche del condensatore, le quali si producono ogni volta che la differenza di potenziale fra le armature raggiunge un determinato valore, ed il numero di vibrazioni per secondo del suono è eguale al numero di scariche del condensatore prodotte in tal modo durante l'unità di tempo. Perciò quel suono è tanto più acuto, quanto maggiore è la forza elettromotrice della batteria, quanto minore è la capacità del condensatore, e quanto minore è la resistenza messa in serie agli accumulatori.

In quelle esperienze l'autoinduzione del circuito derivato (designando così il circuito del condensatore) fu sempre assai piccola, e sembrò non esercitare sensibile influenza sui fenomeni. Anzi il periodo di oscillazione elettrica del circuito derivato fu sempre di gran lunga minore del periodo delle oscillazioni sonore, circostanza questa che rende indubitato essere questo modo di produzione dei suoni affatto differente da quello della nota esperienza di Duddell.

Ho voluto indagare più tardi quali fenomeni si sarebbero prodotti facendo in modo, che il periodo delle oscillazioni elettriche del circuito del condensatore divenisse eguale all'intervallo di tempo che trascorre fra le successive scariche od anche lo superasse. Espongo nella presente Nota quanto ho ricavato dalle esperienze eseguite a questo scopo, per le quali ho preferito i tubi alle fiamme, perchè queste non danno sempre risultati regolari.

Prima ancora di tentare le esperienze nelle nuove condizioni, ho introdotto però qualche altra variante nella disposizione sperimentale. Così, ho trovato conveniente sostituire agli elettrodi cilindrici di alluminio del tubo ad aria rarefatta, altri elettrodi, e precisamente un filo sottile di platino come anodo, ed un disco piano d'alluminio come catodo. Il filo arriva a piccola distanza dal centro del disco, ed è a questo perpendicolare. Ma è ancora meglio sostituire all'alluminio del mercurio e all'aria rarefatta dell'idrogeno a circa un centimetro di pressione, perchè in tal modo il catodo si conserva pulito e brillante, ciò che assicura la perfetta regolarità dei feno-

[1] Seduta del 4 maggio 1902; questi Rendiconti pag. 352.

meni e la purezza dei suoni, col vantaggio ancora del potersi variare a piacere la distanza fra gli elettrodi, semplicemente facendo passare una parte più o meno grande del mercurio in un serbatoio laterale comunicante col tubo.

Ho trovato comodo altresì sopprimere il telefono. Se infatti il condensatore, anzichè essere uno dei soliti assai compatti con armature di stagnuola e dielettrico di mica o di carta paraffinata, consiste in due lastre metalliche sovrapposte, con uno o più fogli di carta da scrivere per separarli, è lo stesso condensatore che produce il suono, che prima veniva generato dal telefono. Questo suono del condensatore può essere tanto intenso, da udirsi benissimo in camere lontane da quelle ove trovasi l'apparecchio.

Volendo, come ho detto più sopra, far sì, che il periodo di oscillazione elettrica del circuito derivato divenisse paragonabile al periodo di tempo richiesto per la carica del condensatore, ho dovuto aumentare l'autoinduzione del circuito derivato. A questo scopo ho inserito fra una delle armature del condensatore ed il tubo uno o due rocchetti da galvanometro, ciascuno dei quali conteneva ottomila giri di filo ed aveva un coefficiente di autoinduzione calcolato, colla formola di Stefan, in circa 4,68 Henry.

In queste condizioni il fenomeno presenta caratteri alquanto differenti da quelli del fenomeno della precedente Nota, e senza divenire identico a quello di Duddell, vi si avvicina grandemente. Infatti, il periodo delle vibrazioni sonore diviene sensibilmente eguale al periodo delle oscillazioni elettriche calcolato in base alla capacità, all'autoinduzione ed alla resistenza. Esso diviene quindi indipendente, almeno entro certi limiti, sia dalla forza elettromotrice degli accumulatori, sia dalla resistenza del circuito di questi. È però necessario, onde si generi il suono, che tale periodo sia notevolmente maggiore, di quello del suono che si otterrebbe senza rocchetti, tanto che, se nel circuito degli accumulatori esiste una resistenza variabile, è necessario che il valore di questa superi un certo valore limite, onde il suono si sprigioni dal condensatore. Introducendo un fascio di fili di ferro nei rocchetti, il suono diviene più grave, in causa dell'aumento che si produce, così facendo, nell'autoinduzione.

Quest'esperienza costituisce un caso estremo, mentre l'esperienza della prima Nota ne costituisce un altro. Nell'esperienza attuale il suono è dovuto alle variazioni di potenziale prodotte dalle oscillazioni elettriche ed ha lo stesso periodo di queste, mentre nell'esperienza della prima Nota il suono è dovuto alla regolare successione delle cariche e scariche del condensatore, ed il suo periodo è eguale all'intervallo di tempo che separa le scariche stesse. Diveniva quindi interessante esaminare i casi intermedi, cioè fare uso di autoinduzione minore di quella dei rocchetti descritti.

Così facendo ho ottenuto fenomeni svariati e singolari e che sembrano richiedere un lungo ed accurato studio per essere spiegati.

Come si poteva prevedere, il numero di vibrazioni del suono dipende tanto dal coefficiente d'autoinduzione del circuito derivato, quanto dalla resistenza e forza elettromotrice del circuito principale; ma tale dipendenza segue leggi certamente complicate. In particolare si osserva questo singolare fenomeno, e cioè, che variando in modo continuo o la resistenza suddetta o l'autoinduzione del rocchetto, anzichè ottenere una variazione continua nell'altezza del suono, si odono suoni che ad intervalli irregolari mutano bruscamente di altezza. In altre parole, certi suoni sono possibili, ma non quelli di altezze intermedie. Basta per esempio introdurre, con moto uniforme, un fascio di fili di ferro nel rocchetto, per udire una successione di note formanti una specie di melodia e che si ripetono poi con successione inversa, quando il fascio di fili di ferro si allontana con inverso moto uniforme. Per certe posizioni del fascio basta dare al medesimo uno spostamento minimo, per far saltare il suono bruscamente da una nota all'altra; e non di rado si riesce ad ottenere, fissando il fascio in una di quelle posizioni, una rapida alternativa delle due note, e cioè un vero trillo.

Infine, se la resistenza è convenientemente regolata, si ottiene un curioso fenomeno analogo a quello delle fiamme cantanti, e cioè il suono non si produce spontaneamente, ma esso si eccita subito e perdura, se si dà al tavolo un lieve urto, o se si tocca il condensatore col gambo di un diapason vibrante, il quale dia un suono d'altezza presso a poco eguale a quella del suono del condensatore.

L'esame di questi ed altri curiosi fenomeni sarà probabilmente oggetto di future mie ricerche.

Fisica. — *Dispersione rotatoria magnetica nell'interno delle righe di assorbimento.* Nota del Socio W. Voigt.

Il Corbino ha pubblicato nei Rendiconti del 15 settembre 1901 una Nota contenente osservazioni sulla dispersione rotatoria magnetica dei vapori di sodio nell'interno delle righe di assorbimento, le quali presentavano un interesse tanto maggiore, in quanto erano apparentemente in contraddizione con tutte le teorie. In opposizione a questa apparenza io ho cercato di mostrare (W. Voigt, Ann. d. Physik, *6*, 783, 1901) che le formole da me sviluppate portano a fenomeni della natura di quelli descritti dal Corbino. Ma in questa occasione si è manifestata la difficoltà di farsi un'idea esatta di un fenomeno delicato in base ad una semplice descrizione. In ogni caso le recenti osservazioni del Corbino (Nuovo Cimento (V), III, 121, 1902) hanno mostrato che non si trattava esattamente di quello che io avevo creduto; e questo viene confermato da fotogrammi del prof. Zeeman in Amsterdam, i quali indubbiamente rappresentano il fenomeno studiato dal Corbino. Da tutto

questo però non segue per nulla una contraddizione fra teoria ed osservazione.

Il Corbino si esprime così a proposito delle frange d'interferenza da lui osservate: « eccitando il campo, le pallide frange, che si hanno dentro le righe, restano rettilinee ed orizzontali »; ma queste parole contengono già un' interpretazione del fenomeno, la quale può condurre in errore, come è avvenuto a me. In ogni caso i fotogrammi molto netti dello Zeeman mostrano nelle righe di assorbimento delle ombre larghe e slavate, le quali hanno un aspetto interamente diverso dalle frange di interferenza situate fuori delle righe di assorbimento ed indubbiamente possono ricevere un' interpretazione del tutto diversa da quella data dal Corbino. Le questioni, che nascono a questo proposito, hanno una portata generale e meritano di venire trattate alquanto estesamente.

La teoria conduce alla seguente formola per l'angolo di rotazione χ del piano di polarizzazione:

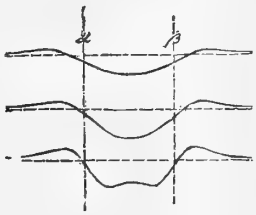
$$n\chi = \mathrm{KP}\,\frac{(\Delta^2 - \mathrm{P}^2 - 1)}{(\Delta^2 + \mathrm{P}^2 + 1)^2 - 4\Delta^2\mathrm{P}^2}$$

in cui $n = \sqrt{n_1 n_2}$ rappresenta l'indice di rifrazione medio per le due onde propagantesi nel vapore, K un parametro; P è proporzionale all' intensità del campo magnetico, e Δ è proporzionale alla distanza della posizione considerata dalla posizione primitiva della riga di assorbimento, misurata in frazioni di durata di vibrazione. K contiene come fattore la lunghezza del cammino percorso dai raggi nel vapore, ed inoltre dipende secondo una legge sconosciuta dalla densità e dalla temperatura del vapore. Queste ultime determinano anche il coefficiente di proporzionalità in P e Δ, in modo però che il rapporto $\frac{\mathrm{P}}{\Delta}$ resta sensibilmente indipendente da esse. Le posizioni delle componenti della doppietta di Zeeman sono date in via approssimata da $\Delta = \pm \mathrm{P}$.

La grandezza $\frac{n\chi}{\mathrm{K}}$ è legata dunque alla variabile Δ mediante l' unico parametro P, e si può rappresentare questo legame mediante un' unica serie di curve, che corrispondono a valori crescenti di P. Se nella costruzione si sceglie per ogni curva l' unità della Δ proporzionale od eguale al valore di P, le ascisse α, β, che corrispondono alle componenti della doppietta di Zeeman saranno coincidenti per tutte le curve. Dette curve assumono per i valori $\mathrm{P} = 0,5$; $\mathrm{P} = 1,5$; $\mathrm{P} = 3,0$ le forme disegnate nell' unita figura, le quali rappresentano chiaramente le modificazioni che si producono al crescere di P.

Queste curve rappresentano anche qualitativamente — benchè con ascisse molto ingrandite — l' andamento delle frange d' interferenza nell' esperienza del Corbino, quando si possa ritenere costante n nel tratto considerato (ciò

che è permesso nel caso dei vapori di sodio, solo con un'approssimazione molto grossolana). Però, secondo quanto abbiamo detto, alla medesima intensità del campo possono corrispondere, a seconda della temperatura e della densità del vapore, non solo valori diversissimi di P, ma anche a seconda di queste condizioni e del valore della lunghezza l, valori assoluti diversi delle ordinate.



Ne segue una particolarità, che distingue in modo essenziale le osservazioni della natura di quelle del Corbino da quelle del fenomeno Zeeman propriamente detto. La separazione delle componenti della doppietta è sensibilmente indipendente sia dalla temperatura e densità del vapore, sia dalla lunghezza l del cammino percorso dai raggi luminosi nel suo interno. Per conseguenza il fenomeno rimane netto, anche se i diversi raggi luminosi, che entrano in giuoco, hanno attraversato porzioni diverse, ed in diverse condizioni, della fiamma.

Al contrario nelle osservazioni del Corbino ogni raggio darà in generale, per una medesima distanza α β, una curva d'interferenza diversa e quindi il fenomeno si presenterà poco netto, e di più questa mancanza di nettezza sarà diversamente accentuata nelle diverse parti della riga di assorbimento, poichè, come risulta dalla figura, le diverse porzioni della curva si alterano in misura diversa col variare del parametro. Così, per esempio, le porzioni delle curve di interferenza prossime, dalla parte interna, ai massimi di assorbimento saranno specialmente poco nette, perchè ivi le diverse curve hanno un andamento molto variabile. All'incontro, poichè tutte le curve nella vicinanza di α e β passano per l'asse delle ascisse $\chi = 0$, si osserveranno qui porzioni molto marcate e di larghezza notevole a causa della rapida caduta delle curve corrispondenti ai valori più elevati di P. D'altronde non si potrà avere in quelle regioni un'assoluta oscurità, perchè in essa le intensità delle due onde circolari, che vengono ad interferire, sono molto diverse e queste non potranno perciò comporsi in vibrazioni lineari.

Se quindi le osservazioni vengono fatte con un vapore molto denso e, per avere la necessaria intensità luminosa, con apertura piuttosto grande della fessura, con che tutte le parti dell'immagine d'interferenza vengono allargate in direzione orizzontale, e se ancora si fa uso di una sorgente luminosa,

in cui, come nella luce solare o nell'arco elettrico, manca la luce corrispondente al colore a metà fra α e β, avendosi le linee del sodio invertite — la teoria mostra come molto plausibile che si osservino quelle grosse bande oscure, che non si alterano sensibilmente coll'intensità del campo, come fu notato dal Corbino. La circostanza che uno dei fotogrammi dello Zeeman mostra nel mezzo delle bande oscure una netta stria verticale, più chiara rende abbastanza probabile l'interpretazione, che ho riferita.

Comunque le considerazioni esposte mi hanno mostrato la necessità di intraprendere delle osservazioni in condizioni, in cui non sieno presenti quelle complicazioni, che hanno reso così poco netto il fenomeno osservato dal Corbino, suggerendo di operare con densità di vapore così piccola ed intensità del campo così grande che le componenti della doppietta si stacchino nettamente fra di loro e dalle linee del sodio invertite della sorgente. Lo Zeeman ha eseguito, dietro mia preghiera, queste osservazioni colla sua nota accuratezza, ed io sono ben lieto di potere presentare a codesta Accademia nella Nota a pag. 470, un primo rapporto dei risultati da lui ottenuti e dovuto alla penna.

Le osservazioni istituite dallo Zeeman hanno fornito precisamente i risultati previsti dalla teoria, e sopratutto anche le enormi rotazioni negative nel tratto fra le componenti della doppietta, sfuggite al Corbino; esse rappresentano quindi una conferma altamente soddisfacente della teoria.

Paleontologia. — *Sul rinvenimento di un teschio di Squalodontidi nel calcare bituminoso di Ragusa in Sicilia.* Nota preliminare del Socio G. G. Gemmellaro.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulla probabile tectonica del gruppo del Sempione.* Nota del Socio T. Taramelli.

A conferma della supposizione fatta da me nel 1882, quando ebbi l'onore di prender parte alla Commissione pel progetto preliminare del grande tunnel, le ulteriori osservazioni all'esterno delle montagne presso al Sempione ed i dati forniti dal traforo sino ad ora compiuto, hanno dimostrato che l'affioramento calcare lungo la destra del torrente Cairasca è sicuramente la continuazione della zona calcare trovata dopo il gneiss di Antigorio dal lato sud, a circa quattro chilometri dall'imbocco. Per conseguenza, la serie sul versante meridionale del M. Leone sarebbe completamente ribaltata,

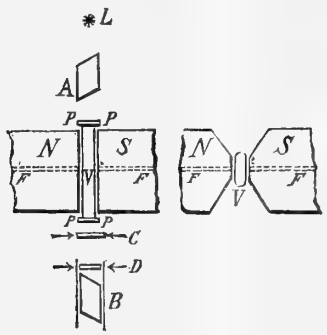
presso a poco come aveva supposto il Gerlach per l'alta valle Cairasca. È uno dei più complicati problemi stratigrafici, che il nostro Ufficio geologico concorrerà a studiare coi geologi svizzeri, contribuendo così alacremente all'esatta conoscenza della tectonica delle Alpi centrali. Per ulteriori dettagli, io mi riporto ad una mia recente pubblicazione nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Geologia. — *I terreni terziarî della Provincia di Roma. I. Eocene.* Nota del Corrispondente Carlo De Stefani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul metodo e sulle sostanze da adoperarsi, per osservare la birifrangenza magnetica.* Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Disposizione sperimentale. — Riferendomi a quanto esposi nella Nota preliminare precedente, comincio col dire della disposizione sperimentale, adottata per la ricerca dei casi di birifrangenza magnetica. Il campo magnetico era generato da un elettrocalamita tipo Weiss, costruita dal Santarelli di



Firenze. Poichè sperimentai in principio con sottili film di ferro trasparenti, deposti mediante la scarica elettrica nel vuoto, su lamine di vetro, cominciai col guarnire i due poli della elettrocalamita di espansioni coniche molto ravvicinate, raggiungendo così un valore del campo di circa 30.000 u. Ma questo tentativo, ed altri su cui non insisto, non diedero risultati apprezzabili, per cui decisi di studiare le soluzioni acquose di sostanze magnetiche. Per conseguenza sostituii alle espansioni coniche, delle altre lineari orizzontali N,S (viste nella figura in proiezioni orizzontale e verticale), tra le quali resta compreso un intraferro di circa 8 millimetri. La lunghezza del campo, normalmente alle linee di forza, è eguale al diametro dei nuclei di ferro dell'elettromagnete, cioè 7 centimetri. L'intensità del campo potè rapidamente

essere misurata al centro delle espansioni, essendo queste fornite di fori F del diametro di 1^{mm}; collocando in quel punto una vaschetta (non quella della figura) a pareti sottilissime di vetro riempita di benzolo (sostanza che ha un potere rotatorio magnetico riferito all'acqua uguale a 2,592), poteva misurarsi la rotazione del piano di polarizzazione di un sottile fascio luminoso polarizzato traversante il foro F. Con ciò fu costruita una tabella dalla quale si poteva dedurre, per ogni intensità di corrente, il valore del campo al centro.

Non furono fatte misure sugli altri punti del campo, bastando in prima approssimazione la conoscenza del valore al centro. Si riconobbe in tal guisa che il valore massimo del campo, ossia quello corrispondente alla massima intensità della corrente, era di 18.000 unità circa.

La vaschetta V, lunga anch'essa 7 cm., è destinata a contenere il liquido da studiare, e fu ottenuta in diverse guise, e cioè sia masticiando insieme pezzi di vetro sottile, sia schiacciando a caldo un tubo cilindrico di vetro di 1 cm. di diametro, su di un'apposita sagoma di acciajo rovente. In ogni caso però occorrevano speciali avvertenze, nella scelta delle pareti PP di vetro, le quali erano fissate con mastice al resto.

Generalmente, per una determinata vaschetta, venivano tagliate, da un ottima lastra da specchio, due striscioline di vetro incrociate, orientate con una differenza di 90°, sopra una dimensione qualunque della lastra. Con ciò si veniva a correggere, più che fosse possibile, la birifrangenza accidentale posseduta dal vetro adoperato.

Come sorgente di luce L fu adoperata in principio una piccola lampada elettrica, resa incandescente da una corrente eccessiva, talchè il filamento di carbone fosse molto brillante. Debbo a questo piccolo particolare, se mi accorsi di fenomeni che non potei mai scorgere con l'uso di semplici fiamme. Ma in seguito, essendo divenuto troppo dispendioso l'uso delle lampade elettriche (ciascuna di esse non durava più di un paio d'ore), sostituii a queste un arco voltaico. Questa sorgente offre l'inconveniente di essere poco costante, ma essendo in compenso più intensa, con un po' di pratica si riesce a potere osservare fenomeni tanto deboli come col primo metodo. Tra il polarizzatore A e l'analizzatore B sono comprese oltre la vaschetta V, contenuta nel campo, due lastrine di vetro grosso 2 mm. circa, portate da due montature distinte, capaci di esercitare una compressione sopra ciascuna, normalmente all'asse ottico del sistema. La lastrina C è con la sua montatura, girevole intorno al percorso del raggio luminoso, ed è destinata a compensare, mediante conveniente compressione e rotazione, la residua e inevitabile birifrangenza della vaschetta V. La seconda lastrina D è portata dalla montatura del nicol B, può girare in essa e segue il movimento di B quando questo ruota. Essa può venire come ho detto compressa; e la compressione si esercita mediante una vite che lavora su di una molla a spirale di acciajo, interposta fra la vite e il vetro. Dallo schiacciamento della molla, e da apposita tabella,

costruita empiricamente in precedenza, si può conoscere immediatamente il valore della birifrangenza, generata nel vetro. Si intende che D funziona come compensatore della birifrangenza che si studia, generata dal campo nel liquido della vaschetta.

Quando la molla del compensatore D è del tutto schiacciata, la birifrangenza generata è di circa un quarto d'onda nel giallo; mediante compressioni minori si può apprezzare in condizioni favorevoli, sino a $^1/_{250}$ di lunghezza d'onda.

In fine dirò che tanto l'analizzatore che il polarizzatore, sono montati su cerchi graduati; e che la graduazione circolare dell'analizzatore permette di misurare rotazioni di questo, sino a un minuto primo e anche meno.

Modo di sperimentare. — È ora ovvio il modo di sperimentare. Introdotto il liquido nella vaschetta, e regolato il sistema dei nicol e dei compensatori all'oscurità, se il piano di polarizzazione è parallelo alle linee di forza o normale, non si vede ricomparire mai la luce eccitando il campo, a meno che l'asse ottico del sistema sia un po' inclinato sulle linee di forza; in tal caso si ha da fare con una traccia di rotazione Faraday. Si corregge allora questa dissimetria, spostando convenientemente le varie parti dell'apparecchio. Ponendo invece i nicol a 45° sulle linee di forza, se il liquido è attivo, si vede ricomparire la luce. Essa si può far sparire comprimendo D parallelamente o normalmente alle linee di forza. Questi due casi corrispondono a comportamenti del liquido, sotto l'azione del campo, simili a quelli di cristalli ad un asse parallelo alle linee di forza, rispettivamente positivi o negativi. Se mediante qualsiasi compressione di D, la luce non iscompare sia in parte che totalmente, o si ha da fare ancora con la dissimetria di cui ho già detto, e allora basta girare l'analizzatore in un senso piuttosto che nell'altro, a seconda del senso del campo, per farla scomparire e quindi accorgersene; o il fenomeno è dovuto a *rotazione bimagnetica*. Tralascio di occuparmi di quest'ultimo caso, e intenderò che per ora si volga la nostra attenzione ai soli liquidi dotati di netta birifrangenza magnetica.

Infine avverto che il compensatore D serve evidentemente solo sino a birifrangenze inferiori a $^1/_4$ di lunghezza d'onda. Per valori maggiori si procede alla misura come verrà indicato in altra Nota.

Liquidi attivi. — Incominciai le ricerche sperimentando su soluzioni di cloruro ferrico. Se questo sale è puro, e se quelle non contengono ossicloruri disciolti, la qualcosa può essere causata dall'età eccessiva del prodotto, o da prolungata azione del calore o della luce, le soluzioni si mostrano completamente inattive. In altro scritto dirò quali sieno le proprietà magneto-ottiche di soluzioni di cloruro ferrico alterato.

La soluzione di cloruro ferroso preparata di recente, facendo agire l'acido cloridrico disciolto in acqua, su piccoli chiodi di ferro in eccesso, filtrata e diluita, tanto che il sale non cristallizzi a freddo, dà spesso una traccia di birifrangenza positiva. Basta una piccolissima compressione del vetro del compensatore, parallelamente alle linee di forza, per far scomparire la luce comparsa per l'eccitazione del campo. Se questo ha il valore massimo (18,000 unità), la differenza di cammino dei due raggi ordinario e straordinario è uguale a circa 2 o 3 centesimi di lunghezza d'onda nel giallo.

Essendo il cloruro ferroso eminentemente ossidabile all'aria, e tenuto conto delle circostanze che danno luogo ai fenomeni magneto-ottici di cui è oggetto questo studio, e delle quali dirò in seguito, mi è sorto il dubbio che la birifrangenza del cloruro ferroso possa non esser dovuta alla sola presenza di questo sale nella soluzione acquosa, e che forse minime tracce di ossidi superiori intervengano nella determinazione del fenomeno. È difficile risolvere una tal questione, anche perchè si tratta di un fenomeno debolissimo, che talvolta manca.

Ferro dializzato. — Ma la soluzione che se non sempre, spessissimo presenta in una guisa netta, e talvolta marcatissima la birifrangenza, è il ferro dializzato.

E poichè questo fenomeno può osservarsi in misura variabilissima, dipendentemente dalla natura del ferro dializzato e dalla intensità del campo, dirò anzitutto delle varie forme con cui esso si presenta.

1° tipo di ferro dializzato attivo. — Esso dà una netta birifrangenza positiva, regolarmente crescente con la intensità del campo. In ogni caso si può compensare il fenomeno mediante compressione del vetro D parallelamente alle linee di forza.

2° tipo. — Esso si comporta come il primo tipo, colla differenza del segno della birifrangenza. Essa è sempre negativa, e per compensarla, occorre comprimere D normalmente alle linee di forza.

3° tipo. — I campioni di questo tipo presentano per campi deboli una birifrangenza positiva. Successivamente, al crescere del campo, questa decresce, e vi è un certo valore, diverso da zero, dell'azione magnetica per cui la birifrangenza ritorna a zero (punto di inversione). Continuando a far crescere il campo, la birifrangenza diventa negativa e cresce regolarmente, in valore assoluto, sino ai campi più intensi.

4° tipo. — Si ha da fare in questo caso con ferri dializzati i quali presentano birifrangenza non molto forte, mista a *rotazione bimagnetica.* Di essi non vogliamo, come ho già detto, occuparci per ora.

Tra i numerosi campioni di ferro dializzato su cui ho sperimentato, non ne ho mai osservato alcuno che presenti in principio birifrangenza negativa e al crescere del campo la positiva. Ma, ripeto, è tale la varietà dei fenomeni

da me osservati, che non è da escludersi che accurate ricerche posteriori possano svelare l'esistenza di questo quinto tipo; benchè io non creda ciò molto probalile.

Origine dei vari tipi di ferro dializzato. — I modi di preparazione del ferro dializzato sono parecchi. Ma sembra che più che il modo di preparazione, influisca sulla attività dei varî tipi, la data più o meno recente di preparazione del prodotto e del cloruro ferrico adoperato per ottenere quello. Io ho ottenuto il ferro dializzato nel modo seguente. Si preparino tre volumi di una soluzione di cloruro ferrico della densità 1,280 e si trattino con un volume di ammoniaca alla densità 0,96. L'ossido ferrico che così precipita si ridisciogliе, agitando il matraccio a freddo, nel cloruro ferrico eccedente. A tal punto il liquido è ancora inattivo, non essendo stata in nessun caso osservata traccia di birifrangenza.

Dializzando la soluzione, sia all'acqua corrente, che all'acqua distillata, se la membrana di dialisi è buona (e all'uopo serve benissimo una pergamena animale di mm. 0,08 di spessore e non più), già dopo 24 ore si può, il più delle volte, osservare il fenomeno della birifrangenza.

Prolungando l'operazione della dialisi si migliora il fenomeno, e per dire il vero non sono riuscito, nei pochi mesi da me impiegati in queste ricerche, ad ottenere del ferro completamente dializzato. Tutti i campioni da me preparati trattati con acido nitrico, onde trasformare l'ossido ferrico in nitrato, precipitano per l'aggiunta di poche gocce di soluzione di nitrato di argento, restando così svelata la presenza di cloro, talvolta in misura considerevole. Dialisi prolungata anche per 20 giorni, non fu dunque capace di asportare completamente dal liquido i cloruri.

Onde sperimentare con i vari tipi di ferri dializzati, occorre sempre diluirli con acqua; giacchè la vaschetta V riempita, sarebbe altrimenti completamente opaca alla luce. Nelle misure che riporterò in seguito dirò della densità dei singoli campioni adoperati. Con ciò non vorrò dare un valore assolutamente preciso di quella grandezza, poichè avendo proceduto a diluizioni molto spinte, tenni come valore della densità in ogni caso, quello derivante dalla conoscenza della diluizione stessa, supponendo che resti costantemente uguale all'unità la densità dell'acqua pura.

Il ferro dializzato da me ottenuto, nei casi più favorevoli, portato alla densità 1,002 presenta una birifrangenza positiva nel giallo uguale a 0,12 λ; e ciò ben inteso per la vaschetta di 7 cm. di lunghezza, e sotto l'azione del campo di 18,000 u.

Esso appartiene al *primo tipo*; e mai ottenni colla preparazione indicata campioni degli altri tipi. Anzi accadde talvolta che accurate preparazioni si mostrarono completamente inattive. La spiegazione di tal fatto è da ricercarsi studiando la provenienza del cloruro ferrico adoperato.

Quando quel sale fu ritirato dalle rivendite che si trovano in Roma, il ferro dializzato si mostrò attivo. Cloruro ferrico proveniente dalla casa Kahlbaum di Berlino, posseduto dall' Istituto Chimico Farmaceutico di Roma già da qualche anno, diede risultati meno soddisfacenti, benchè fosse ancora notevole la birifrangenza positiva. E infine avendo ritirato quel sale direttamente dalla casa Kahlbaum, il ferro dializzato ottenuto si mostrò quasi completamente inattivo. Per cui debbo concludere, con una certa probabilità, che maggiore è l'età del sale ferrico, e più spiccatamente si osserva il fenomeno di cui è questione.

Non mancai infine di sperimentare con campioni di ferro dializzato ritirati direttamente dal commercio, e fui molto contento di ciò, poichè mi accorsi che quei campioni presentano spesso fenomeni spiccatissimi.

In commercio si trova una grande varietà di quei campioni, giacchè, come è noto, il ferro dializzato era un farmaco una volta molto adoperato, e che ora comincia a cadere in disuso.

Il caso più comune che si osserva, sperimentando su tali campioni, è ancora quello del primo tipo, ed è abbastanza facile trovare, per una densità del liquido uguale a 1,002, che la vaschetta V presenti una birifrangenza di circa 0,25 λ nel giallo, sotto l' azione di 18,000 u. In tali condizioni girando comunque l' analizzatore, non si riesce a far variare sensibilmente la luce ricomparsa, salvo lievi variazioni di tinta, dovute ai diversi valori della birifrangenza per i diversi colori.

Tra i ferri dializzati che comunemente provengono dal commercio, è più difficile ritrovare il secondo o il terzo tipo. Questi sono invece offerti dallo studio di campioni di *Ferro Bravais*, e di *Ferro Carlo Erba*. Essendo questi liquidi specialità delle rispettive case, è più facile ritrovarne nelle farmacie dei vecchi campioni. E mi sia permesso di insistere sul seguente particolare, che credo sia essenziale per chi desidera fare ricerche sull' argomento.

Il ferro Bravais è conosciuto da oltre 30 anni. Esso vien posto in commercio in iscatole chiuse, contenenti una piccola boccetta col liquido. Ora, unita alla boccetta si trova una piccola monografia a stampa, dalla quale non risulta chiaramente l' epoca in cui il campione è stato preparato, ma dall' esame dei diplomi o delle medaglie ottenute dall' inventore, si può con grande probabilità presumere un limite superiore dell' età del prodotto.

È così che ritengo che alcuni campioni da me sperimentati, non hanno una età inferiore ai 16 o 18 anni, sino ad arrivare ad altri di un solo anno.

Il ferro Bravais vecchio, di età superiore cioè ai dieci anni, portato alle densità 1,001, col solito campo massimo e nella vaschetta V, ha talvolta un potere birifrangente negativo, uguale a dodici lunghezze d' onda nel verde!

Per campi deboli si ha invece quasi sempre birifrangenza positiva; ma questa parte pel fenomeno è di fronte all'altra pochissimo accentuata.

Quel liquido appartiene dunque al *terzo tipo*. Sperimentando invece su campioni di Ferro Bravais recente, posteriori cioè al 1900, ne potei trovare, benchè raramente, taluno del *secondo tipo*, e in ogni modo i fenomeni da essi forniti sono sempre molto più deboli di quelli dei campioni vecchi.

Il *Ferro Erba* mi ha dato risultati analoghi. Di esso non ne trovai di antecedente al 1887; e i suoi campioni si mostrarono meno attivi del *Bravais*.

Per completare questa esposizione, voglio accennare al fatto che fra tutti i liquidi su cui ho sperimentato, solo il Ferro Bravais vecchio, fu trovato assolutamente privo di cloro. I campioni recenti, a causa forse del peggiorato modo di preparazione, precipitano spesso abbondantemente se disciolti prima nell'acido nitrico e trattati dopo con nitrato d'argento. Rimane dunque il dubbio che anche l'assoluta assenza del cloro, o in altri termini la purezza dell'ossido ferrico allo stato colloidale, possa far sì che col tempo il prodotto divenga attivo.

Essendo ormai abituato alla conoscenza dei campioni attivi, posso dire che spesso un semplice esame preventivo basta, per giudicare se il liquido presenterà fenomeni magneto-ottici notevoli. Ed anzitutto mentre il ferro dializzato recente è di aspetto limpidissimo, colorato in un bel rosso-rubino, quello vecchio ha un aspetto torbido ed un colore più scuro. Si tratta solamente dell'aspetto, perchè filtrato ripetutamente riman sempre lo stesso. L'apparenza torbida la si rileva esaminando il liquido alla luce per riflessione e non per trasparenza.

Chimicamente possono differenziarsi i ferri dializzati nella maniera seguente. Tutti i campioni trattati con acido nitrico concentrato, precipitano; se essi sono inattivi il precipitato si ridiscioglie *immediatamente* senza bisogno di scaldare. Per poco che il liquido sia attivo, sperimentando in una piccola provetta, occorrono già trenta o quaranta secondi prima che avvenga la completa trasformazione dell'ossido ferrico in nitrato. E se poi si ha da fare coi ferri Bravais, Erba, molto vecchi, si deve far bollire il liquido per dieci minuti primi circa, nella provetta, per ottenere lo stesso scopo.

Si vede dunque che probabilmente, coll'invecchiare del prodotto, le molecole o particelle minime di ossido ferrico, contenute allo stato colloidale nell'acqua, si modificano, in guista da resistere molto di più all'azione degli acidi, e da generare i fenomeni di birifrangenza.

In una prossima Nota dirò delle leggi a cui questi fenomeni obbediscono.

Fisica. — *Osservazioni sulla rotazione magnetica del piano di polarizzazione nell' interno di una riga di assorbimento.* Nota di P. Zeeman, presentata dal Socio W. Voigt.

1. Il prof. Voigt ha sviluppato una teoria molto comprensiva dei fenomeni magneto-ottici, i cui risultati sono stati confermati in modo assai completo dall' osservazione. Solo per la rotazione magnetica del piano di polarizzazione le osservazioni di Schmauss e di Corbino hanno condotto a risultati, che da questi autori furono considerati in contraddizione colla teoria. Ora una contraddizione in questo campo speciale, strettamente collegato con altri fenomeni, sarebbe abbastanza strana. Bisogna però riconoscere di fronte al Corbino che appariva molto desiderabile di constatare direttamente la rotazione negativa prevista dal Voigt.

Occupato da lungo tempo in ricerche sopra questo argomento sono giunto in fine a risultati, che presentano una coincidenza qualitativa così completa colla teoria del Voigt, quale non si potrebbe desiderare maggiore. Mi sia permesso di riferire qui in via preliminare questi risultati.

2. Nelle mie esperienze, in cui il signor Hallo mi ha aiutato con grande diligenza, ho adoperato, come il Corbino, frange di interferenza prodotte da un sistema di prismi di quarzo a spigolo orizzontale. Questo sistema fu posto nell' immediata prossimità della fessura dell' apparecchio spettroscopico (un reticolo di Rowland con raggio di m. 6,5 e 14400 linee per pollice). Dietro alla fessura, fra questa ed il reticolo era posto un piccolo nicol; la montatura del reticolo era quella adottata da Runge e Paschen (Kayser, *Spectralanalyse*, I, 482), in cui la luce cade parallelamente. Come sorgente luminosa serviva per lo più un arco ed in alcuni casi luce solare. La distanza delle espansioni polari forate era nelle esperienze, che descriverò in prima linea, di circa 4 mm. ed il campo intorno a 18000 C. G. S. In questo campo venne posta una fiamma a gas ed ossigeno. Allontanando il nicol polarizzatore ed il sistema dei prismi di quarzo e colorando la fiamma mediante un' asta di vetro, si vedevano comparire le due componenti delle doppiette, in cui si risolvono le linee D sotto l' azione del campo. Fra le linee delle doppiette comparivano le strie di assorbimento molto sottili appartenenti alla sorgente luminosa. Dopo posto il nicol polarizzatore ed il sistema di prismi di quarzo, si producevano nel campo visivo le frange di interferenza orizzontali.

Per la D_1 si osservavano allora i seguenti fenomeni variando in modo continuo la densità dei vapori sodici, mentre si manteneva costante l' intensità del campo.

Sinchè il vapore del sodio era pochissimo denso, si osservava nella posizione della stria invertita una flessione molto leggera della frangia di interferenza — diciamo verso il basso —, e nel medesimo tempo le linee della doppietta erano un po' più marcate che non prima dell' introduzione del sistema di prismi. Il punto in cui esse erano più marcate, era immediatamente al disopra della frangia di interferenza; più in su esse perdevano rapidamente in intensità.

Crescendo ora la densità del vapore (pur mantenendola ancora molto piccola), le parti esterne della frangia di interferenza contigue alle due componenti si piegavano verso l'alto; nel medesimo tempo la porzione interna si staccava in modo che veniva a mancare la continuazione fra questa e le parti esterne. Gli estremi del tratto interno poi apparivano piegati verso il basso.

Crescendo ancora la densità del vapore, il tratto interno della frangia cadeva rapidamente verso il basso ed assumeva una forma simile a quella di una freccia con punta diretta verso l' alto. Gli estremi della frangia interna intanto erano scomparsi, mentre le frangie esterne si innalzavano sempre più. Finalmente scompariva anche la parte a forma di freccia del tratto interno, mentre questo cadeva sempre più in basso. A questo punto tutto lo spazio interno compreso fra le frangie esterne appariva debolmente ed uniformemente luminoso: solo la linea invertita della sorgente luminosa restava oscura. Un ulteriore aumento della densità del vapore andava però oscurando il campo visivo (vedi al 5).

In un campo di 18000 unità si poteva seguire il movimento del tratto interno della frangia verso il basso per uno spazio eguale alla distanza di 3 frangie. Questo corrisponde ad una rotazione negativa di circa $3 \times 180°$, in cifra tonda 500°. Regolando convenientemente la quantità di sodio fornita alla fiamma, si poteva osservare a lungo ciascuno degli stadî ora descritti.

Per la D_2 le cose si presentavano all' incirca nel medesimo modo; però il fenomeno presentava un carattere proprio. Ricorderò qui solo la forma un po' diversa del tratto interno, come pure la sparizione più rapida di essa in confronto colla D_1.

3. Mantenendo costante la densità di vapore per quanto era possibile, si potè constatare che la rotazione negativa decresce col crescere dell' intensità del campo. Questa diminuzione della rotazione poteva venire constatata direttamente, senza misure, facendo salire l' intensità del campo p. e. da 18000 a 25000 unità. Questa variazione è particolarmente netta per valori elevati della rotazione negativa stessa; chè, se questa era piccola, si poteva osservare una variazione molto minore per un medesimo cambiamento del campo.

4. Le osservazioni riferite al 2. ed al 3. sono pienamente d' accordo con la teoria del Voigt. Il valore elevatissimo della rotazione negativa ed il segno, secondo cui questa varia al crescere del campo furono previsti da detta teoria. Per paragonare teoria ed osservazione sotto questo punto di vista,

basta conoscere il valore di P, per il quale si deve fare questo paragone. Secondo l'aspetto del fenomeno io ho potuto in ogni caso, riferendomi alla figura del Voigt, giudicare quale P io dovessi scegliere. Ai valori più grandi della rotazione negativa osservati (vedi al 2) corrispondono valori di P, che si possono stimare a 5 o 7; mentre alle rotazioni più piccole ancora facilmente osservabili, corrisponderebbe, in campo intenso, un valore intorno a 1,73.

5. Con vapore sodico molto denso, per cui veniva oltrepassato l'ultimo stadio descritto al 2. ottenni fenomeni, che si possono ritenere identici a quelli osservati dal Corbino. Allora nella mia disposizione era necessario allargare alquanto la fenditura per ottenere un'intensità luminosa sufficiente.

Presso alla metà della stria di assorbimento si nota un tratto orizzontale di una frangia d'interferenza, il quale viene apparentemente spostato verso l'alto sotto l'azione del campo. Questo tratto orizzontale è però molto più pallido e si presenta meno nettamente che non il tratto interno descritto al 2. I valori numerici degli spostamenti da me osservati sono dello stesso ordine di quelli comunicati dal Corbino. Però questi fenomeni non sono da considerarsi come contraddicenti alla teoria. Le condizioni sono qui molto meno semplici e molte spiegazioni possibili si presentano alla mente; per limitarne la scelta, sarebbe desiderabile istituire ulteriori osservazioni.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota III del dott. M. CONTARINI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

In altre due Note, pubblicate con lo stesso titolo nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (1), ho studiato il modo d'una *catena di corpi rigidi* comunque articolati fra loro e in particolare d'una catena composta di due pendoli sferici. Proseguendo ora nell'applicazione dei risultati generali stabiliti fin da principio, mi propongo di studiare sistematicamente, in questa Nota e in altre che eventualmente seguiranno, la teoria dei varî strumenti sismici, considerandoli come costituiti ciascuno da un *unico corpo rigido* sospeso *almeno per un punto* al terreno, cioè supponendo che ciascuno d'essi realizzi il sistema dinamico della catena ridotta ad un corpo solo.

Per evitare ripetizioni, suppongo note al lettore le altre due pubblicazioni di questa serie, e quindi, in particolare, il significato dei simboli e delle locuzioni che verranno usati in seguito: di più convengo di omettere l'indice r, che serviva a fissare l'ordine dei vari corpi costituenti la catena, perchè d'ora in poi esso avrebbe sempre il valore $r = 1$.

(1) Vedi seduta del 4 maggio, pag. 380 e del 18 maggio, pag. 433. Queste Note verranno sempre indicate per brevità col loro numero d'ordine I e II.

11. Ricordando la equazione (8) e la convenzione testè fatta, si trova che il movimento di qualunque strumento sismico è retto dall'equazione simbolica

$$\mathrm{H}\delta\lambda + \mathrm{K}\delta\mu + \mathrm{L}\delta\nu = 0 \tag{11}$$

essendo (v. la (E'), I, pag. 385)

$$\mathrm{H} = \sum_{\mathrm{C}_i} (\eta_i - \eta)(Z_i - m_i \zeta''_i) - \sum_{\mathrm{C}_i} (\zeta_i - \zeta)(H_i - m_i \eta''_i), \text{ etc.},$$

$$\xi_i - \xi = x_i + \chi z_i - \varrho y_i, \text{ etc.} \tag{12}$$

Queste equazioni furono dedotte supponendo soltanto che le rotazioni siano infinitesime e che i varî sistemi d'assi cartesiani coincidano nel caso di traslazioni e rotazioni identicamente nulle.

Venendo ora ad esaminare le forze a cui uno strumento sismico è soggetto, si trova che esse possono in qualsiasi caso ridursi alle seguenti:

1°) la gravità, cioè il peso dello strumento;

2°) le varie resistenze passive, che si oppongono al suo movimento apparente o relativo, e che si possono ritenere infinitesime rispetto alla gravità [1].

Siccome il movimento relativo è una rotazione infinitesima intorno all'origine, così la *risultante di queste resistenze* sarà appunto *una coppia di momento infinitesimo intorno all'asse permanente o istantaneo di rotazione.*

Senza fare alcuna ipotesi sulla natura della coppia resistente, per maggiore comodità di calcolo la decompongo in due coppie distinte, alle quali sostituiscono due forze di momento eguale [2], applicate nei punti

[1] Infatti queste resistenze si possono raccogliere in tre gruppi: *a*) l'attrito o l'elasticità degli organi di attacco (punte, perni, fili o molle di sospensione); *b*) l'attrito degli organi registratori del movimento; *c*) la resistenza dell'aria. Si osservi ora che il movimento assoluto degli strumenti si compone d'un movimento relativo al terreno e del movimento sismico: sarebbe assurdo il pensare che quando il movimento apparente è nullo, cioè quando lo strumento è immobile oppure vien trascinato rigidamente nel moto del terreno, possano agire le resistenze *a*) e *b*) che sono di natura affatto strumentale; quindi per queste due la prima parte dell'asserzione apparisce evidente. Invece non è evidente per la *c*): ma si badi che probabilmente durante un movimento microsismico la massa d'aria circostante allo strumento viene trascinata come un tutto rigido insieme con la custodia dove lo strumento è racchiuso, cosicchè anch'essa effettivamente viene ad opporsi soltanto al moto relativo; del resto l'estrema piccolezza di questa resistenza rende superflua ogni considerazione a suo riguardo. Quanto alla seconda asserzione, essa è praticamente giustificata da tutti gli strumenti dei quali intendo occuparmi; ad ogni modo la assumo come un *postulato sperimentale.*

[2] Veramente non si potrebbe *a priori* sostituire ad una coppia una unica forza; ma nel caso attuale la sostituzione è legittima perchè le equazioni che seguiranno tosto

$P_1(x_1 y_1 z_1)$ e $P_3(x_3 y_3 z_3)$ di componenti infinitesime $(\Xi_1 H_1 Z_1)$, $(\Xi_3 H_3 Z_3)$. Allora, chiamando (Ξ_2, H_2, Z_2) le componenti del peso, che si può ritenere applicato al baricentro $P_2(x_2 y_2 z_2)$, supponendo che gli assi solidali col corpo siano paralleli agli assi principali d' inerzia e che uno d'essi passi per il baricentro, *senza fare alcuna ipotesi sull' ordine di grandezza delle traslazioni*, abbiamo

$$H = \sum_1^3{}_i Z_i(\eta_i - \eta) - \sum_1^3{}_i H_i(\zeta_i - \zeta) +$$

$$+ \eta'' M(z_2 - \chi x_2 + \pi y_2) - \zeta'' M(y_2 + \varrho x_2 - \pi z_2) - \pi'' M^{(x)}, \text{ etc.}$$

Sostituendo poi ai binomi $(\xi_i - \xi), \ldots$ le loro espressioni date dalle (12) e omettendo i termini che contengono i prodotti delle rotazioni per le forze infinitesime, avremo infine:

$$(13)\quad \begin{cases} H = \sum_1^3{}_i (Z_i y_i - H_i z_i) + x_2(H_2 \chi + Z_2 \varrho) - \pi(H_2 y_2 + Z_2 z_2) + \\ + \eta'' M(z_2 + \pi y_2 - \chi x_2) + \zeta'' M(-y_2 - \varrho x_2 + \pi z_2) - \pi'' M^{(x)}, \\ K = \sum_1^3{}_i (\Xi_i z_i - Z_i x_i) + y_2(Z_2 \varrho + \Xi_2 \pi) - \chi(Z_2 z_2 + \Xi_2 x_2) + \\ + \zeta'' M(x_2 + \chi z_2 - \varrho y_2) + \xi'' M(-z_2 - \pi y_2 + \chi x_2) - \chi'' M^{(y)}, \\ L = \sum_1^3{}_i (H_i x_i - \Xi_i y_i) + z_2(\Xi_2 \pi + H_2 \chi) - \varrho(\Xi_2 x_2 + H_2 y_2) + \\ + \xi'' M(y_2 + \varrho x_2 - \pi z_2) + \eta'' M(-x_2 - \chi z_2 + \varrho y_2) - \varrho'' M^{(z)}. \end{cases}$$

12. Prima di procedere nella trattazione generale, conviene fare alcune considerazioni sulle varie categorie di strumenti. Il loro movimento è sempre una rotazione intorno all'origine delle coordinate: però si possono distinguere tre casi speciali corrispondenti ai diversi gradi di libertà.

Se il corpo è sospeso per un punto solo, sono arbitrarie tutte e tre le rotazioni elementari apparenti, e il moto è retto dalle tre equazioni indipendenti

$$H = K = L = 0.$$

Se il corpo oscilla intorno a una sua retta e questa può rotare intorno a un' altra retta fissa nel terreno e giacente in un piano con la prima (p. e. nel caso d' una sospensione cardanica), esistono due gradi di libertà,

---

avrebbero l'identica forma anche se, in luogo delle due forze considerate, ne esistessero quattro, di componenti $(\pm \frac{1}{2}\Xi_1, \ldots..)$, $(\pm \frac{1}{2}\Xi_3, \ldots..)$ applicate rispettivamente nei punti $(\pm x_1, \ldots.)$, $(\pm x_3, \ldots.)$, e costituenti appunto due coppie di momenti eguali ai momenti delle due forze.

cioè il moto è retto da due equazioni differenziali i cui primi membri sono combinazioni lineari di H, K, L, variabili a seconda della direzione degli assi di rotazione.

Infine se il corpo oscilla intorno ad una sua retta fissata al terreno, è arbitraria soltanto la sua rotazione ω intorno a questa retta: chiamando p, q, r i coseni di direzione (costanti) dell'asse di sospensione rispetto agli assi X, Y, Z, solidali col terreno, abbiamo

$$\lambda = p\omega\,, \quad \mu = q\omega\,, \quad \nu = r\omega\,;$$

quindi l'equazione (11) dà luogo all'unica equazione effettiva del moto:

$$p\mathrm{H} + q\mathrm{K} + r\mathrm{L} = 0\,,$$

nella quale si intendono sostituiti a λ, μ, ν le loro espressioni sopra scritte.

13. Alla prima categoria di strumenti appartengono i pendoli verticali (p. e. Brassart, Agamennone, Vicentini), la cui teoria fu già da me studiata in altri lavori [1], ma che riprendo in questa trattazione sommaria per darle maggior generalità ed esattezza.

Supponendo, come farò sempre d'ora in poi, che l'asse delle ζ sia diretto secondo la gravità, abbiamo intanto:

$$\Xi_2 = H_2 = 0\,, \quad Z_2 = \mathrm{M}g \tag{14}$$

Decomponendo poi la coppia resistente in una coppia intorno ad un asse orizzontale e un'altra intorno ad un asse verticale, supporrò che il punto $\mathrm{P}_1\,(x_1\,y_1\,z_1)$ sia sull'asse delle z e coincida col baricentro P_2, e il punto $\mathrm{P}_3\,(x_3\,y_3\,z_3)$ sia sull'asse delle x; cosicchè chiamando, come farò sempre, l la distanza del baricentro dall'origine, abbiamo:

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = y_3 = z_3 = 0\,,$$

$$z_1 = z_2 = l\,.$$

Ricordo infine le eguaglianze

$$\pi = \alpha + \lambda\,, \quad \chi = \beta + \mu\,, \quad \varrho = \gamma + \nu \tag{15}$$

e così dalle (13) si ricavano le equazioni effettive del moto:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi''\,m_y + \beta'' + \beta g m_y - \zeta''\,\chi m_y + \Phi = 0 \\ -\eta''\,m_x + \alpha'' + \alpha g m_x - \zeta''\,\pi m_x + \Psi = 0 \\ \gamma'' + (\xi''\,\pi + \eta''\,\chi)\,m_z + X = 0\,, \end{array}\right. \tag{16}$$

avendo posto

$$m_x = \frac{\mathrm{M}l}{\mathrm{M}^{(x)}}\,, \quad m_y = \frac{\mathrm{M}l}{\mathrm{M}^{(y)}}\,, \quad m_z = \frac{\mathrm{M}l}{\mathrm{M}^{(z)}}\,, \tag{Q}$$

[1] *Sulla determinazione dei moti sismici*, Note pubblicate in questi Rendiconti, vol. X, 1° sem., serie 5ª, fasc. 5° e 6°; v. anche II, pag. 439.

e avendo raccolto i termini che non dipendono esplicitamente dalle componenti del moto sismico nelle funzioni:

$$(R)\qquad \begin{cases} \Phi = \mu'' + \mu g m_y + \dfrac{Z_3 x_3 - \Xi_1 l}{M^{(y)}} \\ \Psi = \lambda'' + \lambda g m_x + \dfrac{H_1 l}{M^{(x)}} \\ X = \nu'' - \dfrac{H_3 x_3}{M^{(z)}} \end{cases}$$

Fra i vari casi che si potrebbero esaminare particolarmente, è interessante quello in cui il punto di sospensione coincide col baricentro.

Le equazioni dinamiche d'un tale strumento si possono ottenere dalle precedenti, purchè si supponga $l = 0$, e purchè il punto P_1, pure restando sull'asse delle z, si trovi a una distanza dall'origine z_1 diversa da zero. Così procedendo si ottiene:

$$(16_1)\qquad \beta'' + \Phi_1 = 0\,,\quad \alpha'' + \Psi_1 = 0\,,\quad \gamma'' + X_1 = 0\,,$$

essendo

$$(R_1)\qquad \begin{cases} \Phi_1 = \mu'' + \dfrac{Z_3 x_3 - \Xi_1 z_1}{M^{(y)}}\,,\quad \Psi_1 = \lambda'' + \dfrac{H_1 z_1}{M^{(x)}} \\ X_1 = \nu'' - \dfrac{H_3 x_3}{M^{(z)}}\,, \end{cases}$$

Da queste equazioni apparisce che « un corpo rigido sospeso per il suo baricentro si mostra inerte di fronte a qualsiasi movimento traslatorio del terreno, e quindi *è atto a registrare soltanto le rotazioni* » (1).

14. Alla seconda categoria di strumenti si potrebbero ascrivere con grande approssimazione quelli costituiti da una sbarra elastica cilindrica o prismatica, fissata al terreno per una estremità e caricata all'altro estremo da una massa oscillante.

Infatti durante i piccoli movimenti dell'estremità libera, corrispondenti all'oscillazione fondamentale, si può prescindere dalle deformazioni elastiche della sbarra, le quali sono infinitesime rispetto alle sue dimensioni, e supporre che il tutto ruoti rigidamente intorno ad un asse istantaneo giacente nel piano della sezione incastrata (2). Lo studio del suo movimento sarebbe assai più difficile nel caso di vibrazioni corrispondenti alle armoniche supe-

(1) Questa conseguenza mi pare importante anche per le applicazioni pratiche, perchè uno strumento di tal natura, servirebbe a risolvere la questione tanto dibattuta sulle onde lente caratteristiche dei terremoti lontani.

(2) A rigore bisognerebbe tener conto non solo della *flessione* ma anche della *torsione* della sbarra, in virtù della quale il movimento acquista un terzo grado di libertà: ma la sezione della sbarra sarà in generale tanto grande da rendere la torsione trascurabile.

riori, cioè nel caso che si formassero due o più *ventri* ed altrettanti *nodi*; ma questo caso resta fin d'ora escluso dalla mia trattazione, come del resto fu implicitamente esclusa la considerazione delle vibrazioni trasversali dell'asta o dei fili di sospensione nella teoria dei pendoli sferici ([1]).

In pratica possono avere importanza questi due casi;

1°. Sbarra rettilinea, cilindrica o prismatica regolare, fissata e caricata in modo che allo stato di quiete il suo asse longitudinale sia verticale.

In tal caso è praticamente nulla la rotazione ν, e restano arbitrarie e indipendenti le rotazioni λ e μ. Quindi il moto dello strumento è retto dalle prime due fra le equazioni (16), purchè si ricordi: che la posizione del baricentro e i momenti d'inerzia si devono calcolare supponendo la sbarra rigida, rettilinea e priva della porzione incastrata, e che le rotazioni apparenti λ e μ si ottengono dividendo per $\mp l$ le traslazioni apparenti del baricentro.

2°. Sbarra previamente incurvata e incastrata in modo che, caricandone l'estremità libera, il suo asse longitudinale diventi rettilineo e orizzontale nello stato di quiete.

Supponendo che l'asse longitudinale della sbarra sia diretto secondo l'asse delle x, è praticamente nulla la rotazione λ, restano arbitrarie e indipendenti μ e ν, cosicchè le equazioni del moto sono

$$K = L = 0 .$$

Questo caso però richiede speciali considerazioni circa le forze. Infatti allo stato di quiete la gravità è equilibrata dalla reazione elastica provocata con la rettificazione forzata della sbarra; quindi durante i piccoli movimenti dell'estremità libera, che si possono ritenere infinitesimi rispetto alla flessione iniziale della sbarra, restano attive soltanto le reazioni elastiche corrispondenti alle leggere deformazioni che la sbarra subisce ([2]), oltre agli attriti degli organi registratori e alla resistenza dell'aria: tutte forze infinitesime rispetto al peso e che nella discussione generale abbiamo raccolte in un'unica coppia resistente. Notando che il movimento si riduce ad una rotazione intorno ad un asse istantaneo contenuto nel piano $X = 0$, si potrà sostituire alla coppia l'unica forza $(\Xi_1 H_1 Z_1)$, applicata in un punto P_1 dell'asse della x: se questo punto coincide col baricentro del sistema, abbiamo allora:

$$x_1 = x_2 = l ; \quad y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0 ,$$

$$\Xi_2 = H_2 = Z_2 = \Xi_3 = H_3 = Z_3 = 0 ,$$

([1]) V. a questo riguardo II, pag. 437, nota (1).

([2]) A rigore bisognerebbe dire: le reazioni elastiche corrispondenti alle deformazioni in senso orizzontale (cioè alla rotazione ν), e l'eccesso del peso sulla forza elastica o viceversa, corrispondente alle deformazioni in senso verticale (cioè alle rotazioni $+\mu$ o $-\mu$).

e le equazioni effettive del moto sono:

$$(17) \qquad \begin{cases} \eta'' m_z + \gamma'' - \xi'' \varrho m_z + \mathrm{U} = 0 \\ -\zeta'' m_y + \beta'' - \xi'' \chi m_y + \mathrm{V} = 0 , \end{cases}$$

avendo posto

$$(S) \qquad \mathrm{U} = \nu'' - \frac{H_1 l}{\mathrm{M}^{(z)}} , \quad \mathrm{V} = \mu'' + \frac{Z_1 l}{\mathrm{M}^{(y)}} ,$$

e valendo ancora le (Q).

Anche per l'applicazione di queste equazioni bisogna ricordare le osservazioni fatte per il caso della sbarra rettilinea.

15. Alla terza categoria si possono ascrivere: i *pendoli orizzontali*, dei quali mi occuperò tosto; i *pendoli verticali* a una sola componente (p. e. i sismografi Cecchi) per i quali vale la prima o la seconda delle equazioni (16); i *sismografi per la componente verticale*, sia costituiti da una sbarra elastica a sezione rettangolare previamente incurvata verso l'alto (p. e. il « Vicentini » modificato) (1), sia costituiti da un telaio rigido sorretto da molle a spirale (2), ai quali è applicabile la seconda delle (17), purchè sia trascurabile la massa delle spirali, e siano soddisfatte tutte le condizioni relative agli assi principali d'inerzia; infine *gli strumenti sospesi per un asse passante per il loro baricentro*, ai quali si applica una delle equazioni (16_1), a seconda dell'orientamento dell'asse di sospensione.

I *pendoli orizzontali* dei quali intendo occuparmi (p. e. Milne, Rebeur Paschwitz, Cancani) si possono definire generalmente come corpi rigidi sospesi per un asse *quasi* verticale non passante per il baricentro: in tal modo restano esclusi per ora quelli a sospensione bifilare, perchè effettivamente realizzano il sistema dinamico della *catena* di *tre* corpi rigidi.

Un pendolo orizzontale è in equilibrio statico quando il piano verticale passante per l'asse di rotazione contiene il baricentro. Allora se il baricentro si trova sull'asse delle x, nelle condizioni di quiete e d'equilibrio l'asse di rotazione dovrà essere contenuto nel piano $\mathrm{Y} = 0$, cioè avrà i coseni di direzione p, o, r, essendo p generalmente piccolissimo e di segno opposto ad l, ed r molto prossimo all'unità positiva.

Chiamando ω la rotazione effettiva dello strumento intorno al proprio asse, le rotazioni elementari apparenti sono

$$(18) \qquad \lambda = p\omega , \quad \mu = 0 , \quad \nu = r\omega ;$$

e quindi l'equazione del moto è

$$(19) \qquad p\mathrm{H} + r\mathrm{L} = 0 .$$

(1) V. a questo proposito la mia *lettera aperta* al prof. G. Alfani, Bollett. d. Soc. Sism. Ital. vol. VII, fasc. 7°, e i lavori in essa citati.

(2) V. a questo proposito la Nota, del dott. Agamennone: *Il Microsismometrografo a tre componenti*, ricca di citazioni bibliografiche. Rendic. Acc. d. Lincei, vol. X, 21 aprile 1901, pag. 291, oppure Bollett. d. Soc. Sism. It., vol. VII, 1901-1902, pag. 70.

Anche in questo caso alla coppia resistente possiamo sostituire un' unica forza $(\Xi_1 H_1 Z_1)$ applicata in un punto dell'asse delle x, p. e. nel baricentro: cosicchè basterà porre nelle (13)

$$x_1 = x_2 = l\,,\quad y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = 0\,,$$
$$\Xi_3 = H_3 = Z_3 = 0\,,$$

e ricordare le (15) e le (18).

Così appunto facendo, la (19) divenuta:

$$(19_1)\qquad \begin{aligned} &\eta''\, r\, \boldsymbol{M} + \alpha''\, p\, \boldsymbol{M}_x + \gamma''\, r\, \boldsymbol{M}_z - \gamma\, g p\, \boldsymbol{M} + \\ &+ \boldsymbol{M}(-\xi''\, \varrho r + \eta''\, \chi p + \zeta''\, \varrho p) + \Omega = 0 \end{aligned}$$

avendo posto per brevità

$$(T)\quad \boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{M} l}{p^2\,\mathrm{M}^{(x)} + r^2\,\mathrm{M}^{(z)}}\,,\quad \boldsymbol{M}_x = \frac{\mathrm{M}^{(x)}}{p^2\,\mathrm{M}^{(x)} + r^2\,\mathrm{M}^{(z)}}\,,\quad \boldsymbol{M}_z = \frac{\mathrm{M}^{(z)}}{p^2\,\mathrm{M}^{(x)} + r^2\,\mathrm{M}^{(z)}}\,,$$

e avendo raccolto i termini indipendenti dalle componenti del moto sismico nella funzione:

$$(U)\qquad \Omega = \omega'' - \omega\, gpr\, \boldsymbol{M} - \frac{r \boldsymbol{H}_1\, l}{p^2\,\mathrm{M}^{(x)} + r^2\,\mathrm{M}^{(z)}}\,,$$

Se gli strumenti che abbiamo supposti orientati secondo l'asse delle X fossero invece normali al piano $Y = 0$, il loro moto sarebbe retto da equazioni perfettamente analoghe a quelle trovate, che credo superfluo di riferire (1).

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche fatte sul monte Cimone nell'estate del 1901.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio Blaserna.

I. *Apparecchio di misura.* — Le misure pireliometriche sul monte Cimone vennero, nell'estate del 1901, eseguite mediante un attinometro costrutto secondo il modello del Violle, con dimensioni però un po' più piccole di quelle che comunemente soglionsi dare a questo apparecchio, e precisamente lo strumento usato ha la sfera esterna con diametro di cm. 21,3 e la sfera interna con diametro di cm. 13,7. Essendo l'attinometro stato costrutto

(1) Era già consegnata questa terza Nota, quando venni a conoscenza d'una Memoria del Principe B. Palitzin: « *Ueber seismometrische Beobachtungen* » I. Accad. d. Sc. di Pietroburgo, la quale tratta appunto la teoria matematica degli strumenti sismici. Sebbene essa prevenga in certo modo i risultati del presente lavoro, pure credetti opportuno insistere nella mia pubblicazione; ed ecco le ragioni principali: In primo luogo questa scende come corollario dal problema più generale trattato nella I Nota, e d'altra parte tutta la nuova serie di Note si collega ad un mio precedente lavoro, sconosciuto al Matematico russo. In secondo luogo per il metodo seguito, per aver considerati gli strumenti quali corpi rigidi di dimensioni finite anzichè quali punti materiali, e infine per aver tenuto conto delle resistenze passive, importantissime come sa chiunque conosca per esperienza i sismografi a registrazione meccanica, il mio lavoro risulta sostanzialmente diverso da quello citato.

diversi anni fa, col tempo ebbe ad alterarsi qualcuna delle saldature che tengono fissi alle due sfere concentriche i tre tubi di comunicazione dall'esterno all'interno dell'attinometro; per modo che si verificava un piccolissimo stillicidio di acqua (quando l'apparecchio era in azione) che bagnava parte della parete interna dello strumento; parete che, come è noto, vuole essere coperta da nero fumo e mantenuta asciutta. Per rimediare a questo inconveniente, qualora avessi voluto mantenere l'acqua nell'intercapedine delle due sfere, si sarebbe dovuto disfare quasi completamente l'attinometro; e per schivare questo lavoro ho pensato di riempire l'intercapedine con parafina invece che con acqua. Come si vedrà dai risultati dei confronti fra questo attinometro ed il pireliometro di Ångström, la sostituzione della parafina all'acqua non ha influito sulla attendibilità dei risultati che si ottennero coll'attinometro del Violle così modificato.

L'involucro sferico dell'attinometro, durante le esperienze, è sempre stato protetto da opportuno schermaglio, e l'apparecchio veniva collocato durante le osservazioni in luogo riparato dal vento per impedire che eventualmente succedesse uno scambio d'aria dall'esterno all'interno dell'attinometro, tale da potere influire sulle indicazioni del termometro quando il foro d'introduzione dei raggi solari era aperto.

Il tubo di entrata dei raggi solari (che nel modello originale del Violle si protende solo per 8 cm. al di fuori della sfera esterna) è lungo in tutto cm. 18,5 partendo dalla superficie sferica interna dell'attinometro e prolungandosi all'esterno per 11 cm. circa. Il diametro del tubo è di 57 mm. e tanto alla bocca che alla distanza di 83 mm. dalla bocca, sta saldato perpendicolarmente al tubo e coassiale con questo, un disco col diametro maggiore di 75 mm. Nel disco verso la bocca stanno praticati tre forellini alla distanza di 90° l'uno dall'altro e corrispondentemente sul secondo disco si trovano tre punti di riferimento, per modo che quando le tre immagini del sole prodotte attraverso ai tre forellini vengono a battere sui tre punti segnati, l'apparecchio è disposto così che i raggi solari percorrono il tubo parallelamente al suo asse. In fondo al tubo, vale a dire quasi formante parte della superficie sferica interna, viene applicato un disco con foro circolare, costrutto con molta cura e del quale il centro è sull'asse del tubo. Questo foro è quello che limita il fascio dei raggi solari che penetra nell'interno dell'attinometro, quando lo strumento è in azione. Con apposito schermaglio che è fissato lateralmente alla bocca del tubo, si può, quando occorre, impedire ai raggi solari di penetrare nell'apparecchio e andare a battere snl bulbo sferico annerito dal termometro.

Ho fatto costruire tre dischi con foro circolare di precisione, dei quali i diametri sono rispettivamente di 1,489 cm., 1,297 cm. e 1,102 cm.

Per collocare il serbatoio sferico del termometro in modo che il suo centro si trovi sull'asse del tubo di entrata dei raggi solari, e per togliere

l'inconveniente che il serbatoio, coperto da nero fumo, mentre viene introdotto nell'apparecchio possa toccare la parete del foro di entrata e quindi restare in parte scoperto da nero fumo, ho munito il foro di entrata del termometro di un tubo di guida, che permette di fare scorrere il termometro longitudinalmente e di spostarlo lateralmente, senza che possa toccare parete alcuna.

Dalla parte opposta del tubo di entrata dei raggi solari e sullo stesso asse di esso, sta un secondo tubo chiuso da vetro smerigliato e munito di specchio girevole attorno all'asse del tubo stesso, ed inclinabile rispetto all'asse, così da poter vedere per riflessione l'immagine quasi nera del serbatoio termometrico in campo meno oscuro e giudicare se i raggi solari colpiscono convenientemente il serbatoio.

A togliere le tanto discusse cause di errore, provenienti dai raggi che cadono troppo obliquamente sul margine della semisfera del serbatoio volta verso il sole, durante le osservazioni si applicò un foro di entrata dei raggi con diametro tale, che il diametro dell'immagine solare che si produceva al centro dello strumento, riuscisse minore del diametro del serbatoio termometrico.

Il termometro usato per le osservazioni che si fecero al Monte Cimone nel 1901 esce dalla fabbrica Ducretet e porta il n. 566. Sul tubo termometrico non stanno segnati i dati necessarî per il calcolo del valore in acqua del serbatoio, valore che ho potuto dedurre sperimentalmente, valendomi di un piccolo calorimetro di platino e servendomi di mercurio come liquido calorimetrico. I valori trovati, espressi in piccole calorie sono i seguenti:

1,121; 1,087; 1,134; 1,104

e quindi in media il valore in acqua del serbatoio termometrico si può ritenere 1,111.

Il diametro di questo serbatoio è di cm. 1,607 ed il foro applicato all'apparecchio è stato quello che ha per diametro cm. 1,489, così che l'immagine del sole al centro dell'apparecchio aveva per diametro cm. 1,521.

Per il modo di osservazione e per dedurre dalle osservazioni la quantità di energia calorifica inviata dal Sole (espressa in piccole calorie) in un minuto primo ed in direzione normale sulla superficie piana di un centimetro quadro, ammesso che la superficie del serbatoio del termometro coperta con nero fumo abbia *uno* per potere assorbente, ho seguito completamente il metodo suggerito dal Chwolson a pag. 79 e seg. del suo classico lavoro « *Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie* »(1): metodo che si può spiegare in breve nel modo seguente:

Sia q la quantità di calore che per irradiazione arriva in un minuto sopra la superficie piana di un centimetro quadrato, disposta perpendicolar-

(1) Repertorium für Meteorologie; Bd. XV. St. Petersburg, 1892.

mente ai raggi solari, e sia s la sezione normale del fascio di raggi che arriva alla superficie del serbatoio termometrico; nel tempo $d\tau$ arriverà su questa superficie la quantità di calore $qsd\tau$.

Il termometro che inizialmente, cioè immediatamente prima di essere esposto al Sole, aveva la temperatura t_0, dopo un certo tempo di esposizione avrà assunto una temperatura t maggiore di t_0. Supponiamo che t sia di pochi gradi diversa da t_0; allora per calcolare la quantità di calore che emette il serbatoio termometrico nel tempo $d\tau$, potremo applicare la legge del raffreddamento di Newton, e precisamente, se h è la quantità di calore che emette il serbatoio termometrico in un minuto da ogni cm^2 di superficie nell'ipotesi che sia $t - t_0 = 1°$ e se S è la superficie totale del serbatoio, questa quantità di calore sarà $h\mathrm{S}(t - t_0)d\tau$. E l'aumento dt di temperatura che subirà il termometro nel tempo $d\tau$ sarà

$$(1) \qquad cdt = qsd\tau - h\mathrm{S}(t - t_0)d\tau$$

nella quale c esprime il valore in acqua del serbatoio termometrico. Da questa uguaglianza possiamo dedurre la temperatura stazionaria T, che raggiungerebbe il termometro, sotto l'influenza costante dei raggi solari e della velocità di raffreddamento, ponendo $dt = 0$. Avremo così:

$$\mathrm{T} - t_0 + \frac{qs}{\mathrm{S}h} \qquad \mathrm{T} = t_0 = \frac{qs}{h\mathrm{S}}.$$

Ponendo $\frac{h\mathrm{S}}{c} = m$ ed integrando la (1) si ottiene

$$t = t_0 + \frac{qs}{h\mathrm{S}}(1 - e^{-m\tau}) = t_0 + (\mathrm{T} - t_0)(1 - e^{-m\tau}) = \mathrm{T} - (\mathrm{T} - t_0)\, e^{-m\tau},$$

Il Chwolson, dietro saggie considerazioni, consiglia di osservare le temperature t_1 e t_3 che il termometro assume rispettivamente dopo un minuto e dopo tre minuti dall'esposizione del termometro al Sole; così che sarà

$$t_1 = \mathrm{T} - (\mathrm{T} - t_0)\, e^{-m}$$
$$t_3 = \mathrm{T} - (\mathrm{T} - t_0)\, e^{-3m}.$$

Evidentemente starà anche la relazione

$$t_3 = \mathrm{T} - (\mathrm{T} - t_1)\, e^{-2m}$$

e quindi

$$t_3 - t_1 = (\mathrm{T} - t_1)(1 - e^{-2m}).$$

E poichè tanto nel primo che nel secondo membro di questa uguaglianza figurano differenze di temperatura, l'uguaglianza sussisterà, anche se si parte a contare le temperature t da un punto diverso dallo 0° solito, purchè queste temperature si valutino sempre in gradi centigradi.

Contando le temperature da t_0 e ponendo $\theta = (T - t_0)$; $\theta_1 = (t_1 - t_0)$; $\theta_3 = (t_3 - t_0)$ avremo

$$\theta_3 - \theta_1 = (\theta - \theta_1)(1 - e^{-2m})$$

$$\theta = \theta_1 + \frac{\theta_3 - \theta_1}{1 - e^{-2m}}.$$

Il valore di m si deduce dalla nota relazione

$$\theta_1 = \theta_3 e^{-m\tau}$$

quando si conosca il tempo τ in minuti che impiega il termometro (dopo rimesso lo schermaglio sulla bocca dell'attinometro) per passare, in seguito a raffreddamento, da θ_3 a θ_1.

Trovato il valore di θ si calcola q servendosi della relazione

$$T - t_0 = \theta = \frac{qs}{hS}$$

dalla quale si ricava

$$q = \frac{hS}{s}\theta = \frac{hS}{c} \cdot \frac{c}{s} \cdot \theta = m\frac{c}{s}\theta.$$

Da quanto si è esposto risulta chiaramente che per fare una determinazione attinometrica, conviene leggere la temperatura stazionaria t_0, che il termometro assume tenendo chiuso l'attinometro; e poi diretto convenientemente l'apparecchio, si toglie lo schermaglio al tempo *zero*; si mantiene l'apparecchio colla bocca volta al Sole, si legge la temperatura t_1 del termometro dopo un minuto primo, e la temperatura t_3 dopo tre minuti a partire dal tempo zero. Si lascia aperta la bocca per mezzo minuto ancora, affinchè il termometro prenda una temperatura maggiore di t_3 e poi si chiude la bocca collo schermaglio. Da questo momento il termometro comincierà a raffreddarsi e ripasserà per le temperature t_3 e t_1; conviene notare in minuti e decimi di minuto il tempo τ occorrente perchè il termometro scenda da t_3 a t_1.

Per la stima del tempo servì il cronometro Parkinson e Frodsham n. 1536.

Nella suesposta teoria si ammette l'invariabilità della temperatura t_0 che avrebbe il termometro, durante tutto il tempo delle osservazioni (quasi 10 minuti) se lo strumento rimanesse chiuso; si ammette che la superficie del serbatoio termometrico abbia *uno* per potere asserbente; si ammette che non abbia influenza alcuna la conduttività calorifica del tubo termometrico per ciò che riguarda il riscaldamento ed il raffreddamento del serbatoio termometrico; e si ammette che in ogni istante la temperatura segnata dal termometro corrisponda a quella che questo assumerebbe, se l'insieme dei costituenti il bulbo termometrico annerito sentisse immediatamente l'effetto del calore assorbito.

Tutti sanno a quante discussioni diede luogo l'attinometro di Violle (1), appunto perchè, comunque si opini, fino a pochi anni fa, era uno dei migliori che si conoscevano per lo studio della radiazione calorifica del Sole. Non intendo riassumere qui le discussioni fatte, nè tentare teoricamente di valutare le correzioni da applicarsi ai risultati provenienti dal non verificarsi praticamente tutte le condizioni suesposte (2). Valendomi del pireliometro

(1) Veggasi a pag. 59 della seguente pubblicazione: *Congrès international de météorologie*, Paris 1900. Procès-verbaux des séances et mémoires publiés par M. Alfred Angot, Secrétaire général du Congrès. Paris, Gautier-Villars, 1901. — Si consultino poi le seguenti pubblicazioni: Langley, *Researches on Solar heat and its absorption by the Earth's atmosphere.* A Report of the Mount Whitney Expedition (Professional Papers of the signal Service, N.° XV). Washington, 1884. — Chwolson, *Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie*, pag. 62-87. St. Petersburg, 1892. — Savélief, *Sur le degré de précision que l'on peut atteindre dans les observations actinométriques.* (Ann. de Ch. et de Phys., 6° série, T. XXVIII, pag. 394 et T. XXIX (1893), pag. 260. - Id., 7° série, T. IV (1895), pag. 424). — Chwolson O., *Réponse a M. Savélief* (Ann. de Ch. et de Phys., 6° série, T. XXX (1893), pag. 141). — Veggasi anche: *Rapport du Comité météorologique international* (Réunion de Saint-Pétersbourg, 1899). Alla pag. 43 (appendice VIII) vi è il *Rapport sur la radiation.*

(2) Un tentativo di modificazione sostanziale della parte calorimetrica dell'attinometro di Violle è stato fatto dal sig. prof. G. B. Rizzo. Dice il Rizzo: « Invece di esporre ai raggi del Sole il bulbo sferico di un termometro, io espongo una pallina di argento massiccio del diametro di 1,5 cent. circa, con un piccolo foro nel quale si adatta esattamente il bulbo cilindrico di un termometro molto sensibile e pronto. Il contatto del bulbo del termometro colla pallina di argento viene reso più sicuro nel modo altra volta descritto (*Mem. della Soc. degli spettroscopisti italiani*, vol. XXVI (1897), pag. 79); cioè ricoprendo dapprima il bulbo con un sottile strato di argento e poi rinforzando questo con un altro strato di metallo elettrolitico, in modo che il bulbo resta chiuso in una coppa di argento ben aderente; il bulbo così preparato viene allora introdotto nel suo forellino, poi si riempie il sottilissimo spazio che rimane fra le due superficie con un poco di polvere di argento inumidita e quindi lo si chiude con un piccolo collaretto di gomma lacca. Per rendere ben assorbente la superficie di queste palline attinometriche, si ricoprono con uno strato di nero di platino elettrolitico e su questo si depone un poco di nero di fumo, tenendo un momento le palline sopra una fiamma fumosa. » (Mem. della Soc. degli spettroscopisti italiani, vol. XXVII (1898), pag. 10). Veggasi anche la Memoria del Rizzo: *Sopra le recenti misure della costante solare* (Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, serie II, tomo XLVIII, pag. 319). Il Rizzo inoltre applicò all'attinometro un sistema che servisse per orientarlo e limitò l'apertura d'introduzione dei raggi solari, così da assicurarsi che la sfera calorimetrica fosse colpita dall'intero fascio di raggi. In complesso le modificazioni apportate dal Rizzo miglioravano le condizioni dell'attinometro, ma non raggiungevano, a mio vedere, lo scopo definitivo di poter ritenere cioè i risultati dedotti dalle osservazioni fatte con esso, come risultati assoluti; poichè, quantunque le palline di argento siano buone conduttrici del calore, lo stato termometrico di esse si rilevava dopo che il calore si era propagato al bulbo termometrico, attraverso alla polvere di argento inumidita; e quindi non veniva sottratta completamente la causa di errore proveniente dal ritardo nell'indicazione del termometro. Inoltre, mentre il Rizzo ammetteva che la superficie annerita della pallina di argento avesse potere assorbente uguale all'unità, con grande probabilità, come risulta dagli studî dell'Ångström, detta superficie non raggiungeva un così elevato potere assorbente.

di Ångström del quale mi servii a Sestola, ho fatta una serie di confronti fra questo apparecchio e l'attinometro di Violle che servì al Cimone, e da questi confronti dedussi il coefficiente di riduzione dei risultati ottenuti coll'attinometro, per avere i valori assoluti.

Avvertirò solo che per quante precauzioni si siano avute, nell'attinometro usato al Cimone si verificarono delle variazioni di temperatura nell'interno dell'attinometro, variazioni che hanno raggiunto talvolta 0°,02 al minuto. Come si sa, il Violle vuole che nell'intercapedine del suo attinometro si mantenga dell'acqua a temperatura costante, ottenendo questa condizione col cambiamento continuo dell'acqua mediante due rubinetti laterali, per uno dei quali viene fatta uscire l'acqua, mentre per l'altro entra una uguale quantità di acqua tolta da un serbatoio; oppure, che l'intercapedine si riempia di ghiaccio per mantenere costante la temperatura nell'interno dell'attinometro.

Per le ragioni che ho detto sopra, ho creduto conveniente di riempire l'intercapedine con paraffina, allontanandomi così dai precetti indicati dall'inventore dello strumento, ma sono tuttavia convinto che migliori risultati di quelli ottenuti, non avrei potuto conseguire, se al Cimone avessi voluto riempire l'intercapedine con acqua o con neve. Ho fatto notare in altra circostanza (1) che nell'attinometro Violle necessita che la superficie annerita della sfera interna abbia temperatura uguale o superiore a quella dell'aria ambiente, per essere sicuri che su detta superficie non sia depositata, per condensazione, traccia alcuna di vapore acqueo; ciò che muterebbe le condizioni di scambio di calore per irradiazione fra il serbatoio termometrico e la superficie sferica annerita che lo circonda; per conseguenza al Cimone, dove nei giorni di Sole la temperatura si mantenne sempre sopra 0°, non doveva riempire l'intercapedine colla neve (che per caso nell'estate del 1901 si era conservata in piccola quantità in qualche spaccatura volta verso il nord) nè doveva fare uso dell'acqua della cisterna che sta sotto alla torre dell'Osservatorio, essendo quest'acqua sempre assai fredda. Avrei quindi dovuto esporre sulla torre un largo serbatoio di acqua che acquistasse la temperatura dell'aria ambiente e servirmi di questa per l'uso dell'attinometro di Violle. Ora, ciò, per mancanza di personale e di utensili, sarebbe riuscito di tale incomodità al Cimone da compromettere seriamente l'esecuzione delle misure. Del resto, mi pare, che anche colla circolazione dell'acqua nell'intercapedine, ammesso pure che la temperatura dell'acqua rimanga invariata, non si possa asserire in modo assoluto, che dopo che i raggi solari sono penetrati per qualche tempo nell'interno dell'attinometro, questo se fosse

(1) *Sulla misura delle radiazioni termoluminose del Sole* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XIII (1880), pag. 583-588).

chiuso collo schermaglio, eserciterebbe sul termometro l'identica influenza che esercitava prima di dare adito all'entrata dei raggi solari. È questa una delle ipotesi che si fanno per formulare la teoria dell'attinometro di Violle, ma che praticamente non si verificherà che assai di rado.

Chimica. — *Riduzione dell'Artemisina con cloruro stannoso* (1). Nota di P. Bertolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

Come risulta dalla mia precedente pubblicazione (2), ho dimostrato che l'artemisina, contiene, al pari della santonina un CO cetonico, inquantochè dà con idrossilamina e fenilidrazina, l'ossima e l'idrazone corrispondenti.

Inoltre dimostrai che contiene anche un legame lattonico.

Per l'analogia che dai varî fatti esposti pare esistere fra le due sostanze citate, ho creduto interessante vedere se l'artemisina, sottoposta all'azione di alcuni riduttori, si comportasse nello stesso modo della santonina.

In questa seconda Nota mi limito segnatamente ad esporre i risultati delle mie esperienze ottenuti facendo agire sull'artemisina il cloruro stannoso in soluzione cloridrica; salvo fra breve di dare comunicazione di altre ricerche in corso.

Come è noto, la santonina, tanto che venga trattata con acido iodidrico e fosforo rosso (3) quanto per azione del cloruro stannoso in soluzione cloridrica (4), dà l'acido santonoso. Di questi due mezzi di riduzione ho preferito il secondo, perchè, come ha dimostrato Andreocci, dà maggiore rendimento.

Dirò subito che mentre io ritenevo di giungere ad un acido analogo al santonoso, ottenni invece, per riduzione dell'artemisina, una sostanza che ha comportamento lattonico, che contiene un ossigeno in meno, e quindi la sua composizione centesimale corrisponde a quella della santonina.

L'esperienza fu condotta in principio seguendo il metodo indicato da Andreocci (5), però dovetti osservare che per l'artemisina la riduzione avviene assai più lenta della santonina, e solo dopo un mese il prodotto che si separa rappresenta appena la terza parte della artemisina impiegata. Adope-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica-Farmaceutica, della R. Università di Catania.

(2) *Sull'Artemisina.* Rend. Acc. Lincei (1901), vol. X, 2° sem., serie 5ª, fasc. 5.°

(3) Cannizzaro e Carnelutti, *Azione dell'Acido iodidrico sulla Santonina.* Gazz. chim. ital., vol. XII, pag. 393.

(4) Andreocci, *Sulla riduzione della Santonina.* Rend. R. Acc. Lincei, 1° sem. (1893), pag. 329.

(5) Andreocci, *Su quattro acidi santonosi e sopra due nuove desmotroposantonine.* R. Acc. dei Lincei, vol. II (1895), serie 5ª, pag. 30.

rando invece soluzioni più concentrate di cloruro stannoso, anche senza aggiunta di stagno metallico, si può ottenere l'identica sostanza con ottimo rendimento ed in un tempo relativamente breve.

Gr. 20 di cloruro stannoso si sciolsero in 20 cc. di acido cloridrico fumante (D. 1,18), e al liquido, saturato a 0° con gas HCl secco, si aggiunsero gr. 3 di artemisina finamente polverizzata. Il miscuglio fu dibattuto a freddo in un recipiente a tappo smerigliato, ed allora l'artemisina si sciolse completamente producendo un liquido denso colorato in giallo-ambra. Dopo parecchie ore cominciò a separarsi alla parte superiore del liquido, una sostanza bianca, cristallina, la quale a poco a poco è andata aumentando mentre il liquido si scolorava. Dopo otto giorni l'artemisina era quasi completamente trasformata nella nuova sostanza. Questa, raccolta sopra un filtro d'amianto e lavata diverse volte con acido cloridrico fumante, finchè il filtrato non dava alcun intorbidamento per aggiunta di acqua e quindi lavata ancora con acqua, venne disseccata nel vuoto sotto una campana ad acido solforico.

La sostanza ottenuta è insolubile nell'acqua e nell'acido cloridrico, poco solubile in etere, cloroformio e benzolo, discretamente solubile nell'acido acetico e nell'alcool a 90°, bollenti.

Da questi due ultimi solventi si separa per raffreddamento sotto forma di piccoli aghi, bianchi e duri che fondono a 269°-270°.

La sostanza purificata per ripetute cristallizzazioni dall'alcool bollente e disseccata a 100°, sottoposta all'analisi elementare, diede risultati corrispondenti a quelli richiesti dalla formola:

$$C_{15}\,H_{18}\,O_3$$

I. gr. 0,2310 di sostanza diedero gr. 0,6198 di CO_2 e gr. 0,1526 di H_2O
II. » 0,1822 » » » 0,4902 » » 0,1270 »

	Trovato in 100 p.		Calcolato per $C_{15}\,H_{18}\,O_3$
	I	II	
C	73,17	73,38	73,17
H	7,33	7,73	7,32

Questa sostanza non si scioglie a freddo nei carbonati alcalini, si scioglie invece negli alcali caustici lentamente a freddo e più rapidamente a caldo. Dalle soluzioni alcaline fatte a freddo viene parzialmente riprecipitata per mezzo di CO_2. Alla luce polarizzata si presenta inattiva.

Una piccola porzione di sostanza sospesa in 1 cc. di acqua, per aggiunta di 1 cc. di H_2SO_4 concentrato e quindi di una goccia di cloruro ferrico, non produce la reazione dell'artemisina, nè quella della santonina e desmotroposantonine, ma rimane indisciolta assumendo una colorazione bruna.

Questa sostanza contiene ancora il legame lattonico al pari dell'artemisina: infatti con le soluzioni bollenti degl'idrati alcalini ed alcalino terrosi dà luogo alla formazione dei sali di un ossiacido monobasico, il quale, quando viene messo in libertà per mezzo dell'acido cloridrico o solforico, lentamente si trasforma nel lattone corrispondente.

Preparazione del sale di bario. — Gr. 0,5 di sostanza furono disciolti nell'alcool a 90°, e la soluzione fu versata a piccole riprese in una soluzione quasi bollente d'idrato di barite. Si ottenne un liquido perfettamente limpido, il quale fu trattato con una corrente di CO_2 per eliminare l'eccesso d'idrato di barite, poscia, riscaldato e filtrato, fu lasciato ad evaporare lentamente in una capsulina, sotto una campana ad acido solforico. Per concentrazione si separò a poco a poco il sale di bario sotto forma di laminette fogliacee, trasparenti, spesso raggruppate a rosetta.

Questi cristalli, raccolti sopra un filtro, vennero lavati con poca acqua e quindi asciugati nel vuoto sotto campana ad acido solforico. Evidentemente perdettero acqua ed a poco a poco l'aspetto lucente scomparve, e la sostanza si trasformò in una polvere bianca, leggera e fioccosa.

L'analisi del sale di bario, disseccato sino a peso costante (a 130°), diede i seguenti risultati:

Gr. 0,2382 di sale di bario, fornirono gr. 0,8320 di $BaSO_4$.

Calcolato per $(C_{15}H_{19}O_4)_2$ Ba	Trovato
Ba = 20,66 %	20,53

La soluzione del sale di bario trattata:

con Nitrato d'argento, dà il corrispondente sale argentico, il quale si separa lentamente sotto forma di aghetti setacei, i quali a poco a poco s'imbruniscono sino a completo annerimento;

con Acetato di piombo, dà un precipitato bianco fioccoso, solubile in eccesso di reattivo;

con Solfato di rame produce un precipitato bianco verdastro.

La soluzione acquosa del sale di bario si comporta in modo simile a quella del santoninato baritico, in quantochè, trattata a freddo con acido cloridrico diluito, sino a leggera acidificazione, non dà alcun precipitato. Da questa soluzione l'etere estrae una sostanza di aspetto vischioso, la quale assume poi aspetto cristallino. Questa sostanza probabilmente è l'acido corrispondente al sale di bario; però essa a poco a poco si altera e dà nuovamente il lattone.

Se invece alla soluzione baritica si aggiunge un eccesso di acido cloridrico e si fa bollire, si separa tosto il lattone, sotto forma di precipitato bianco fioccoso.

Il nuovo prodotto di riduzione dell'artemisina, da me ottenuto, non reagisce con l'idrossilamina, nè con la fenilidrazina, perciò con tutta probabilità

non contiene più CO cetonico. Invece trattato con anidride acetica in presenza di acetato sodico, dà un *acetil derivato;* ciò che dimostra l'esistenza di un ossidrile di natura fenica; comportamento che va anche d'accordo con la proprietà, più sopra accennata, che ha la sostanza di sciogliersi a freddo negli alcali diluiti, e di riprecipitare in parte per mezzo di CO_2.

Quivi è interessante far rilevare che l'artemisina, sottoposta all'azione dell'anidride acetica ed acetato sodico, nelle identiche condizioni non dà l'acetil derivato, e rimane inalterata.

Derivato acetilico.

Gr. 0,5 di sostanza furono sciolti in gr. 5 di anidride e poscia si aggiunsero gr. 1 di acetato sodico fuso e polverizzato. Il tutto fu fatto bollire in un palloncino munito di refrigerante a riflusso per tre quarti d'ora. Quindi eliminato l'eccesso di anidride acetica per distillazione a pressione ridotta, il residuo fu raccolto sopra un filtro e lavato ripetutamente con acqua, fu disseccato nel vuoto sotto campana ad acido solforico.

Il prodotto è insolubile in acqua, pochissimo solubile in etere e nell'etere petrolico, discretamente solubile nell'alcool assoluto a caldo, dal quale cristallizza in bellissime laminette bianche, lanceolate e lucenti. È ancora più solubile nel cloroformio e nel benzolo, dal quale si separa, in parte per raffreddamento, e quasi completamente per aggiunta di etere petrolico, sotto forma di aghetti duri, bianchi, raggruppati fra loro. Fonde a 205°-206°.

L'analisi elementare di questo composto, seccato a 100°, diede risultati conformi a quelli richiesti dalla formola:

$$C_{15}H_{17}O_3 \cdot COCH_3$$

Gr. 0,1886 di sostanza fornirono gr. 0,4856 di CO_2 e gr. 0,1254 di H_2O.

Trovato per 100 p.	Calcolato
C 70,22	70,83
H 7,33	6,94

L'acetil derivato, al pari della sostanza primitiva, è inattivo alla luce polarizzata.

L'acetil derivato fatto bollire con soluzione di potassa caustica, quindi, filtrando ed acidificando con acido cloridrico, si ha per riscaldamento un precipitato fioccoso, il quale cristallizzato dall'alcool, fonde a 269°, ed ha tutte le proprietà della sostanza primitiva.

Dalla composizione centesimale, e dal comportamento di questo prodotto di riduzione della artemisina, pensai di trovarmi in presenza di una nuova desmotroposantonina, differente dalle quattro finora conosciute. La sostanza,

da me ottenuta, come risulta dai dati sopra esposti, non dà però la reazione caratteristica col cloruro ferrico; ciò potrebbe anche non infirmare la mia supposizione, che del resto viene avvalorata dal comportamento con gli alcali fondenti. Difatti interessante è la decomposizione che il prodotto di riduzione dell'artemisina subisce per azione della potassa caustica fusa, in quantochè si ottiene l'identico *p- dimetilnaftolo* degli acidi santonosi.

È noto che gli acidi santonosi (prodotti di riduzione della santonina) quando vengono fusi con potassa caustica (1), si scindono in *p- dimetilnaftolo*, *acido propionico* e *idrogeno*.

Però dovetti notare che io mi trovavo in presenza di una sostanza, che ha analogia più con le desmotroposantonine che con gli acidi santonosi. Nella letteratura non mi fu dato trovare che le desmotroposantonine siano state sottoposte ad analogo trattamento degli acidi santonosi, ed a me parve assai probabile che anche da esse si potesse giungere al p- dimetilnaftolo, in quantochè le desmotroposantonine contengono lo stesso ossidrile fenico degli acidi santonosi.

Azione della potassa caustica sulla deunotroposantonina. — La desmotroposantonina, da me adoperata, è stata quella che Andreocci ottenne per azione dell'acido cloridrico sulla santonina (2), e che fonde a 260°.

L'esperienza fu condotta seguendo le indicazioni dello stesso Andreocci (3), con qualche lieve modificazione; elevando cioè la temperatura sino a 380° ed eliminando dal palloncino, nel quale si opera la fusione, il tubo di sviluppo che pesca nel bagno di mercurio. Il prodotto di fusione, sciolto in acqua e trattato con CO_2, lasciò separare una sostanza, la quale raccolta e distillata in corrente di vapore, fu identificata per il *p-dimetil-naftolo* (punto di fusione 135°-136°) proveniente dagli acidi santonosi.

Io mi riservo di comunicare quanto prima i risultati ottenuti sia trattando analogamente le altre desmotroposantonine, sia trattando anche quei composti della santonina nei quali viene conservato l'ossigeno chetonico.

Dirò intanto che la santonina, nelle identiche condizioni, non dà origine al p-dimetil-naftolo.

Azione della potassa caustica sul prodotto di riduzione dell'artemisina. — Con lo stesso processo seguìto per la desmotroposantonina, ho trattato con potassa fusa la sostanza da me ottenuta per riduzione dell'artemisina con cloruro stannoso. La reazione avviene nell'identico modo, ed il prodotto della fusione, distillato in corrente di vapore, è lo stesso di quello che si ottiene dalla desmotroposantonina, sia pel suo punto di fusione (135°-136°) sia pel suo comportamento.

(1) Andreocci, *Sui quattro acidi santonosi*. Gazzetta chim. ital., anno XXV, vol. I, pag. 452.

(2) Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. I, pag. 468.

(3) Gazz. chim ital., anno XXV, vol. I, pag. 544.

L'artemisina, al pari della santonina sottoposta alla fusione con potassa caustica, nelle identiche condizioni non produce il p-dimetil-naftolo.

Avrei desiderato poter stabilire subito se questa reazione vada interamente e quantitativamente come nella fusione degli acidi santonosi, cioè se si ottiene anche l'acido propionico; però la scarsa quantità di materiale di cui disponevo, mi costrinse a rimandare a più tardi questa parte di ricerca.

Per ora intanto si può ritenere, da questo risultato, che l'artemisina contiene lo stesso nucleo fondamentale della santonina, e che il CO cetonico pare si trovi nello stesso posto della santonina.

Questo fatto farebbe contrasto con i risultati ottenuti da Freund e L. Mai (1), i quali distillando l'artemisina con polvere di zinco, ottengono una *dimetil-naftalina*, che suppongono non essere identica alla *1-4-dimetil-naftalina* che si ottiene dalla santonina; e la ritengono invece uguale alla *β-dimetilnaftalina* che Emmert e Reingruber (2) isolarono dal catrame, e che ha lo stesso punto di ebollizione (264°).

Dirò che ho tentato anche la riduzione dell'artemisina con polvere di zinco ed acido acetico, nello stesso modo come sono state trattate le desmotroposantonine per ottenere i rispettivi acidi santonosi (3), ma neppure con questo mezzo ho potuto ottenere l'acido corrispondente dell'artemisina. Invece ho ottenuto un nuovo prodotto che fonde a 275° e che devia a destra il piano della luce polarizzata.

Questa nuova sostanza conserva ancora il legame lattonico, non reagisce con l'idrossilamina, nè con la fenilidrazina; probabilmente non contiene neanco OH fenico, perchè non si scioglie a freddo negl'idrati alcalini.

I risultati delle esperienze in corso mi daranno modo di stabilire come vada la riduzione operata con acido acetico e zinco, studiando anche contemporaneamente la riduzione per mezzo dell'acido iodidrico e fosforo rosso.

(1) Martin Freund e Ludwig Mai, *Beitrag zur Kenntniss des Artemisins*. Berichte, N. XV, 1901, vol. III, pag. 3717;

Manifesto il mio rincrescimento ai signori Freund e L. Mai, se nella mia prima Nota non potei fare cenno del loro lavoro, pubblicato negli Atti della società chimica di Frankfurt e riferito dal Chemiker-Zeitung (Jahrgang 1898, 203); ma, tanto nei periodici di cui dispone questa R. Università, quanto anche negli Annali pubblicati in Darmstadt sino al marzo del 1900 dal Merck, che primo aveva scoperto e studiato questa sostanza, non trovai alcuna citazione in proposito.

(2) Ann. de Chem. 211, 368 (1882).

(3) Andreocci, *Sui quattro acidi santonosi*. R. Acc. dei Lincei, vol. II (1895), ser. 5ª, pag. 62; A. Andreocci e P. Bartolo, *Sopra due nuove desmotroposantonine*. Gazz. chim. ital., vol. XXVIII, p. II (1898), pag. 533.

Infine credo conveniente accennare al modo singolare di comportarsi dell'artemisina con l'acido cloridrico, diverso dalla santonina. Mentre questa, come è noto, disciolta in acido cloridrico concentrato, si trasforma nella desmotroposantonina, fusibile a 260°; l'artemisina, sciolta in acido cloridrico, nelle identiche condizioni della santonina, dà una soluzione che a poco a poco si colora, fino ad assumere una tinta rosso-bruna, mentre si separa una sostanza bruna, di aspetto resinoso e alquanto indurita, la quale aderisce in massima parte alle pareti del vaso. Se si toglie il liquido acido, si lava la sostanza solida con acqua, e si tratta quindi a freddo con soluzione di carbonato sodico, essa in parte vi si discioglie; la soluzione alcalina separata per filtrazione dalla parte insolubile, dà per aggiunta di acido solforico diluito un precipitato biancastro, il quale è solubile nell'acqua bollente, e per ripetute cristallizzazioni da questa si ottiene puro sotto forma di aghi lunghi sottilissimi, di aspetto setaceo, i quali fondono a 121°-122°. La soluzione alcoolica di questo nuovo prodotto devìa a destra il piano della luce polarizzata.

Il punto di fusione assai basso di questa sostanza, ed i caratteri che tanto la fanno differire dagli altri prodotti fin'ora ottenuti, mi fanno sospettare che l'acido cloridrico abbia agito assai profondamente sulla molecola dell'artemisina.

Sopra tale argomento spero quanto prima poter riferire.

Mineralogia. — *La Prehnite ed altre zeoliti nelle granuliti di Cala Francese* (Isola della Maddalena-Sardegna). Nota del dott. C. Rimatori, presentata dal Socio Struever.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia vegetale. — *Intorno ad un caso speciale di deperimento primaverile del frumento ed ai mezzi di ovviarvi* (1). Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

Gli agricoltori della bassa valle del Po indicano senz'altro col nome di ofiobolo un gruppo di forme di deperimento dei seminati di frumento, le quali si manifestano coi ben noti caratteri che si avvertono anche nei casi che derivano propriamente dalla infezione di *Ophiobolus graminis*.

(1) Relazioni e studi della Cattedra Ambulante di Agricoltura per la Provincia di Ferrara.

Questi deperimenti ritraggono la propria origine da cause assai differenti, potendo manifestarsi con le stesse apparenze macroscopiche un difetto di alimentazione per esaurimento del suolo, ovvero per imperfetta preparazione fisica dello stesso od anche casi di parassitismo di varie crittogame non sempre molto affini fra loro.

L' espressione di ofiobolo usata in queste località ha pressapoco il medesimo valore e la medesima applicazione a designare le anomalie di vegetazione dei seminati, dell' altra di caldafredda od arrabbiaticcio usata dagli agricoltori dell' Italia Centrale e del mezzogiorno.

Per quanto improprio il nome di ofiobolo dato ai deperimenti — mentre esso è soltanto il nome generico di una crittogama — pure esso è stato adottato dagli agricoltori che, non meno ecletticamente chiamano peronospora la ben nota malattia della vite, nonchè qualsiasi alterazione anche di altre piante che si appalesi con caratteri macroscopicamente analoghi a quelli delle viti peronosporate.

Nel caso di ciò che dicesi volgarmente ofiobolo del frumento, interessa al massimo grado di definire esattamente la determinante del fenomeno onde adottare i provvedimenti imposti dai singoli casi.

Ho osservato a Bondeno nella tenuta dell' Ill.mo sig. conte Mosti ed a Sabbioncello dal sig. Ten. Cottarelli, una forma caratteristica di deperimento del frumento che non ha nulla che vedere coll' ofiobolo propriamente detto a differenza di quanto avrebbe fatto presagire un esame superficiale.

Il deperimento in questione si è appalesato in frumenti cresciuti in entrambi i casi su terreno che nell' anno precedente era investito a canepaio, preparato quindi secondo le migliori regole onde il frumento stesso incontrasse quella caloria o forza vecchia che costituisce condizione insuperata per raggiungere elevate produzioni. In alcuni appezzamenti si osservano qua e là delle bollate, irregolarmente circolari, nelle quali, fino dal marzo, le piantine si arrestarono nello sviluppo, indi ingiallirono e scomparvero a poco a poco, così da formar radura nell'appezzamento. Estirpando con cura le piante e liberandone le radici dalla terra mediante prolungata lavatura, si osserva che le radici stesse sono in massima parte deperite; mancano del tutto le radici che di solito si formano coll'approssimarsi della primavera e le stesse radici di autunno offrono una ramificazione irregolare rispetto a quella che si osserva nelle piante sane. L'esame microscopico della parte aerea della pianta non permette di constatare alcuna alterazione sensibile che possa spiegare il fenomeno; le radici invece rivelano la presenza di un micelio ialino, riccamente ramificato, settato del diametro medio di 6-8 μ. Questo micelio, a decorso inter-e-intracellulare, è specialmente addensato nel tessuto corticale e nella regione dei fasci; a differenza dell'ofiobolo non si formano mai sulle radici, produzioni miceliali all'esterno ed il micelio stesso non manifesta mai tendenza ad imbrunire; qua e là poi, e per lo più all'interno delle cellule

il micelio dà origine a rigonfiamenti apicali od intercalari, sferoidali o cilindrici del diametro, nel primo caso di 25-30 μ. ovvero lunghi da 40 a 60 μ. e larghi da 20 a 24 μ. Questi rigonfiamenti, che potrebbero considerarsi come sporangi, quando abbiano raggiunto l'intero sviluppo, se trattati coll'iodio assumono una intensa colorazione bruna, indizio di glicogene.

L'ipotesi che si tratta di sporangi è avvalorata dal fatto che mentre il contenuto sulle prime si mantiene finamente granuloso, quelli che si osservano nelle radici, nelle quali il micelio sia scomparso, presentano al loro interno innumerevoli sferuline che si colorano col iodio.

A tutt'oggi non sono riuscito ad osservare alcuna forma riproduttiva evoluta, atta a meglio specificare la posizione sistematica di questa crittogama.

Qualunque apprezzamento in merito all'attitudine patogena di essa sarebbe per lo meno prematuro; tuttavia la presenza costante del detto micelio nelle piantine deperenti, indica che un qualche rapporto intercorre fra esso ed il deperimento del frumento.

Se non è possibile di pronunciarsi a tale riguardo, resta intanto assodato dalle prove, eseguite dietro mio consiglio, essere possibile di ovviare al danno e di pareggiare la vegetazione di queste bollate col resto degli appezzamenti mediante somministrazione di nitrato di soda e zappettatura del terreno. In seguito a queste due operazioni, le piantine hanno emesso nuove radici alla cui penetrazione si opponeva lo spesso strato di crosta superficiale formatosi in seguito alle prolungate pioggie invernali, crosta che oltre ad opporsi meccanicamente, isolava altresì la pianta dagli strati profondi del terreno, ove non difettava l'umidità.

L'andamento della vegetazione ha pienamente confermato l'efficacia del trattamento proposto, essendosi le piantine languenti completamente rimesse.

Dai risultati di questo trattamento e dalle osservazioni microscopiche surriferite appaiono evidenti le differenze tra questa e la forma tipica di ofiobolo, contro la quale sarebbe inutile ricorrere alle pratiche usate con successo nel caso attuale.

Ho fatto segnare le zone occupate dalle radure, e nell'autunno prossimo alcune di esse verranno assoggettate a iniezioni di solfuro di carbonio, in vista di distruggere i germi della crittogama sudescritta; intanto ho creduto non del tutto privo di interesse descrivere questo malanno cui è facile rimediare, ed affermare la necessità di andar molto guardinghi nel pronunciarsi intorno alla causa dei deperimenti primaverili del frumento, non essendo prudente di generalizzare le pratiche colturali riconosciute efficaci in casi ben determinati, ma che potrebbero in altri essere inutili o non convenienti dal punto di vista economico.

Zoologia. — *Osmosi ed assorbimento nelle reazioni a soluzioni anisotoniche* (*Protozoi e Limnaea stagnalis*). Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

Come dall'osservazione dei fenomeni particolari che si presentano allo sguardo dello sperimentatore, si traggono direttamente leggi particolari riguardanti determinati oggetti e determinate condizioni, così dall'osservazione di molti fenomeni somiglianti, ma non identici, derivano i concetti più vasti e le leggi più generali. Io mi propongo appunto, in questa Nota, di abbracciare con un solo sguardo quegli Infusorii e quelle *Limnaeae stagnales* che furono oggetto di ricerche riferite in tre Note precedenti a questa; e di esaminare i risultati generali, che forse non si potrebbero trarre da una sola serie di ricerche, fatte su un unico gruppo di animali. È la distanza grande che corre tra i Protozoi e i Molluschi, ciò che darà forza alle mie conclusioni generali, là dove fenomeni perfettamente simili si verificano in questi due gruppi di animali nelle mie esperienze.

Per mezzo di esse compaiono, nella reazione a soluzioni anisotoniche, due fenomeni, per natura loro differenti. Il primo, quello che si manifesta subito, è il fenomeno osmotico, che riguarda soltanto il passaggio dell'acqua. Esso dipende dalla semipermeabilità delle membrane che separano, nell'animale in esperienza, l'ambiente interno dall'esterno. Tale proprietà delle membrane è stata dimostrata direttamente soltanto per l'ingluvie dell'Aplisia (Bottazzi e Enriques); ma da quelle esperienze risulta anche un buon criterio per decidere se in queste da me ora riferite il fenomeno osmotico riguardi o no anche i sali. Noi trovavamo nella membrana dell'Aplisia un passaggio di acqua notevolissimo verso la soluzione ipertonica, quando sale non passava affatto in senso inverso; invece, se anche una piccolissima quantità di sale traversava la membrana, il passaggio dell'acqua si riduceva subito ad una quantità minima. Ora, quando si osserva una variazione di volume o di peso notevolissima in un animale sottoposto a variazioni di tonicità dell'ambiente, se ne deve dedurre che l'equilibrio si stabilisce senza che sale traversi le membrane. E dunque, nel caso delle nostre esperienze, che nella reazione osmotica la quale si produce come primo effetto nei Protozoi e nella *Limnaea stagnalis*, portati in ambienti più diluiti o più concentrati, le membrane agiscono come membrane semipermeabili.

Ma il mio intento non è di insistere troppo su questo concetto. Ciò che a me preme è di mettere nettamente in evidenza come nella reazione successiva, la quale si palesa assai più tardivamente, e per la quale le membrane dell'animale sono traversate da acqua e sale in maniera tale da com-

pensare la variazione di volume subìta, che in questa seconda reazione i sali passano per un meccanismo differente da quello dell'osmosi.

In primo luogo si tenga ben presente questo fatto, che tale seconda reazione non sempre si produce; quando la soluzione è troppo anisotonica, e la contrazione o dilatazione osmotica è stata troppo forte, l'animale non ripara a questo primo effetto, e muore, spesso lentamente, non incominciando nemmeno la seconda reazione compensatoria. Nei casi in cui la reazione compensatoria avviene, essa è sempre molto lenta e tardiva; vediamo p. es. degli Infusorii, portati in una soluzione ipertonica, rimanere contratti per ore o per un giorno intero (la contrazione insorge subito, in pochi secondi), e poi a poco a poco tornare alla grandezza primitiva; è evidente che il primo fatto esprime una reazione inevitabile, dannosa (spesso seguìta ben presto dalla morte), il secondo esprime invece un adattamento dell'organismo alle nuove condizioni. Il secondo fatto (questa è una condizione molto caratteristica e significativa), tanto negli Infusorii che nella *Limnaea*, oltrepassa per lo più, col suo effetto compensatorio, i limiti della grandezza primitiva; così l'animale, immerso in soluzioni ipertoniche, arriva, durante un certo periodo di tempo, a dimensioni maggiori delle iniziali. Nessun fenomeno di osmosi o di diffusione potrebbe rendere conto in maniera accettabile, di questo modo di comportarsi. È invece un carattere proprio della vita del protoplasma, quello di reagire a una condizione nuova con intensità maggiore di ciò che sarebbe necessaria per ottenere una esatta compensazione. Di più, e questo si vede bene specialmente negli Infusorii, mentre la reazione osmotica dei primi momenti è repentina, quella secondaria compensatrice è lenta e lunga. Addentrandosi più particolarmente nell'esame dei fatti, si osserva che proprio quando vi è differenza di concentrazione tra l'ambiente esterno e l'interno, i sali non passano attraverso alle membrane: e quando invece tale differenza non vi è più, perchè il passaggio dell'acqua l'ha compensata, allora i sali passano (insieme coll'acqua) per ricondurre l'animale alle condizioni primitive. Tutte queste considerazioni fatte sulla base dei risultati delle esperienze, *dimostrano*, a mio parere, che la seconda reazione non è affatto di natura osmotica, ma è la conseguenza di proprietà fisiologiche delle cellule. Noi la possiamo chiamare, a seconda dei casi, *assorbimento compensatorio*, o *escrezione compensatoria*; è evidente che questo fenomeno deve seguire le stesse leggi che seguono l'assorbimento e l'escrezione, anche nelle condizioni normali. Leggi, tra cui vi è una condizione di necessità non mai contraddetta dai fatti: la vita, anzi si potrebbe dire la *salute*, del protoplasma.

Se vogliamo fare un raffronto, consideriamo un uomo che abbia subìto un forte salasso. Esso è un animale in cui i liquidi organici scarseggiano, e devono essere repidamente reintegrati nella loro quantità, perchè la vita possa continuare. Ed allora (prescindendo dalla riformazione dei globuli rossi ecc.), fenomeni che insorgono più tardivamente, egli reagisce con un

assorbimento attraverso alla membrana del canale digerente, di acqua e di sali, non compensato da una corrispondente escrezione. Non è questo fenomeno nulla più che l'esagerazione di un processo normale; ordinariamente c'è da compensare soltanto le perdite che si subiscono per l'escrezione; in quelle condizioni patologiche che abbiamo supposto, si aggiungono a queste delle perdite artificialmente prodotte. Analogamente, nell' uomo che abbia subìto l'iniezione in circolo di una certa quantità di soluzione isotonica, si esagera il processo di escrezione, il quale normalmente compensava soltanto l'ingresso di sostanze dovuto all'assorbimento. Ed in questi due processi, di assorbimento e di escrezione esagerata, le membrane sono traversate da acqua e sali, per un processo fisiologico ancora molto avvolto nelle tenebre.

L'osmosi e l'assorbimento (o resp. l'escrezione) sono dunque due fenomeni antagonistici nelle reazioni ad ambienti anisotonici. E le membrane attraverso alle quali, in tempi differenti, ma nelle stesse, avvengono i due processi, hanno dunque la curiosa proprietà, in cui si include apparentemente una contraddizione, di essere permeabili ed impermeabili ai sali: sono impermeabili osmoticamente, permeabili per assorbimento; i sali non possono passare per il processo fisico della diffusione, ma possono passare per un meccanismo fisiologico, legato alla vita del protoplasma. Un fatto di anche più palese antagonismo potrò mettere in evidenza tra breve, per ciò che riguarda l'assorbimento nelle Oloturie; mi basta per ora di impostare la questione; si è lungamente discusso se l'assorbimento sia o no un processo fisico di diffusione; e si è dimostrato che non lo è; adesso c'è un passo di più da fare: decidere se nell'assorbimento la diffusione sia uno degli elementi del processo, o se esso ne sia del tutto indipendente. Nelle presenti ricerche, sebbene non vi sia una sicura risposta a questa questione, vi è qualche cosa in proposito; esse hanno infatti portato degli esempî in cui l'assorbimento, attraverso a membrane bagnate dalle due parti da soluzioni tra loro anisotoniche, comincia solo tardivamente, quando già la possibilità della diffusione è tolta, perchè il passaggio osmotico dell'acqua ha stabilito l'equilibrio di concentrazione tra dentro e fuori.

Mi preme anche di stabilire, rispetto agli animali privi di canale digerente, che è falso il concetto dell'assorbimento in essi per endosmosi. Esso deriva da una pura apparenza formale, ed è stato sempre tramandato dalla tradizione, senza tentare di sottoporlo alla critica. Le Opaline, Infusorii senza canale digerente, e che quindi si nutrono assorbendo i materiali attraverso alla membrana che limita esternamente il loro corpo, presentano, sottoposte all'azione di soluzioni anisotoniche, le medesime rapide variazioni di volume, per le quali si deve dedurre la impermeabilità osmotica ai sali. E, come gli altri Infusorii che ho sperimentato, e come la *Limnaea stagnalis*, i fenomeni successivi di compensazione insorgono tardivamente, e soltanto quando la pri-

mitiva reazione osmotica non sia troppo forte; passano dunque i sali attraverso alla loro membrana esterna, proprio quando la differenza di concentrazione tra dentro e fuori non esiste più. Insomma, esse mostrano gli stessi fenomeni che si osservano negli animali con canale digerente. Il fatto di avere gli altri animali la membrana assorbente (o almeno la membrana assorbente per eccellenza) introflessa dentro il corpo a formare il canale digerente, mentre questi non la hanno, non è una differenza che debba portare di necessità come conseguenza un diverso meccanismo di assorbimento nei due casi. Dunque *a priori* non si doveva ritenere che gli animali senza canale digerente si nutrano per endosmosi. Tanto più che vi sono molti organismi in cui non esiste un tal meccanismo di chiusura della *bocca*, da far sì che il canale digerente possa assumere dei rapporti coll'ambiente esterno diversi da quelli delle membrane limitanti il corpo. *A posteriori* poi quel concetto va completamente rigettato, ora che vediamo la stessa indipendenza tra endosmosi ed assorbimento in questi animali come negli altri.

Che vi siano esseri viventi capaci di assumere sali per osmosi, pare di sì. Alcuni Flagellati, tra cui gli *Oikomonas*, sembrano essere nel numero; probabilmente anche i Batterii vi sono compresi. Lo fa sospettare la facilità con cui si possono trasportare questi organismi da un ambiente ad un altro molto diverso per concentrazione, direttamente, senza che si osservino fenomeni di contrazione (resp. dilatazione), nei Flagellati, in cui è possibile una simile indagine, o la morte nei Batterii i quali per la loro piccolezza non si prestano ad essa. Forse anche certi vegetali inferiori, certi Nostoc e certe Diatomee, per simili ragioni, presentano le stesse condizioni. La differenza tra tutti questi organismi e gli altri che abbiamo fino ad ora preso in considerazione, consiste in questo: che in questi i sali attraverserebbero subito la membrana esterna, quando l'ambiente diviene ad un tratto più concentrato o più diluito; passerebbero subito per diffusione, senza attendere l'intervento delle funzioni cellulari.

Infine, due parole relativamente alla adattabilità del protoplasma a vivere in ambienti variamente concentrati. Tale questione è distaccata dallo studio della permeabilità e delle proprietà delle membrane. Si riannoda però alle esperienze da me fatte, in quanto osservavo la morte degli animali, ogni volta che conducevo la concentrazinne dell'ambiente ad una troppo elevata (anche se la accrescevo a grado a grado). Così le *Limnaeae*; ed è caratteristico il fatto che, quando il protoplasma già si trova in condizioni tali che non può più compiere la funzione dell'assorbimento compensatorio, ancora persiste la capacità della reazione osmotica con passaggio di acqua straordinariamente prevalente sul passaggio dei sali. Ben comprensibile, dal punto di vista dell'adattamento all'ambiente, che gli animali delle infusioni, i quali vivono in un ambiente molto variabile, resistano molto di più alle variazioni di concentrazione; e da ricordarsi un'ultima volta, l'aumento dei sali nell'in-

terno dei germi derivati da organismi fatti vivere artificialmente in un ambiente più concentrato del loro abituale.

Come conclusione generale delle ricerche di vario genere compiute su animali diversi, riferite nelle tre Note precedenti a questa, e qua prese in considerazione da punti di vista più generali, posso dire che:

Esistono animali e condizioni in cui le stesse membrane non lasciano passare i sali disciolti nell'acqua, durante un lungo tempo, in cui la concentrazione ai due lati di esse è diversa; e li lasciano passare dopo, insieme con l'acqua (passaggio per assorbimento), quando la concentrazione già era divenuta, ai due lati la stessa, a causa del passaggio osmotico dell'acqua.

Passaggio osmotico e passaggio per assorbimento significano cose che forse sono *completamente indipendenti tra loro.*

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci D'Achiardi e Pickering, e un volume intitolato: *Cinquantenaire scientifique de M. Berthelot (1851-1901).*

Il Socio Capellini fa omaggio della propria pubblicazione: *Balene fossili toscane.* I. *Balaena etrusca.*

PERSONALE ACCADEMICO

Colle norme prescritte dallo Statuto, l'Accademia procedette, nell'adunanza generale del 31 maggio 1902, all'elezione del Presidente. Lo spoglio dei voti venne fatto dai Soci Ciamician e Lanciani.

La votazione dette i risultati seguenti:

Votanti 62. — Villari P. 54; Comparetti 3; Guidi 2; Ascoli 1. Schede bianche o nulle 2. — Eletto Villari Pasquale.

Questa elezione, a termini dell'art. 15 dello Statuto, sarà sottoposta all'approvazione di S. M. il Re.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

R. Accademia delle scienze di Lisbona; l'Associazione australiana per l'avanzamento della scienza, di Sydney; le Società degli Spettroscopisti di Catania; le Società geologiche d'Ottawa e di Sydney, l'Istituto Smithsoniano di Washington; l'Università di Cambridge.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di Studi superiori di Firenze; il Ministero dell'Interno.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 31 maggio 1902.

Berthelot M. — 1851-1901. Cinquantenaire scientifique de M. B. 24 novembre 1901. Paris, 1902. 4°.

Brédikhine Th. — Su le rôle de Jupiter dans la formation des radiants composés. St. Pétersbourg, 1902. 4°.

Capellini G. — Balene fossili toscane. I Balaena etrusca. Bologna, 1902. 4°.

Clerici E. — Ancora sulle polveri sciroccali e sulle pallottole dei tufi vulcanici. Roma, 1902. 8°.

Id. — Una conifera fossile dell'Imolese. Roma, 1902. 8°.

D'Achiardi A. — Appendice alla Guida al Corso di mineralogia. Pisa, 1902. 8°.

Id. — Considerazioni sull'acqua di cristallizzazione. Pisa, 1902. 8°.

Giudice G. — Sintomatologia e semiotica clinica. P. 2ª. Livorno, 1902. 8°.

Hellmann G. — Regenkarte der Provinz Sachsen und der Türingischen Staaten. Berlin, 1902. 8°.

Julius W. H. ecc. — Preliminary Report of the Dutch Expedition to Karang Sago (Sumatra) for the Observation of the total Solar Eclipse of May 1901. Amsterdam, 1902. 8°.

Lussana S. — Descrizione di un manometro ad aria compressa utilizzabile a qualunque pressione. Pisa, 1900. 8°.

Id. e *Carnazzi P.* — Influenza di un dielettrico solido interposto fra le palline di uno spinterometro sulla lunghezza della scintilla. Pisa, 1902. 8°.

Mirabella-Fisichella G. — Caduta del pene per fibroma papillare (Papilloma ulceroso). Pisa, 1900. 8°.

Id. — Due casi di carbonchio sintomatico guariti col vaccino dell'ematico? Pisa, 1899. 8°.

Id. — La castrazione delle vacche in rapporto alla zootecnia. Catania, 1898. 8°.

Id. — L'afta epizootica e sua cura. Catania, 1902. 8°.

Mirabella-Fisichella G. — L' emoterapia in rapporto all' igiene ed alla terapia. Pisa, 1900. 8°.

Nosotti I. — La cura dell' afta col metodo Baccelli adottato alla Vaccheria di Villa Pamphili in Roma. Milano, 1902. 8°.

Passerini N. — Sopra la vegetazione di alcune piante alla luce solare diretta e diffusa. Firenze, 1902. 8°.

Pickering E. C. — Variable Stars of long period. Cambridge M., 1902. 8°.

Scudder S. H. e *Lambe L. M.* — Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. II, 2; IV, 2. Ottawa, 1900-1. 8°.

Total Eclipse of the Sun, May 18, 1901. Reports on the Dutch Expedition to Karang Sago, Sumatra. Amsterdam, 1902. 8°.

Whiteaves J. F. — Catalogue of the Marine Invertebrata of eastern Canada. Ottawa, 1901. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 giugno 1902.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Zoologia. — *La Zoologia secondo il nuovo regolamento delle facoltà di scienze.* Nota del Socio C. Emery.

Dividendo il complesso delle scienze zoologiche in *Zoologia e anatomia comparata degl'Invertebrati* e *zoolog. e anatomia comparata dei Vertebrati*, il nuovo regolamento si viene anzitutto a riconoscere che zoologia sistematica e morfologia sono inseparabili, la pura sistematica, disgiunta dalla morfologia, essendo disciplina che non deve insegnarsi nelle università. Si viene altresì a riconoscere che lo studio della zoologia è tanto vasto che abbisogna di essere diviso, ma in modo differente da quello, oramai non rispondente al punto di vista moderno, e che va espresso con la separazione della zoologia dall'anatomia comparata. Io ho discusso la questione, nella prelezione al mio corso di zoologia di quest'anno, e accennato ivi a varie soluzioni, tutte migliori a mio parere della condizione attuale.

E poichè non si può pretendere di raggiungere l'ideale, bisogna contentarsi di trovare nel regolamento un miglioramento che ne permetta degli altri in avvenire.

Uno di quei miglioramenti, proposto anche da me nella citata prelezione, è l'istituzione di un corso di *biologia generale*, accennato fra i corsi complementari nel nuovo regolamento della facoltà di scienze. A mio avviso esso dovrebbe essere un insegnamento fondamentale, e tale spero divenga in

avvenire. Per ora, sono contento di vederlo accettato come complementare. Una volta avviato, la sua estrema importanza non tarderà ad essere riconosciuta.

Con questo, vengo a rispondere ad un particolare genere di biasimo che si fa al regolamento, ed è quello di avere accentuato il carattere morfologico nel titolo dell'insegnamento della zoologia, sopprimendo le parole « *e fisiologia* » comparate. In fatti non si è soppresso nulla, perchè, eccezione fatta forse pel defunto Boll, nessun professore di anatomia comparata in Italia ha mai insegnato sul serio fisiologia comparata. Il nuovo cambiamento di titolo non ha fatto altro che seppellire un morto.

E nel seppellire il morto, ha annunziato la nascita di un nuovo ramo, più fisiologico del primo, cioè della biologia generale, nella quale molto meglio troveranno posto quelle nozioni generali e comparative sui fenomeni elementari della vita che sono il ramo nuovo, rigogliosamente crescente della fisiologia.

Se, accanto a questo, dovesse sorgere un altro insegnamento di fisiologia comparata sarebbe anche il benvenuto, e noi morfologi ed etologi saluteremmo con gioia il fiorire, nelle nostre scuole, di tal ramo di studî.

Ai colleghi fisiologi rivolgo dunque un esortazione: quello di non ostacolare l'estendersi e il perfezionarsi dello insegnamento morfologico. Anche questo tende a collegarsi sempre più con lo studio delle condizioni d'esistenza degli organismi e quindi con l'etologia. E questa ultima non può divenire scientifica, senza collegarsi a sua volta con la fisiologia generale, e quindi con la fisica e la chimica.

Ma sento venirmi dagli stessi zoologi un'altra obiezione. Invertebrati e Vertebrati non sono due sezioni naturali, equivalenti, opponibili l'una all'altra del regno animale; quindi non sono nomi da sciegliere per dividere modernamente il campo di due rami d'insegnamento. In fatti, se fossi stato chiamato a scegliere i nomi, avrei preferito lasciare al corso degl'Invertebrati il nome indeterminato di zoologia generale o *zoologia e anatomia comparata* senz'altro, determinando per l'altro corso che esso invece deve trattare specialmente dei *Vertebrati*. Il mio concetto è quello che i Vertebrati hanno bisogno di un insegnamento separato, senza il quale è impossibile che gli studenti acquistino una sufficiente conoscenza della loro complicata organizzazione e dei problemi che vi si connettono. Che il nome sia più o meno corretto è cosa d'importanza secondaria. Spetterà ai titolari delle cattedre fare in modo che i loro programmi corrispondano all'indirizzo moderno delle discipline affidate a ciascuno di essi.

Fisica. — *Sul fenomeno Majorana.* Nota del Socio W. Voigt.

Il sig. Majorana ha presentato a codesta Accademia nella seduta del 4 maggio il primo risultato delle sue osservazioni sopra un fenomeno magnetico analogo all' elettrostatico di Kerr, e mi ha poi comunicato per iscritto i suoi risultati ulteriori. Mi sia permesso di mostrare che i fenomeni osservati si possono facilmente trattare in via teoretica seguendo i principî da me adoperati nella spiegazione dell' effetto Kerr.

La teoria moderna della dispersione opera con grandezze vettoriali K_h, le quali sono caratteristiche delle vibrazioni proprie delle particelle ponderabili — elettroni — e le collega con le forze elettriche K propagantesi nell' etere, mediante relazioni lineari fra le rispettive componenti X_h, Y_h, Z_h e X, Y, Z della forma

$$(1) \qquad X_h + a_h \frac{\partial X_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 X_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h X \quad \text{etc.}$$

in cui a_h, b_h, ε_h sono costanti.

Si può ora introdurre nelle formole l' azione di un campo magnetico R sopra queste vibrazioni, in via puramente fenomenologica, riunendo le ipotesi: 1° che le equazioni restino lineari nelle componenti di vibrazione; 2° che le forze agiscano solo sopra i vettori *vibranti* K_h; 3° che i termini di aggiunta non implichino consumo di energia. Limitandosi allora alle derivate, secondo il tempo, del grado più basso si ottengono necessariamente come termini del primo ordine rispetto alle componenti A, B, C del campo i seguenti:

$$c_h \left(C \frac{\partial Y_h}{\partial t} - B \frac{\partial Z_h}{\partial t} \right) \quad \text{etc.}$$

i quali, come io ho mostrato altrove, contengono la spiegazione dell' effetto Zeeman e dei fenomeni che l' accompagnano. Però essi non sono sufficienti per condurre ai fatti trovati dal Majorana, principalmente perchè l' ordine di grandezza dei parametri c_h è, nei corpi da lui studiati, assai troppo piccolo per dar luogo ad effetti così cospicui.

I termini di aggiunta del secondo grado hanno, colle medesime restrizioni di prima e per ragioni di simmetria, la forma

$$\frac{\partial^2 X_h}{\partial t^2} (A^2 d_h + B^2 d'_h + C^2 d'_h) + \left(\frac{\partial^2 Y_h}{\partial t^2} B + \frac{\partial^2 Z_h}{\partial t^2} C \right) A (d_h - d'_h) \quad \text{etc.}$$

e rappresentano, come pare, i risultati del Majorana in modo soddisfacente sotto tutti i punti di vista. Per mostrarlo, io trascurerò i termini del primo

ordine a causa dei fattori c_h, che hanno nel caso attuale valore appena apprezzabile.

Facendo allora coincidere l'asse Z con la direzione del campo, le formole (1) così completate, suonano:

$$(2)\qquad \begin{cases} X_h + a_h \dfrac{\partial X_h}{\partial t} + (b_h + d'_h R^2) \dfrac{\partial^2 X_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h X \\ Y_h + a_h \dfrac{\partial Y_h}{\partial t} + (b_h + d'_h R^2) \dfrac{\partial^2 Y_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h Y \\ Z_h + a_h \dfrac{\partial Z_h}{\partial t} + (b_h + d_h R^2) \dfrac{\partial^2 Z_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h Z \end{cases}$$

colle quali si dovranno combinare le formole Maxwell-Hertz nell'ipotesi che le componenti di polarizzazione, che compaiono in queste, abbiano i valori $X + \Sigma X_h$, $Y + \Sigma Y_h$, $Z + \Sigma Z_h$.

Da quelle formole si ricava per un'onda piana propagantesi normalmente alle linee di forza i seguenti valori degli indici di rifrazione n_n, n_p, e degli indici di assorbimento $\varkappa_n$, $\varkappa_p$ per vibrazioni elettriche normali e rispettivamente parallele alle linee di forza:

$$(3)\qquad \begin{cases} n^2_n (1 - \varkappa^2_n) = 1 + \Sigma \dfrac{\varepsilon_h \vartheta^2 \Delta'_h}{N'_h} \quad , \quad 2 n^2_n \varkappa_n = \Sigma \dfrac{\varepsilon_h a_h \vartheta^3}{N_h} \\ n^2_p (1 - \varkappa^2_p) = 1 + \Sigma \dfrac{\varepsilon_h \vartheta^2 \Delta_h}{N_h} \quad , \quad 2 n^2_p \varkappa_p = \Sigma \dfrac{\varepsilon_h a_h \vartheta^3}{N_h} \end{cases}$$

in cui

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta_h = \vartheta^2 - (b_h + d_h R^2) \quad , \quad \Delta'_h = \vartheta^2 - (b_h + d'_h R^2) \\ N_h = \Delta^2_h + a^2_h \vartheta \quad , \quad N'_h = \Delta'^2_h + a^2_h \vartheta^2 \end{cases}$$

e $2\pi \vartheta = \tau$ rappresenta il periodo di vibrazione.

Dunque il corpo, nel campo magnetico, diventa birifrangente e pleocroitico come un ordinario cristallo uniasse. Il Majorana ha potuto infatti, dietro mio consiglio, constatare direttamente questo pleocroismo.

Ammettendo, nei corpi studiati e nel campo delle osservazioni, $\varkappa$ piccolo rispetto all'unità, n_n e n_p poco differenti fra di loro in modo da potere sostituire $2n_0$ ad $n_n + n_p$ (intendendo con n_0 il valore originario, senza campo, dell'indice di rifrazione) e di poi supponendo $R^4 \vartheta^4 d_h^2$ piccolo rispetto a $(\vartheta^2 - b_h)^2$, si ottiene dalle (3) e (4) con facile riduzione:

$$(5)\qquad \begin{cases} n_n - n_p = \dfrac{R^2 \vartheta^2}{2 n_0} \Sigma \dfrac{\varepsilon_h (\Theta^2_h - a^2_h \vartheta^2)(d'_h - d_h)}{N_h N'_h} \\ n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p = \dfrac{R^2 \vartheta^3}{n_0} \Sigma \dfrac{\varepsilon_h a_h \Theta_h (d'_h - d_h)}{N_h N'_h} \end{cases}$$

in cui si è posto $\vartheta^2 - b_h = \Theta_h$. Si può interpretare in queste formole la grandezza $n_n - n_p$ come la *misura della birifrangenza* ed $n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p$ come la *misura del pleocroismo.*

Le formole (5) si semplificano di molto, se si ammette che il mezzo sia caratterizzato principalmente da *una* riga d'assorbimento nell'ultravioletto; ciò che si verifica in molti casi. Allora il quoziente fra pleocroismo e birifrangenza prende il valore speciale:

$$\frac{n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p}{n_n - n_p} = \frac{2a\,\Theta\vartheta}{\Theta^2 - a^2\vartheta^2} \tag{6}$$

in cui naturalmente non compare più l'indice h.

Ora segue dalle (3) che senza azione del campo

$$\frac{2n^2_0 \varkappa_0}{n^2_0 - 1} = \frac{a\vartheta}{\Theta}\,; \tag{7}$$

se quindi si pone:

$$\frac{2n^2_0 \varkappa_0}{n^2_0 - 1} = \operatorname{tg}\varphi\,, \tag{8}$$

si avrà

$$\frac{n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p}{n_n - n_p} = \operatorname{tg} 2\varphi\,. \tag{9}$$

Le osservazioni del Majorana hanno condotto alle seguenti leggi per la birifrangenza: che questa è proporzionale al quadrato del campo, proporzionale alla concentrazione delle soluzioni molto diluite ed indirettamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda.

La prima legge è contenuta senz'altro nella (5); la seconda segue pure da questa, poichè in soluzioni diluite, in cui le molecole attive non agiscono sensibilmente l'una sopra l'altra, a, b, d sono indipendenti dalla concentrazione, ed ε cresce proporzionalmente con questa. La terza segue pure dalla (5), se, come è per solito, la sostanza è caratterizzata in prima linea da righe di assorbimento nell'ultravioletto, giacchè allora Θ_h è sensibilmente proporzionale a ϑ^2, N_h ed N'_h a ϑ^4.

Per ciò che riguarda l'assorbimento, il Majorana ha trovato che all'onda più lenta corrisponde l'assorbimento maggiore. Questo segue in fatti dalla formola (9); poichè siccome nelle sostanze cimentate $\varkappa_0$ era piccolo e $n_0 > 1$, si ha φ piccola e quindi

$$\frac{n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p}{n_n - n_p} > 0\,.$$

Geologia. — *I terreni terziarî della Provincia di Roma.* I. *Eocene.* Nota del Corrispondente Carlo De Stefani.

Fin dal 1878, per mia semplice istruzione, cominciai a studiare i terreni terziarî della provincia romana. Se avessi pubblicati prima i risultati, per quanto sommarî, certe questioni che tuttora durano sarebbero forse già state risolute; perciò mi risolvo a pubblicarli ora.

La linea di divisione fra l'Appennino settentrionale ed il centrale da me proposta nel 1881 è stata poi accettata in massima da Giovanni Marinelli e dai geografi, ed ha a favor suo ragioni anche più numerose di quelle già state accennate. Quand'anche fondamento alla divisione fosse stata la pura morfologia, questa non avrebbe portato a conclusioni diverse da quelle cui portarono gli studî litologici, geologici e stratigrafici. Ora appunto i monti del circondario di Civitavecchia appartengono all'Appennino settentrionale, gli altri della provincia all'Appennino centrale.

Base ai terreni terziarî è quasi esclusivamente la Creta. Nei monti di Civitavecchia al Fosso Cupo, alla Tolfa, è base il Neocomiano, con ittioliti, che, ritenuti prima resti vegetali, furono studiati dal De Bosniaschi. Nella rimanente provincia è base universalmente la Creta, rappresentata da calcari coralligeni a Rudiste, con frammenti di Briozoi, Lamellibranchi, ed altri organismi, qualche volta da Dolomite, di *facies* che dirò *balcanica*, diffusa nella penisola Balcanica ed in tutto l'Appennino centrale, per contrasto alle altre *facies* che si trovano a settentrione e a mezzogiorno. Nella valle del Licenza, sotto l'Eocene, invece de' calcari cretacei a Rudiste trovasi un calcare rosso con vene spatiche, talora con selce rossa, spesso screziato, con frammenti di Molluschi e parmi, anche, di Rudiste, piuttosto argilloso e schistoso, che è riunito ai calcari del Lias superiore di Tivoli; ma che io credo probabilmente equivalente alla *Scaglia* cretacea (1).

Ed ora passiamo, con ordine cronologico, ai terreni terziarî.

L'Eocene è rappresentato da due *facies* ben differenti, quasi corrispondenti a quelle della Creta. Una è la facies *nord apenninica*, costituita per lo più da terreni di mare profondo, comprese le marne e le arenarie formate coi materiali frammentizi portati in alto mare in rispondenza ai terreni cri-

(1) La *Scaglia* in alcune parti delle Alpi, p. es. nel Vicentino, è certamente in parte cretacea. Nell'Apennino centrale è in parte eocenica. Il Lotti ha trovato nella *Scaglia* a Titignano presso Orvieto un *Inoceramus* che dalla descrizione pare l' *I. Monticuli* Fugg. et Kast. e ne induce l'età cretacea di quella. La sua induzione è possibile; però il detto *I.* trovasi anche alla Costa dei Grassi nella montagna di Reggio-Emilia con l' *I. Cripsii* Mant. in terreno eventualmente eocenico.

stallini delle Alpi occidentali, delle grandi isole tirrene e delle minori isole esistenti nell'area dell'Appennino settentrionale.

Questa *facies* è rappresentata quasi esclusivamente nel circondario di Civitavecchia, cioè nei monti della Tolfa, poi nei monti di Viterbo e in quelli di Trevinano, ultime pendici del monte di San Casciano e di Cetona al confine con la provincia di Siena.

L'altra è una *facies* essenzialmente propria alle catene assiali dell'Appennino centrale e meridionale, e forse di Sicilia, che direi *facies ausonia*.

Questa, così diversa da quella *nord-Apenninica*, ed un po' meno da quella *greca* e pure garganica, è coerente alle immense rocce calcaree che ne formano il substrato, alla mancanza di rocce cristalline circonvicine e forse alle profondità maggiori, alle quali probabilmente si deve anche la mancanza dell'Eocene in tanti luoghi della provincia e dell'Appennino a sud. Essa trovasi solo in alcune valli secondarie dell'Aniene e forse, raramente, nella valle del Sacco.

Il calcare nummulitico che nell'Appennino settentrionale rappresenta la parte inferiore dell'Eocene, nei monti di Civitavecchia non l'ho trovato; nè ho studiato il contatto fra il calcare neocomiano del Fosso Cupo e le rocce eoceniche sovrincombenti (1).

Nei monti della Tolfa il terreno eocenico più antico è dunque l'arenaria (*Macigno*) non molto abbondante, ma formante quà e là piccole cupole (Furbara, Santa Teresa, Santa Marinella, ecc.) (2).

È senza fossili, ma identica per situazione e per costituzione a quella che forma la parte media dell'Eocene medio nell'Appennino settentrionale (3).

(1) Probabilmente il luogo più vicino nel quale è rappresentata la parte inferiore dell'Eocene sono i monti di Roccasecca sul Liri, dove, nella valle della Melfa, trovai ghiaie di calcari con *Alveolina* di quella *facies greca* che si estende dalla Grecia fino alla Dalmazia ed in Italia al Gargano ed alla Maiella; è questo l'unico luogo del bacino del Liri nel quale sia indicato l'Eocene in modo sicuro.

(2) Nella *Carta della Campagna Romana*, pubblicata dall'*Ufficio geologico*, si attribuisce l'arenaria un poco più sfatta dei dintorni di Santa Severa e di Furbara presso il littorale al Miocene inferiore, terreno che in queste regioni non si conosce.

(3) Contiene banchi di Nummuliti e di Orbitoidi nell'Umbria, dove il Bonarelli esprime il dubbio che sia Oligocenica, e Nummuliti scarse in varie parti dell'Appennino, specialmente nei dintorni di Firenze. Quivi sono in banchi nella parte superiore (Madonna del Sasso, a sud di Vinci), o sperse nell'arenaria (Monte Ceceri, S. Andrea a Sveglia): furono indicati in altri luoghi dei dintorni di Firenze; ma non provengono dal Macigno, bensì da lenti di calcare arenaceo, nummulitico, che fa parte della formazione sovrastante. A S. Andrea a Sveglia il Marinelli trovò per primo *Nummulites Lucasana* Def., *N. Faesulana* Trab. (= *N. Tchihatcheffi* D'Arch. var. a camere più fitte), *N. Beaumonti* D'Arch., *N. subbeaumonti* De la H. (= *N. Cocchii* Trab.), *Assilina*, *Orbitoides*. I cavatori chiamano anche i fossili *aglie* o *agliotti*, cioè ghiaie, ghiaiotti, non perchè li abbiano mai conosciuti, ma perchè li confondono con le altre ghiaiette della minuta puddinga poligenica. Il Bonarelli ritiene oligocenico anche il Macigno di Val di Magra che pure in

Succede ed in parte equivale al Macigno, nei monti predetti, e forma anche il monte Jugo presso Viterbo, una alternanza di arenaria calcarifera compattissima (*Pietraforte*), di schisti argillosi, di calcari compatti rosei o bigi (*Palombino*) ricchissimi di fucoidi, e calcari screziati con Nummuliti indicati nella massima parte dei monti di Civitavecchia, secondo l'eccellente carta geologica di Tommaso Tittoni integralmente riportata nelle Carte dell'Ufficio geologico, ed appartenenti alla parte superiore dell'Eocene medio. Nella *pietraforte* dei dintorni di Civitavecchia trovai i *Bathysiphon*, fossili senza importanza paleontologica, in quella di Monteromano un *Inoceramus Cripsii* Mant. Nei calcari screziati dei dintorni di Canale Monterano distinsi *Alveolina* cfr. *oblonga* Duj., *Nummulites curvispira* Mgh.. *N. subirregularis* De la H. Sono rocce e fossili identici a quelli che occupano simile piano nei dintorni di Firenze e nell'Appennino romagnolo (1) ed equivalenti

---

vecchie carte, contro il parere di persone competenti, era indicato sovrastante ai terreni schistoso-calcarei della vallata. Questo scambio di stratigrafia fu la vera causa dei gravi errori commessi per la galleria del Borgallo, come errori stratigrafici consimili lo furono per quasi tutte le grandi gallerie del nostro Appennino, i cui studî geologici erano stati affidati a persone non competenti, o per le quali non si tenne conto di alcuno studio geologico. Il Lotti poi, parte perchè unisce all'Eocene arenarie mioceniche, parte perchè non riconosce alcune ripetizioni di strati dovute a pieghe, divide l'arenaria eocenica dell'alto Appennino, specialmente Tosco-Modenese-Bolognese, in due zone; ma questa divisione dell'arenaria eocenica non esiste in alcun luogo e ce lo dice l'accurato esame degli spaccati naturali: bensì « la zona calcareo-argillosa » detta intermedia alle due zone arenacee è invece superiore ad anticlinali diversi di unica zona.

La *facies* eocenica *nord-Apenninica*, all'opposto di quanto sostiene il Lotti, è grandemente uniforme dalle Alpi Apuane, anzi da Sestri-Ponente alla Valle Tiberina. Dopo le cose esposte nelle presenti Note è inutile soggiunga, non perchè creda migliore il mio modo di vedere, ma per constatare le differenze, che della classificazione che il Lotti propone per varî tratti dell'Eocene apenninico in 25 diverse colonne divise ciascuna in quattro parti, io non convengo pure in una sola, per la successione stratigrafica, per la paleontologia, nè per l'età. Io non trovo da cambiare la successione dei terreni eocenici da me riassunta nel 1881, del resto dopo esame di tutta la regione, cioè: 1. calcare nummulitico che si potrebbe dire *Hauptnummuliten kalk.* e schisti policromi; 2. arenaria e calcare ad *Helminthoida*; 3. argille galestrine e zona serpentinosa.

(1) Sulla presenza dell'*Inoceramus*, che se non fosse il *Cripsii* Mant. dovrebbe portare il nome di *I. eocenus* Mgh., nell'Eocene medio, e sulla alternanza di strati a *Inocerami* con strati a Nummuliti, coerentemente a quanto ha sostenuto il Lotti, non ho il menomo dubbio. Lo spaccato di S. Andrea a Sveglia, fra gli altri, differente dalla interpretazione, che credo in varî modi errata, datane recentemente da alcuno, ne è secondo me una chiara riprova.

Il calcare minutamente screziato a *N. subirregularis* De la H. non è da confondere col calcare a più grosse *Nummuliti* che si trova pure in questa stessa zona, per lo più immediatamente sopra l'arenaria o in mezzo all'arenaria, come nel Chianti e in generale nell'Appennino aretino e fiorentino, p. es. a Mosciano. In questa classica località esiste una inversione che non si estende ai luoghi vicini, per la quale il calcare Nummulitico

in molta parte al calcare ad *Helminthoida* di questo e del rimanente Appennino (1).

Potrebbe darsi che da questa zona di calcari nummulitici sovrastanti al Macigno, anzi che da calcari della zona più antica derivassero le ghiaie di calcare nummulitico che riempiono i depositi quaternarî intorno Canino e Artena di Castro e quelli alla base delle colline di Cerveteri.

Soltanto nei monti di Trevinano appariscono calcari grigi compatti (*alberese*) ed argille schistose (*galestri*) contenenti qualche minimo lembo, che ritengo tufo gabbroso, il più meridionale di questo Appennino, scoperto dal Verri, costituito da minuti frantumi agglomerati di gabbro e serpentino derivanti dalle maggiori eruzioni della Maremma settentrionale. Cotali terreni qui pure appartengono all'Eocene superiore (2).

A levante e a mezzogiorno i terreni dell'Eocene medio di *facies nord-Apenninica* non appariscono più; anzi, nella provincia romana, ad est e a sud l'Eocene manca od è ridotto a pochissimi strati di *facies ausonia*. Questi appaiono in pochi punti a sinistra dell'Aniene (3), e con tratto continuo nella

---

locale pare sottostante all'arenaria. Ben la vide e tale lo giudicò il Murchison che però suppose dalla parte del piano un anticlinale non esistente. Quando il Lotti riconobbe che i calcari nummulitici dei luoghi contigui sono sovrastanti all'arenaria, disconobbe la giustissima osservazione del Murchison, e così fece il Trabucco. Forse per via di questa rettificazione fatta nei dintorni di Mosciano il Lotti sminuisce l'importanza dei calcari nummulitici sottostanti all'arenaria, e tali calcari, costituenti un estesissimo ed importante piano dell'Eocene inferiore nord-appenninico, sono talora attribuiti alla Creta inferiore, p. es. nei monti di Barga, nelle carte pubblicate dall'Ufficio geologico, redatte da Lotti e da Zaccagna; come, ripetutamente, i galestri rossi nei quali alterna la parte superiore dei detti calcari nummulitici, vengono tenuti artificiosamente separati, e col nome di *scaglia rossa* attribuiti alla Creta superiore.

(1) Da prima univo questo calcare all'Eocene superiore; ma dopo le Nummuliti trovatevi e descritte dal Marinelli, lo attribuisco alla parte superiore dell'Eocene medio.

(2) Su tale età sono ormai d'accordo i geologi italiani, salvo qualche recente eccezione. Se talora la disposizione stratigrafica non si può osservare per mancanza di altri terreni, od assai raramente rimane incerta, quasi universalmente essa è tale da non ammettere dubbî nell'osservatore. Trabucco recentemente attribuì a differenti piani dell'Eocene le serpentine dei dintorni di Firenze: però quelle dell'Impruneta non fanno eccezione alle altre perchè anch'esse fan parte della zona sovrastante ai calcari ad *Helminthoida* con *N. subirregularis* de la H., dei Falciani.

Lo Zaccagna nei dintorni di Montecatini e Monsummano, ed altri, hanno talora attribuito alla presente zona serpentinosa le brecciole che qualche volta accompagnano il calcare nummulitico delle zone più antiche e che sono glauconiose, e formate da frantumi di rocce antichissime, come *gneiss*, graniti, dioriti o diabasi talora serpentinizzati ma con caratteri diversi dalle serpentine derivanti da Peridotiti; talora vi saranno forse anche frantumi di serpentine, ma d'origine e d'età diverse da quelle eoceniche.

(3) Il De Angelis mi attribuì una confusione di strati nummulitici di Castel Madama col Miocene; ma per verità questa è la prima volta che io parlo dei calcari nummulitici della provincia di Roma fuori di Civitavecchia.

valle del suo affluente Licenza, specialmente a destra, a Roccagiovane, Licenza, e rimpetto Percile.

Essi sono perfettamente concordanti sopra il calcare rosso con selce che credo Cretaceo, e sono banchi regolari di calcare selcifero, grigio chiaro o scuro, compatto o anche ceroide, più spesso screziato, alternativamente fino e grossolano, organogenico, e principalmente costituito da *Nummulites* e da *Orbitoides* con frammenti di Coralli e di Briozoi che gremiscono tanto il calcare quanto la silice nella quale sono eventualmente convertiti. Vi sono rappresentati varî piani dell'Eocene, come risulta dalle seguenti specie determinate tutte dal mio assistente dott. Alessandro Martelli.

Rimpetto Percile, in strati bassi, si trovano insieme *Alveolina* sp., *Orbitoides aspera* Gümb., *O. papyracea* Boub., *Nummulites Guettardi* D'Arch. et H., *N. biaritzensis* D'Arch., *N. sub Beaumonti* De la H., *N. Lamarcki* D'Arch. et H., *N. laevigata* Lck., *N. elegans* Sow., *N. planulata* Lck. Questi strati con la coppia *Lamarcki* e *laevigata*, appartengono alla parte più antica dell'Eocene medio, se non anche alla più alta di quello inferiore. Da Roccagiovane, da un frammento di calcare proveniente da strati più alti, provengono *Nummulites variolaria* Sow., *N. Guettardi* D'Arch. et H., *N. biaritzensis* D'Arch., *N. Lucasana* Defr., et var. *obsoleta* De la H., var. *granulata* De la H., *N. perforata* D'Orb. var. *Renevieri* De la H., et *obesa* Leym., fossili appartenenti alla zona media dell' Eocene medio, come l'arenaria di Civitavecchia.

Alla stessa zona o ad ogni modo all'Eocene medio, appartiene il calcare di Guadagnolo sulla sinistra dell'Aniene con la coppia *N. Lucasana* e *perforata* determinata dal Tellini al De Angelis.

Negli strati superiori, lungo tutta la valle del Licenza, dominano grandemente le *Orbitoides* con Briozoi; talora anzi esse costituiscono l' intera massa, anche della silice. Alle specie di *Nummulites* dette sopra, subentra una piccola Nummulite striata con *Orbitoides aspera* Gümb., *O. papyracea* Boub., typus et var. *Fortisi* D'Arch., *O. dispansa* Sow., *O. applanata* Sow., *O. radians* D'Arch., *Heterostegina* sp., *Anomalina* sp., *Operculina* sp., il quale complesso è attribuibile, per l'abbondanza delle *Orbitoides*, alla parte più alta dell' Eocene medio, od all'Eocene superiore. De Angelis lo accenna a Castel Madama sulla sinistra dell'Aniene. È possibile che a questo piano, se non ad altro più recente, appartengano i calcari a piccole *Orbitoides* di Veroli, Collepardo, Trisulti, nella valle del Sacco, dei quali non ho raccolto nè studiato esemplari (1).

(1) Ad Alatri, a Fumone, ed in varî luogi dei monti Ernici, calcari cretacei a *Hippurites* e *Radiolites* con minuti e svariati frammenti organici, identici a quelli della Creta superiore (Turoniano e Senoniano) della Grecia e della Dalmazia, furono talora appellati calcari nummulitici; ma di *Nummulites* non vi è traccia alcuna. Nemmeno sono nummulitici ma cretacei i calcari screziati della Valle di S. Marta tra Fumone e Ferentino. A

L'altezza totale di questi calcari nummulitici è di non più che 500 m. Con eguali caratteri si ripetono a settentrione a Orvinio e nelle vicinanze entro i confini dell' Umbria, a levante nelle Marche, a mezzogiorno in Basilicata e nelle Calabrie per lo meno nei dintorni di Stilo.

Matematica. — *Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali con due variabili indipendenti.* Nota del dottor Tommaso Boggio, presentata dal Socio L. Bianchi.

In questa Nota espongo un procedimento che permette di trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè due equazioni lineari, a due variabili indipendenti, d'ordine qualunque, delle quali una è omogenea, abbiano almeno una soluzione comune (1). Indico poi alcune applicazioni del risultato ottenuto (2).

1. Sia Φ una funzione di x, y, e consideriamo le equazioni lineari:

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_1 z = \sum_{0}^{m}{}_{ij} a_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \, \partial y^j} = \Phi \ (3)$$

$$(2) \qquad \mathfrak{D}_2 z = \sum_{0}^{n}{}_{ij} a'_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \, \partial y^j} = 0 ,$$

ove le a, a' sono coefficienti costanti, e z è una funzione incognita di x, y.

Supponiamo poi dapprima che le espressioni $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ non abbiano a comune, come fattore, nessuna espressione differenziale, cioè che siano *prime*

Guarcino sono indicati calcari con *Orbitoides* e *Nummulites*. Calcari nummulitici non ve ne ho trovati; le *Orbitoides* appartengono alla Creta superiore, come quelle che Marinelli ha trovato nella Creta del Monte Conero ad Ancona e del Monte Iudica in Sicilia, e come quelle di Pachino pure in Sicilia: il De Gregorio distinse queste col nome generico di *Simplorbites*; ma Douvillé e Schlumberger serbano anzi ad esse il nome di *Orbitoides* attribuendo a sottogeneri diversi le specie più recenti.

(1) Nel caso di due equazioni di 2° ordine, anche non lineari, la questione è stata trattata dal prof. Bianchi. Cfr. Bianchi, *Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali di 2° ordine con due variabili* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 4ª, vol. II, 2° semestre 1886).

(2) I calcoli relativi si troveranno esposti per disteso in una Memoria di prossima pubblicazione.

(3) Scrivendo $\sum_{0}^{m}{}_{ij}$ intendiamo che ad i, j, bisogna dare quei valori (interi e positivi o nulli) la cui somma è $\leq m$; quando invece scriveremo $\sum_{0}^{m}{}'_{ij}$ intenderemo di dare ad i, j solo i valori (interi e positivi o nulli) la cui somma vale m.

tra loro; allora io dico che: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le* (1), (2) *abbiano soluzioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione:*

$$\mathfrak{D}_2 \Phi = 0. \tag{3}$$

È intanto facile vedere che questa condizione è necessaria.

Infatti si ha, dalla (1):

$$\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1 z = \mathfrak{D}_2 \Phi = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 z$$

onde, per la (2):

$$\mathfrak{D}_2 \Phi = 0,$$

come si era asserito.

2. Mostriamo ora che quella condizione è pure sufficiente.

Prendiamo perciò le derivate parziali successive dei primi $n-1$ ordini della (1) e dei primi $m-1$ ordini della (2); otteniamo così le equazioni:

$$\sum_{0}^{m}{}_{ij} a_{ij} \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} = \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k} \quad , \quad (h+k<n-1)$$

$$\sum_{0}^{n}{}_{ij} a'_{ij} \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} = 0 \quad , \quad (h+k<m-1)$$

$$\sum_{0}^{m}{}_{ij} a_{ij} \frac{\partial^{i+j+n-1} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} = \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^h \partial y^k} \quad , \quad (h+k=n-1)$$

$$\sum_{0}^{n}{}_{ij} a'_{ij} \frac{\partial^{i+j+m-1} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} = 0 \quad , \quad (h+k=m-1);$$

ponendo, per brevità:

$$p_{r,s} = \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s} \quad , \quad (r+s<m+n-1)$$

$$\varphi_{r,s} = \frac{\partial^{m+n-1} z}{\partial x^r \partial y^s} \quad , \quad (r+s=m+n-1)$$

possiamo scrivere:

$$\sum_{0}^{m}{}_{ij} a_{ij} p_{i+h,j+k} = \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k} \quad , \quad (h+k<n-1) \tag{4}$$

$$\sum_{0}^{n}{}_{ij} a'_{ij} p_{i+h,j+k} = 0 \quad , \quad (h+k<m-1) \tag{5}$$

$$\sum_{0}^{m}{}'_{ij} a_{ij} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0}^{m-1}{}_{ij} a_{ij} p_{i+h,i+k} = \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^h \partial y^k} \quad , \quad (h+k=n-1) \tag{6}$$

$$\sum_{0}^{n}{}'_{ij} a'_{ij} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0}^{n-1}{}_{ij} a'_{ij} p_{i+h,j+k} = 0 \quad , \quad (h+k=m-1). \tag{7}$$

Le equazioni (6), (7) sono $n+m$ in tutto, onde supposto diverso da zero il determinante A formato coi coefficienti delle funzioni φ, esse determinano le $m+n$ funzioni φ in funzione delle p.

3. Ciò posto, è chiaro che basta determinare le $p_{r,s}$ in modo che siano soddisfatte le equazioni ai differenziali totali:

$$(8)\qquad \begin{cases} dp_{r,s} = p_{r+1,s}\,dx + p_{r,s+1}\,dy \quad , \quad (r+s < m+n-2) \\ dp_{r,s} = \varphi_{r+1,s}\,dx + \varphi_{r,s+1}\,dy \quad , \quad (r+s = m+n-2)\,. \end{cases}$$

Indichiamo poi con f una funzione di x, y e delle $p_{r,s}$ (queste quantità essendo ora riguardate come variabili indipendenti) e consideriamo le equazioni:

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{X}f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sum_{0\,rs}^{m+n-3} p_{r+1,s}\dfrac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0\,rs}^{m+n-2\,\prime} \varphi_{r+1,s}\dfrac{\partial f}{\partial p_{rs}} = 0 \\ \mathrm{Y}f = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sum_{0\,rs}^{m+n-3} p_{r,s+1}\dfrac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0\,rs}^{m+n-2\,\prime} \varphi_{r,s+1}\dfrac{\partial f}{\partial p_{rs}} = 0\,. \end{cases}$$

Allora, in virtù di una nota proprietà, affinchè il sistema (8) sia integrabile è necessario e sufficiente che il sistema (9) sia Jacobiano, cioè che sia identicamente:

$$\mathrm{X}(\mathrm{Y}f) - \mathrm{Y}(\mathrm{X}f) = 0\,;$$

ora si ha

$$\mathrm{X}(\mathrm{Y}f) - \mathrm{Y}(\mathrm{X}f) = \sum_{0\,rs}^{m+n-3} (\mathrm{X}p_{r,s+1} - \mathrm{Y}p_{r+1,s})\frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0\,rs}^{m+n-2\,\prime} (\mathrm{X}\varphi_{r,s+1} - \mathrm{Y}\varphi_{r+1,s})\frac{\partial f}{\partial p_{rs}}\,,$$

e poichè dalle (9) si deduce: $\mathrm{X}p_{r,s+1} = p_{r+1,s+1} = \mathrm{Y}p_{r+1,s}$, ne viene che dovrà essere identicamente:

$$(10)\qquad \mathrm{X}\varphi_{r,s+1} - \mathrm{Y}\varphi_{r+1,s} = 0 \quad , \quad (r+s = m+n-2)\,.$$

Queste equazioni sono in tutto $m+n-1$; giova però notare che esse non sono tutte indipendenti, perchè ora mostreremo che se è soddisfatta una di esse, lo saranno pure tutte le altre.

Infatti prendendo l'X e l'Y di ambo i membri delle (6), (7) otteniamo:

$$(6')\qquad \sum_{0\,ij}^{m\,\prime} a_{ij}\,\mathrm{X}\varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0\,ij}^{m-1\,\prime} a_{ij}\,\varphi_{i+h+1,j+k} + \sum_{0\,ij}^{m-2} a_{ij}\,p_{i+h+1,j+k} = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{h+1}\,\partial y^k}\,,$$

$$(h+k = n-1)$$

$$(6'')\qquad \sum_{0\,ij}^{m\,\prime} a_{ij}\,\mathrm{Y}\varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0\,ij}^{m-1\,\prime} a_{ij}\,\varphi_{i+h,j+k+1} + \sum_{0\,ij}^{m-2} a_{ij}\,p_{i+h,j+k+1} = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^h\,\partial y^{k+1}}\,,$$

$$(h+k = n-1)$$

$$(7') \quad \sum_{0\ ij}^{n\ \prime} a'_{ij}\, \mathrm{X}\varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0\ ij}^{n-1\ \prime} a'_{ij}\, \varphi_{i+h+1,j+k} + \sum_{0\ ij}^{n-2} a'_{ij}\, p_{i+h+1,j+k} = 0$$

$$(h + k = m - 1)$$

$$(7'') \quad \sum_{0\ ij}^{n\ \prime} a'_{ij}\, \mathrm{Y}\varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0\ ij}^{n-1\ \prime} a'_{ij}\, \varphi_{i+h,j+k+1} + \sum_{0\ ij}^{n-2} a'_{ij}\, p_{i+h,j+k+1} = 0\,,$$

$$(h + k = m - 1).$$

Dalle (6′), (6″) si ha sottraendo:

$$(6_1) \quad \sum_{0\ ij}^{m\ \prime} a_{ij}\, (\mathrm{X}\varphi_{i+h,j+k+1} - \mathrm{Y}\varphi_{i+h+1,j+k}) = 0 \quad , \quad (h + k = n - 2)\,,$$

e, dalle (7′), (7″):

$$(7_1) \quad \sum_{0\ ij}^{n\ \prime} a'_{ij}\, (\mathrm{X}\varphi_{i+h,j+k+1} - \mathrm{Y}\varphi_{i+h+1,j+k}) = 0 \quad , \quad (h + k = m - 2);$$

onde le $m + n - 1$ quantità $\mathrm{X}\varphi_{r,s+1} - \mathrm{Y}\varphi_{r+1,s}$ sono legate dalle $m + n - 2$ equazioni (6_1), (7_1), che sono lineari ed omogenee; inoltre i determinanti d'ordine $m + n - 2$ estratti dalla matrice dei coefficienti non possono essere tutti nulli, perchè se ciò accadesse dovrebbe pure essere nullo A, ciò che si è escluso; risolvendo pertanto le (6_1), (7_1) rispetto ad $m + n - 2$ incognite, i cui cofficienti costituiscano uno di questi determinanti non nulli, avremo queste incognite espresse come funzioni lineari ed omogenee della rimanente, onde se questa è nulla, sono pure nulle tutte le altre $m + n - 2$; e ciò prova il nostro asserto.

4. Ora mostreremo che dalle (10) si deduce la (3), e viceversa.

Infatti dalle (6′), dall' ultima delle (6″) (cioè quella corrispondente ad $h = 0$) e dalle (6), (4), si ricava facilmente:

$$\sum_{0\ ij}^{m\ \prime} a_{ij} \Bigg[\sum_{0\ k}^{n-1\ \prime} a'_{n-k,k}\, \mathrm{X}\varphi_{i+n-1-k,j+k} + a'_{0n}\, \mathrm{Y}\varphi_{i,j+n-1} + \sum_{0\ hk}^{n-1\ \prime} a'_{hk}\, \varphi_{i+h,j+k} +$$

$$+ \sum_{0\ hk}^{n-2} a'_{hk}\, p_{i+h,j+k} \Bigg] + \sum_{0\ ij}^{m-1\ \prime} a_{ij} \left(\sum_{0\ hk}^{n\ \prime} a'_{hk}\, \varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0\ hk}^{n-1} a'_{hk}\, p_{i+h,j+k} \right) +$$

$$+ \sum_{0\ ij}^{m-2} a_{ij} \left(\sum_{0\ hk}^{n} a'_{hk}\, p_{i+h,j+k} \right) = \sum_{0\ hk}^{n} a'_{hk}\, \frac{\partial^{h+k} \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^h\, \partial y^k}\,,$$

ora, in virtù delle (5), (7) le espressioni entro le (...) sono entrambe nulle, quindi rimane:

$$(11) \quad \sum_{0\ ij}^{m\ \prime} a_{ij} \Bigg[\sum_{0\ k}^{n-1\ \prime} a'_{n-k,k}\, \mathrm{X}\varphi_{i+n-1-k,j+k} + a'_{0n}\, \mathrm{Y}\varphi_{i,j+n-1} + \sum_{0\ hk}^{n-1\ \prime} a'_{hk}\, \varphi_{i+h,j+k} +$$

$$+ \sum_{0\ hk}^{n-2} a'_{hk}\, p_{i+h,j+k} \Bigg] = \mathfrak{D}_2\, \boldsymbol{\Phi}\,.$$

Ora osserviamo che se nelle (7′) al posto di h si legge $h-1$, e poi si permutano h, k con i, j si ha:

$$\sum_0^{n}{}'_{hk} a'_{hk} \mathrm{X}\varphi_{i+h-1,j+k} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk} a'_{hk} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-2}{}_{hk} a'_{hk} p_{i+h,j+k} = 0 ,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m \quad ; \quad i+j = m) ;$$

e dall' ultima delle (7″) (cioè quella corrispondente ad $h = 0$) permutando h, k con i, j si ottiene:

$$\sum_0^{n}{}'_{hk} a'_{hk} \mathrm{Y}\varphi_{h,m+k-1} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk} a'_{hk} \varphi_{h,m+k} + \sum_0^{n-2}{}_{hk} a'_{hk} p_{h,m+k} = 0 .$$

Sostituendo nella (11) e riducendo, si deduce:

$$(12) \qquad -a'_{0n} \sum_0^{m-1}{}_k a_{m-k,k} (\mathrm{X}\varphi_{m+k-1,n+k} - \mathrm{Y}\varphi_{m-k,n+k-1}) +$$

$$+ a_{0m} \sum_0^{n-1}{}_k a'_{n-k,k} (\mathrm{X}\varphi_{n-k-1,m+k} - \mathrm{Y}\varphi_{n-k,m+k-1}) = \mathfrak{D}_2 \Phi .$$

Ora, se le (10) sono soddisfatte, le quantità entro le (...) sono nulle e così otteniamo la (3). Inversamente, se la (3) è soddisfatta, l'equazione precedente unita alle (6_1), (7_1) dà un sistema di $m+n-1$ equazioni, lineari ed omogenee fra le $m+n-1$ incognite $\mathrm{X}\varphi_{r,s+1} - \mathrm{Y}\varphi_{r+1,s}$, e siccome è facile vedere che il determinante dei coefficienti, a meno del segno, vale A, il quale è stato supposto diverso da zero, si conclude che devono necessariamente esser nulle tutte le incognite; e così otteniamo le (10), come avevamo asserito.

In tal modo il nostro teorema è completamente dimostrato.

Abbiamo supposto che il determinante A fosse diverso da zero; però il teorema, in generale, continua ancora a sussistere anche se $\mathrm{A} = 0$.

5. Supponiamo ora che le espressioni $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ non siano prime tra loro; sia cioè:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}' \mathfrak{D} \quad , \quad \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}'' \mathfrak{D} ,$$

ove $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ sono espressioni prime tra loro.

Le (1), (2) diventano allora:

$$(1') \qquad \mathfrak{D}' \mathfrak{D} z = \Phi \quad , \quad \mathfrak{D}'' \mathfrak{D} z = 0 ;$$

orbene *la condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni precedenti abbiano soluzioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione*:

$$\mathfrak{D}'' \Phi = 0 .$$

Infatti, posto $\mathrm{Z} = \mathfrak{D} z$, le equazioni (1′) possono scriversi:

$$\mathfrak{D}' \mathrm{Z} = \Phi \quad , \quad \mathfrak{D}'' \mathrm{Z} = 0 ,$$

e applicando il teorema del § 1 a queste due equazioni, si conclude la proposizione enunciata.

6. Vediamo alcune applicazioni del teorema del § 1.

Indichiamo con $\mathfrak{D}$ un'espressione lineare analoga a $\mathfrak{D}_1$, e con $u(x, y)$ una funzione di x, y, e calcoliamo $\mathfrak{D}(xu)$; è chiaro che si avrà un risultato della forma:

$$\mathfrak{D}(xu) = x\,\mathfrak{D}u + \mathfrak{D}_x u\,,$$

$\mathfrak{D}_x$ essendo un'espressione lineare di un tipo analogo a $\mathfrak{D}$ (1).

Se la funzione u soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}u = 0$, si trae:

$$\mathfrak{D}^2(xu) = 0\,.$$

Se $v(x, y)$ è una funzione che verifica l'equazione $\mathfrak{D}v = 0$, e si pone:

$$\mathrm{U} = x\,u + v\,, \tag{13}$$

si ha $\mathfrak{D}^2\mathrm{U} = 0$.

Supponiamo ora che le espressioni $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ siano prime tra loro, allora si può dimostrare che: *Ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}^2\,\mathrm{U} = 0$ *può rappresentarsi colla* (13).

È chiaro che basta per ciò dimostrare che, data la funzione U, si può sempre determinare una funzione u che soddisfa alle equazioni:

$$\mathfrak{D}(\mathrm{U} - xu) = 0 \quad , \quad \mathfrak{D}u = 0\,,$$

ossia, posto $\boldsymbol{\Phi} = \mathfrak{D}\mathrm{U}$:

$$\mathfrak{D}_x u = \boldsymbol{\Phi} \quad , \quad \mathfrak{D}u = 0\,.$$

Dall'espressione di $\boldsymbol{\Phi}$ risulta $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Phi} = 0$; quindi pel teorema del § 1 possiamo affermare che esiste sempre la funzione u, e così il teorema è dimostrato.

Supponendo sempre $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ prime tra loro, si può dimostrare che *ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}^p\mathrm{U} = 0$ *può rappresentarsi colla formola:*

$$\mathrm{U} = x^{p-1}\,u_1 + x^{p-2}\,u_2 + \cdots + x u_{p-1} + u_p\,,$$

le u *essendo funzioni che soddisfanno all'equazione* $\mathfrak{D} = 0$ (2).

(1) Se $\mathfrak{D} = \sum a_{ij}\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\,\partial y^j}$, si ha $\mathfrak{D}_x = \sum a_{ij}\,i\dfrac{\partial^{i+j-1}}{\partial x^{i-1}\,\partial y^j}$, cioè $\mathfrak{D}_x$ non è altro che la *derivata funzionale*, rispetto ad x, dell'espressione $\mathfrak{D}$.

(2) Se l'equazione $\mathfrak{D} = 0$ si riduce all'equazione di Laplace $\Delta^2 = 0$, questo teorema è del prof. Almansi. Cfr. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$ (Annali di Matematica; serie III, t. II, a. 1898).

7. Poniamo ora: $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$. Allora si può dimostrare, procedendo come nel § precedente, che *ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}U = 0$, *può esprimersi colla formola* $U = U_1 + U_2$, *ove* U_1, U_2 *sono funzioni che verificano le equazioni* $\mathfrak{D}_1 U_1 = 0$, $\mathfrak{D}_2 U_2 = 0$.

Da quanto precede risulta che ogni funzione U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}_1^p \mathfrak{D}_2^q U = 0$, può rappresentarsi mediante funzioni che verificano le equazioni $\mathfrak{D}_1 = 0$, $\mathfrak{D}_2 = 0$.

Si può pertanto dire: *Se l'espressione* $\mathfrak{D}$ *è decomponibile nel prodotto di altre espressioni lineari, l'integrale generale dell'equazione* $\mathfrak{D} = 0$ *può esprimersi mediante gli integrali di altre equazioni più semplici.*

8. Le proprietà precedenti possono estendersi ad equazioni lineari a coefficienti variabili, aggiungendo però la condizione della commutabilità fra le varie espressioni lineari che si considerano.

Per quanto riguarda il teorema del § 1, bisogna supporre che $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ siano commutabili, cioè che $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1$; relativamente ai teoremi del § 6, bisogna aggiungere la condizione che $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ siano commutabili; per i teoremi del § 7, bisogna che $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ siano commutabili, e così pure siano commutabili $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_{1x}$ e $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_{2x}$.

Meccanica. — *Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota IV del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In una Nota precedente, la terza di questa serie (1), aveva stabilito le equazioni differenziali che reggono il moto dei varî strumenti sismici, supponendoli costituiti ciascuno da un'unica massa sospesa almeno per un punto al terreno e soddisfacente a certe condizioni relative agli assi principali d'inerzia. Quanto alle forze aveva ammesso il seguente postulato sperimentale, che non richiede alcuna ipotesi sulla loro natura e che per la sua generalità è applicabile a tutte le specie di strumenti considerati: « *Qualsiasi strumento sismico è soggetto alla gravità e ad un sistema di resi-*

(1) V. pag. 472.

stenze passive che hanno per risultante una coppia di momento infinitesimo rispetto al peso della massa oscillante » (1).

Arrivati a questo punto, sarebbe impossibile procedere alla integrazione delle equazioni differenziali trovate, perchè il precedente postulato lascia indeterminata la forma analitica delle forze. Però, senza analizzarle dal punto di vista fisico, si può facilmente risolvere la difficoltà che qui si presenta; e ciò appunto mi propongo di fare in questa Nota, ottenendo un risultato che mi sembra abbastanza notevole, perchè evita l'analisi sopra accennata, la quale si concreterebbe poi in altre ipotesi speciali più o meno verosimili ma sempre arbitrarie (2).

16. Per raggiungere lo scopo propostomi, basta ricorrere a un secondo postulato sperimentale, che è verificato con grandissima approssimazione da tutti gli strumenti registratori dei movimenti microsismici:

« *Se uno qualunque degli strumenti considerati si muove mentre il terreno è in quiete, le componenti del suo moto sono oscillazioni isocrone smorzate secondo la legge del decremento logaritmico* » (3).

Per vedere come una tale premessa sia sufficiente, seguo un metodo analogo a quello già seguito in altri lavori. Si noti che le resistenze compariscono soltanto negli ultimi termini delle equazioni (16), (16_1), (17) e (19_1), cioè in quelle funzioni Φ, Ψ, ..., Ω, che sono definite dalle posizioni (R), (R_1), (S), (T) e che furono messe in evidenza perchè non contengono esplicitamente le componenti del moto sismico. Ora le equazioni differenziali citate valgono qualunque sia il movimento del terreno; quindi, in particolare, anche quando il terreno è in quiete, cioè quando tutte le componenti del moto sismico sono nulle insieme con le loro derivate. Ma in tal caso si annullano identicamente tutti i termini delle equazioni, esclusi gli ultimi; ossia il movimento strumentale non perturbato da azioni sismiche soddisfa alle equazioni:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \ldots, \quad \Omega = 0.$$

Ciascuna di queste equazioni contiene esplicitamente una sola componente del moto relativo, ed è della forma

$$N = \varepsilon'' + I\varepsilon + J = 0,$$

rappresentando genericamente con ε una delle variabili λ, μ, ν, ω, con I

(1) V. al numero 11, pag. 473.

(2) A questa analisi aveva ricorso nella mia I Nota *Sulla determinazione dei moti sismici*, Rendic. Acc. Linc., vol. X, pag. 143. Sebbene i risultati allora ottenuti concordino con quelli che otterrò al presente, pure riconosco che molte obbiezioni si potrebbero fare alle ipotesi ammesse sulle singole forze, specialmente sugli attriti delle leve scriventi, che sono la parte più importante delle resistenze passive.

(3) S'intende che le conseguenze alle quali arriverò sono applicabili soltanto agli strumenti che non si scostano sensibilmente dalla legge enunciata.

una funzione nota del *peso*, che può essere anche nulla, e con J una funzione lineare delle forze incognite.

Poichè si ammette che il moto rappresentato dalla variabile ε e retto dall'equazione $N = 0$ è un' oscillazione smorzata secondo la legge del decremento logaritmico, ε deve avere la forma

$$\varepsilon = e^{Ht}(P \operatorname{sen} Kt + Q \cos Kt) = f(t); \tag{20}$$

e quindi la funzione N, con la quale si rappresenta genericamente una delle Φ, Ψ, ..., Ω, deve essere del tipo

$$\varepsilon'' - 2H\varepsilon' + (H^2 + K^2)\varepsilon. \tag{21}$$

Per dimostrarlo basterà provare: *a*) che la ε definita dalla (20) è la funzione più generale soddisfacente alle condizioni impostele dalla natura del movimento strumentale; *b*) ch' essa è appunto l' integrale generale della equazione

$$\varepsilon'' - 2H\varepsilon' + (H^2 + K^2)\varepsilon = 0.$$

a) Qualunque siano le costanti P e Q, esiste sempre un istante t_0, definito dalla condizione

$$\frac{Q}{P} = -\, tg\, K\, t_0,$$

nel quale la funzione $f(t)$ si annulla; ma allora essa si annulla anche in tutti e soli gl' istanti della forma

$$t_0 + m\tau, \quad (m = \text{intero qualunque})$$

purchè risulti

$$K\tau = \pi;$$

quindi, prefissata mediante l'esperienza la costante τ, basterà prendere

$$K = \frac{\pi}{\tau} \tag{V}$$

perchè la funzione $\varepsilon = f(t)$ rappresenti un *movimento oscillatorio col periodo semplice eguale a* τ.

Resta determinato anche un istante t_1, definito dalla condizione

$$\frac{PK + QH}{QK - PH} = tg\, K\, t_1. \ (^1)$$

(1) Si può osservare che t_1 non è arbitrario, ma anzi dipende da t_0 e non differisce mai da t_0 per multipli interi di π. Infatti, ricordando la definizione di t_0, questa eguaglianza diventa:

$$tg\, K\, t_1 = \frac{H\, tg\, Kt_0 - K}{K\, tg\, Kt_0 + H}.$$

Se ora fosse

$$t_1 = t_0 + r\pi,$$

sarebbe

$$tg\, K\, t_1 = tg\, K\, t_0,$$

e la precedente identità porterebbe alla conseguenza assurda

$$K = 0.$$

nel quale si annulla la funzione

$$\varepsilon' = f'(t) = e^{Ht}\,[(PH - QK)\,\text{sen}\,Kt + (PK + QH)\cos Kt]\,,$$

e allora si trova ch' essa si annulla anche per tutti gl' istanti della forma

$$t_1 + m\,\tau \;(m = \text{intero qualunque}).$$

Ma le radici di $\varepsilon' = 0$ sono istanti di massimo o minimo per ε; i valori assoluti di questi massimi e minimi sono appunto le *ampiezze* delle oscillazioni semplici; e quindi se l' ampiezza d' una oscillazione qualunque è

$$\varepsilon_1 = |f(t_1)| = e^{Ht_1}\,|\,P\,\text{sen}\,K\,t_1 + Q\cos K\,t_1|\,,$$

l'ampiezza della successiva sarà

$$\varepsilon_2 = |\,f(t_1 + \tau)\,| = e^{H(t_1+\tau)}\,|\,P\,\text{sen}\,K\,(t_1 + \tau) + Q\cos K\,(t_1 + \tau)|\,;$$

ossia ricordando che, per la (V), i coefficienti di e^{Ht_1}, $e^{H(t_1+\tau)}$ hanno identico valore assoluto, sarà

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot e^{H\tau}\,.$$

Siccome la legge del *decremento logaritmico* dice che deve essere costante e > 1 il rapporto $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$, prefissato coll' esperienza il valore h di questo rapporto, basterà prendere

$$(V_1) \qquad H = -\frac{\lg_e h}{\tau}$$

perchè la funzione ε rappresenti veramente il moto strumentale.

Resta ancora a dimostrare che ε è la funzione più generale dotata di questa proprietà. Infatti supponiamo invece che ne esista un'altra, v: allora v dovrà annullarsi soltanto negli istanti $t_0 + m\tau$ che annullano ε, e diventar massima o minima solo negli istanti $t_1 + m\tau$ che annullano ε'.

Ma qualunque sia v, possiamo sempre determinare una funzione u in modo che risulti

$$v = \varepsilon + u\,;$$

donde

$$v' = \varepsilon' + u'\,.$$

Perchè v e v' si annullino rispettivamente con ε e con ε' è necessario che anche u e u' si annullino con ε e con ε', cioè che sia

$$u = \varphi \cdot \varepsilon \quad , \quad u' = \psi\,\varepsilon'$$
$$[\varphi\,,\,\psi \text{ funzioni finite}]\,;$$

e siccome dalla prima di queste egualianze si deduce

$$u' = \varphi'\,\varepsilon + \varphi\,\varepsilon',$$

questa non è compatibile con la seconda, se non è $\varphi' = 0$, ossia

$$\varphi = \psi = \text{costante}.$$

Ora si osservi che nell'espressione di ε esiste già un fattore costante arbitrario, perchè l'istante t_0 definisce il rapporto fra le costanti P, Q, non già il loro valore assoluto: dunque la ε definita dalla (20) è sostanzialmente identica a v, ossia è la funzione più generale che rappresenti il moto strumentale non perturbato.

Come si è veduto, le costanti H e K sono perfettamente determinate, essendo legate alle costanti strumentali (τ, h) dalle equazioni (V) e (V_1); invece le costanti P e Q restano arbitrarie, potendosi nei singoli casi attribuire loro valori opportuni perchè siano soddisfatte certe condizioni iniziali prestabilite. Dunque la (20) che *per ipotesi* deve essere un integrale della equazione $N = 0$, è appunto il suo integrale *generale*.

b) Questa osservazione permette di determinare subito la forma della funzione N. A tal fine basta ricordare la genesi delle equazioni differenziali del second'ordine; cioè derivare successivamente la equazione $\varepsilon = f(t)$ e fra le equazioni

$$\varepsilon = f(t), \quad \varepsilon' = f'(t), \quad \varepsilon'' = f''(t)$$

eliminare le costanti P e Q. Nel caso attuale l'eliminazione è facilissima perchè le equazioni sono lineari in P, Q e quindi basta eguagliare a zero il determinante dei coefficienti. Sopprimendo nel determinante i fattori comuni, in modo che il coefficiente di ε'' risulti eguale a $+1$, esso diventa identico all'espressione (21), come appunto si voleva dimostrare.

Ora sarebbe superfluo calcolare l'espressione analitica delle resistenze, poichè lo scopo finale di questa ricerca è di stabilire la forma definitiva delle funzioni $\Phi, \ldots, \Omega$. Ma siccome questa forma è appunto data dalla (21), nella quale le costanti H e K si determinano direttamente con esperienze eseguite sui singoli strumenti, si vede che le resistenze passive devono essere *funzioni lineari delle rotazioni e delle velocità apparenti*: la quale conclusione giustifica le ipotesi più restrittive che nei precedenti lavori mi avevano condotto allo stesso risultato.

17. Prima di passare alla *integrazione* delle equazioni differenziali, cioè alla *determinazione in funzione del tempo delle sei incognite sismiche* ξ, η, ζ, α, β, γ, la quale sarà oggetto d'un altro lavoro, chiuderò questa Nota con la dimostrazione d'un teorema da me già enunciato in un'altra pubblicazione [1], importante perchè può fornire un criterio sulla scelta delle disposizioni sperimentali più adatte alla determinazione del vero movimento sismico.

[1] *Lettera aperta al P. G. Alfani*, Bollett. Soc. Sism. Ital., vol. VII, fasc. 7°, nota 9.

Si supponga che le accelerazioni traslatorie del terreno ξ'', η'', ζ'', sulle quali finora non s' era fatta alcuna restrizione, siano d' un ordine di grandezza paragonabile a quello delle rotazioni; potendosi in tal caso trascurare i loro prodotti per π, χ, ϱ, tutte le equazioni differenziali si riducono alla forma

$$F + N = 0$$

essendo F una funzione lineare omogenea delle sei incognite e delle loro derivate seconde, ed N una funzione della forma (21), dipendente solo dal movimento apparente dello strumento. In pratica sarà generalmente nota la funzione N e si tratterà di determinare le incognite che compariscono in F; ma se supponiamo nota la natura del movimento sismico, si potrà invece determinare *a priori* la forma del diagramma, cioè il movimento apparente dello strumento, bastando a tal fine considerare F come funzione nota, e come incognita quella che comparisce in N. Il caso che presenta la massima importanza per le applicazioni pratiche è contemplato nel seguente teorema generale:

« Se il movimento del terreno consiste d' un numero finito di rotazioni e traslazioni simultanee, *tutte infinitesime e oscillatorie*, il movimento apparente di qualunque strumento sismico consiste d' una oscillazione strumentale smorzata sovrapposta ad altrettante coppie di oscillazioni coi periodi ordinatamente eguali a quelli delle oscillazioni sismiche ».

Una qualunque delle sei componenti, che indicherò genericamente con ϑ, sia la risultante di r oscillazioni coi semiperiodi T_i, e con le massime ampiezze a_i corrispondenti agli istanti t_i $(i = 1, 2, \ldots r)$. Allora posto

$$k_i = \frac{\pi}{T_i},$$

avremo:

$$\vartheta = \sum_1^r{}_i \, a_i \cos k_i (t - t_i),$$

$$\vartheta'' = - \sum_1^r{}_i \, k_i^2 \, a_i \cos k_i (t - t_i);$$

e i termini della funzione F che dipendono dalla componente ϑ, e che sono della forma

$$a\vartheta + b\vartheta'',$$

si potranno raccogliere nella somma

$$\sum_1^r{}_i \, (a - bk_i^2) \, a_i \cos k_i (t - t_i).$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutte le componenti, sviluppando $\cos k_i (t - t_i)$, e ponendo

$$(22) \qquad \left.\begin{aligned} p_i &= (a - bk_i^2)\, a_i \operatorname{sen} k_i t_i \\ q_i &= (a - bk_i^2)\, a_i \cos k_i t_i \end{aligned}\right\} \; i = 1,\ 2, \ldots s$$

avremo infine una equazione differenziale della forma

$$(23) \qquad \sum_1^s p_i \operatorname{sen} k_i t + \sum_1^s q_i \cos k_i t + \varepsilon'' + \mathrm{A}\varepsilon' + \mathrm{B}\varepsilon = 0 .$$

È facile provare che essa può essere soddisfatta dalla funzione

$$\varepsilon_1 = \sum_1^s m_i \operatorname{sen} k_i t + \sum_1^s n_i \cos k_i t :$$

infatti sostituendo nella (23) ad ε e alle sue derivate questa espressione di ε_1 e delle sue derivate, e raccogliendo i termini simili, si trova che la somma risultante è identicamente nulla se sono soddisfatte le seguenti condizioni necessarie e sufficienti:

$$(24) \qquad \left.\begin{aligned} m_i (\mathrm{B} - k_i^2) - n_i \mathrm{A} k_i + p_i &= 0 \\ m_i \mathrm{A} k_i + n_i (\mathrm{B} - k_i^2) + q_i &= 0 \end{aligned}\right\} \; (i = 1, 2, \ldots s).$$

Il determinante dei coefficienti di questo sistema di $2s$ equazioni a $2s$ incognite è un prodotto di s fattori della forma

$$(\mathrm{W}) \qquad \Delta_i = (\mathrm{A}k_i)^2 + (\mathrm{B} - k_i^2)^2 ;$$

e poichè nessuno dei fattori è identicamente nullo (1), il sistema stesso ammette una soluzione unica e determinata:

$$(24_1) \qquad m_i = -\frac{p_i (\mathrm{B} - k_i^2) + q_i \mathrm{A} k_i}{\Delta_i} ; \; n_i = \frac{p_i \mathrm{A} k_i - q_i (\mathrm{B} - k_i^2)}{\Delta_i} .$$

Dunque la funzione ε_1 è un integrale della (23). Ma essa è soddisfatta anche dalla funzione

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + e^{\mathrm{H}t} (\mathrm{P} \operatorname{sen} \mathrm{K}t + \mathrm{Q} \cos \mathrm{K}t) \equiv \varepsilon_1 + f :$$

infatti per tal valore di ε il primo membro della (23) diventa

$$\left[\sum (p_i \operatorname{sen} k_i t + q_i \cos k_i t) + \varepsilon_1'' + \mathrm{A}\varepsilon_1' + \mathrm{B}\varepsilon_1\right] + \left[f'' + \mathrm{A}f' + \mathrm{B}f\right];$$

e mentre la prima di queste due somme si annulla per ciò che fu dimostrato

(1) Infatti Δ_i è somma di due quantità positive o nulle; ma mentre può annullarsi $(\mathrm{B} - k_i^2)$, i fattori A e k_i sono sempre diversi da zero; perchè per le (Z) è $\mathrm{A} = -2\mathrm{H} = \frac{2}{\tau} \log_e h$, e $k_i = \frac{\pi}{\mathrm{T}_i}$; ora τ e T_i sono quantità *finite*, h è > 1; quindi $\mathrm{A}k_i$ non si annulla mai.

poco fa, la seconda si annulla per ciò che fu detto al numero precedente, purchè H e K siano tali da rendere

$$(Z) \qquad A = -2H\,,\quad B = H^2 + K^2\,.$$

Infine si può dimostrare che questa funzione

$$(25) \qquad \varepsilon = \sum_1^s (m_i \operatorname{sen} k_i\, t + n_i \cos k_i\, t) + e^{Ht}\,(P \operatorname{sen} Kt + Q \cos Kt)$$

è appunto l' integrale generale, cioè che per valori opportuni delle costanti arbitrarie P e Q possono essere soddisfatte certe condizioni iniziali prestabilite. Volendo infatti che nel tempo t_0 la funzione e la sua derivata abbiano valori prefissati ε_0, ε_0', è necessario e sufficiente che P e Q siano radici delle equazioni

$$e^{Ht_0}\,(P \operatorname{sen} Kt_0 + Q \cos Kt_0) + \sum(m_i \operatorname{sen} k_i\, t_0 + n_i \cos k_i\, t_0) - \varepsilon_0 = 0$$

$$e^{Ht_0}\,([PH - QK] \operatorname{sen} Kt_0 + [PK + QH] \cos Kt_0) +$$
$$+ \sum(k_i\, m_i \cos k_i\, t_0 - n_i\, k_i \operatorname{sen} k_i\, t_0) - \varepsilon_0' = 0\,;$$

il qual sistema ammette una soluzione unica e determinata, perchè il determinante dei coefficienti è eguale a $-K\,e^{2Ht_0}$ (1).

Dunque la (25) definisce nel modo più completo la componente ε del moto apparente dello strumento; e poichè essa esprime analiticamente il contenuto del teorema, questo resta completamente dimostrato.

18. Si può dargli ora una forma alquanto diversa che mette in maggiore evidenza le relazioni fra il diagramma e il movimento sismico.

Determinando convenientemente $2s$ costanti b_i, τ_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, si può mettere la somma

$$\sum_1^s{}_i\, (m_i \operatorname{sen} k_i\, t + n_i \cos k_i\, t)$$

che comparisce nella (25), sotto la forma:

$$\sum_1^s{}_i\, b_i \cos k_i\,(t - \tau_i)\,;$$

al qual fine è necessario e sufficiente che sia

$$m_i = b_i \operatorname{sen} k_i\, \tau_i\,,\quad n_i = b_i \cos k_i\, \tau_i$$

ossia

$$b_i^2 = m_i^2 + n_i^2\,,\quad \operatorname{tg} k_i\, \tau_i = \frac{m_i}{n_i}\,.$$

(1) Questo prodotto non può annullarsi perchè è $K = \frac{\pi}{\tau}$ e il periodo d'oscillazione strumentale τ è sempre finito, e d'altra parte il fattore esponenziale e^{2Ht_0} non si annulla mai.

D'altra parte le (24_1), tenuto conto della (W), danno:

$$m_i^2 + n_i^2 = \frac{p_i^2 + q_i^2}{\Delta_i},$$

$$\frac{m_i}{n_i} = \frac{\frac{p_i}{q_i}(\mathrm{B} - k_i^2) + \mathrm{A}k_i}{-\frac{p_i}{q_i}\mathrm{A}k_i + \mathrm{B} - k_i^2};$$

e siccome per le (22) è

$$p_i^2 + q_i^2 = a_i^2 (a - bk_i^2)^2, \quad \frac{p_i}{q_i} = \operatorname{tg} k_i t_i,$$

così avremo

$$(26) \qquad \begin{cases} b_i = \pm \frac{a_i}{\sqrt{\Delta_i}}(a - bk_i^2) \\ \operatorname{tg} k_i \tau_i = \frac{\operatorname{tg} k_i t_i (\mathrm{B} - k_i^2) + \mathrm{A}k_i}{-\operatorname{tg} k_i t_i \mathrm{A}k_i + \mathrm{B} - k_i^2} \end{cases}$$

e si potrà porre

$$(25_1) \qquad \varepsilon = \sum_1^s{}_i b_i \cos k_i (t - \tau_i) + e^{\mathrm{H}t}(\mathrm{P} \operatorname{sen} \mathrm{K}t + \mathrm{Q} \cos \mathrm{K}t).$$

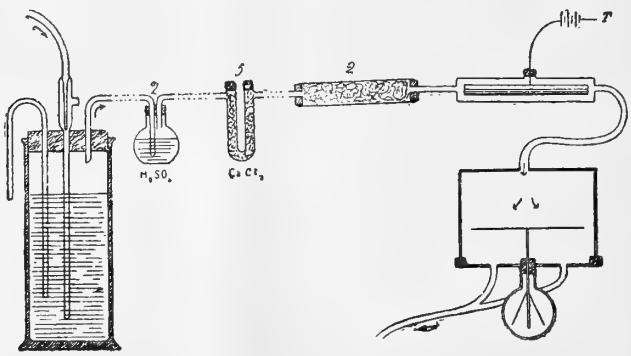
Al teorema dunque si potrà dare anche la forma seguente: « Ferme restando le ipotesi precedenti circa la natura del moto sismico, il diagramma che ne risulta consiste di un'oscillazione strumentale smorzata sovrapposta ad s oscillazioni sinusoidali di periodo ordinatamente eguale a quello delle onde sismiche; le massime ampiezze ed i tempi ad esse corrispondenti delle onde sismiche e delle oscillazioni registrate sono legate dalle relazioni (26) ».

Fisica. — *Conduttività elettrica acquistata dall'aria proveniente da una soffieria ad acqua.* Nota di A. Pochettino ed A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

1. In un lavoro sulla pretesa perdita di carica elettrica per evaporazione di un liquido elettrizzato (Pochettino e Sella, Rend. d. Acc. dei Lincei IX, 2, p. 3, 1900) noi avevamo notato che l'aria proveniente da una soffieria ad acqua e poi accuratamente essiccata, diselettrizzata e privata di pulviscolo, mostrava una conduttività maggiore di quella posseduta dall'aria atmosferica, che veniva immessa nella soffieria. Questa conduttività veniva tolta o per lo meno fortemente diminuita, se la corrente d'aria passava in un palloncino, nel cui fondo si trovava dell'acqua in leggera ebollizione, poi attraverso un lungo tubo di vetro ripieno di pezzetti di pomice imbevuta d'acqua e quindi per un serpentino di vetro.

L'interpretazione che allora avevamo dato del fenomeno, era che fossimo in presenza di aria ionizzata dal trattamento che aveva subìto nella soffieria, confermandoci in questa veduta il fatto della perdita della conduttività, se in seno all'aria si produceva un processo di condensazione di vapore acqueo, essendo ben noto che gli ioni servono da nuclei di condensazione. La cosa pareva degna di uno studio più accurato, ed il risultato delle nostre ricerche esponiamo brevemente nelle linee che seguono.

2. Noi riprendemmo le esperienze col seguente concetto: fare passare in un apparecchio di misura di dispersione aria soffiata semplicemente con un mantice o con una pera di gomma elastica, ovvero aria proveniente da una soffieria ad acqua. Si regolavano le cose in modo da avere nei due casi una corrente della medesima intensità, e così si poteva misurare nelle stesse condizioni la dispersione dell'aria atmosferica della stanza o della medesima aria stata violentemente sbattuta e fatta gorgogliar nell'acqua.



L'aria, prima di entrare nell'apparecchio a dispersione, sia nell'un caso, sia nell'altro, passava per 2 bocce ad acido solforico, per 5 tubi ad U ripieni di cloruro di calcio, poi per due tubi pieni di ovatta leggermente compressa. Nella figura è anche segnato un condensatore cilindrico; l'aria passava nello spazio anulare fra due cilindri concentrici, isolati fra di loro, tra i quali si poteva mantenere, in alcune esperienze, una differenza di potenziale costante. L'apparecchio di misura era costituito da un piattello metallico del diametro di circa 14 cm. circondato da una scatola metallica al suolo. La scatola era costituita da una base inferiore, su cui si adagiava un cilindro rovesciato coll'orlo immerso in un anello di mercurio, in modo da aversi tenuta d'aria. Il piattello era sostenuto da un'asta metallica infissa in un tappo di dielettrina, che attraversava per andare poi a costituire l'asta di sostegno delle due foglioline d'alluminio di un solito elettrometro alla Exner. La corrente d'aria entrando nella scatola dal centro della parete superiore, investiva il piattello e poi usciva per due forellini nella base inferiore.

Le deviazioni delle foglioline venivano lette puntando, con un microscopio fornito di micrometro oculare mobile con vite e tamburo graduato, una punta di una delle foglioline; si misurava lo spostamento orizzontale di essa in un dato tempo.

Era da escludersi che l'aria proveniente dalla soffieria potesse per la sua maggiore umidità peggiorare l'isolamento della dielettrina. Prima di tutto questo isolante, quando è preparato con cura (si ottiene versando polvere di zolfo bene essiccato e caldo in paraffina pura, ad una temperatura di poco superiore al punto di fusione e mescolando sino ad ottenere una pasta che indurisce col raffreddamento e col tempo), può sopportare a lungo un'atmosfera anche molto umida, se la sua superficie è fresca; ma poi la lunga serie di tubi di essiccamento portava l'aria circa allo stesso stato igrometrico, sia che provenisse dalla pera, sia che provenisse dalla soffieria. Ce ne accertammo ponendo dopo l'apparecchio a dispersione un tubo a cloruro di calcio, che veniva pesato dopo che la corrente d'aria era passata per un tempo determinato.

3. Riferiamo ora i risultati delle esperienze.

In primo luogo si cominciò coll'esaminare se la dispersione ottenuta soffiando l'aria con la pera era la medesima come lasciando poi l'aria in quiete. Il fatto constatato con una concordanza molto soddisfacente semplificava d'ora in poi le ricerche, potendosi ammettere che soffiando con la pera per qualche tempo sino a rinnovazione dell'aria, e poi facendo una misura di dispersione, si avesse il medesimo risultato come seguitando sempre a soffiare con la pera durante la misura.

Ciò posto le esperienze hanno dimostrato che *la dispersione dell'aria proveniente dalla soffieria è enormemente cresciuta.*

Riportiamo dalle nostre numerose serie di misure due sole esperienze, scelte a caso. I numeri riportati esprimono il numero delle divisioni micrometriche che misurano lo spostamento della fogliolina durante 30′.

Elettricità positiva.

Si soffia aria con pera per 15′ e poi si misura con aria ferma. 10,4
Si misura con aria proveniente dalla soffieria in azione continua . . . 50
Si soffia con pera per 5′ e poi si misura con aria ferma 13

Elettricità negativa.

Aria pera come sopra 15
Aria soffieria » 69
Aria pera » 20
Aria soffieria » 66

Il potenziale a cui si operava era di circa 180 volt; in quella posizione un millimetro di spostamento orizzontale della punta della foglia corrispon-

deva ad una variazione di 15 volt; e nelle condizioni delle misure un millimetro di spostamento corrispondeva a 150 divisioni del tamburo micrometrico. Così la dispersione è salita nella prima serie, passando da aria ordinaria ad aria dalla soffieria, da 1,2 a 5 volt per 30′; e nella seconda da 1,75 a 6,75; ossia si ebbe per l'aria proveniente dalla soffieria una dispersione *quattro volte maggiore*.

Il medesimo risultato ottenuto con le due specie di elettricità dimostrano che l'aria era ben diselettrizzata nel passaggio per i tubi ripieni di ovatta. Questi erano necessari per eliminare l'elettrizzazione dovuta al gorgoglìo nell'acqua (Kelvin).

4. Restava ora a ricercare se la proprietà di conduttività acquistata dall'aria era dovuta a semplice ionizzazione prodottasi nel processo del gorgoglìo nella soffieria. Veramente il fatto che l'aria manteneva questa sua proprietà dopo così lungo percorso di tubi e filtri, non era atta a confermarci in questa opinione, perchè l'aria ionizzata per cause, dirò così, esterne e temporanee, conserva per poco tempo le sue proprietà e di più gli ioni vengono facilmente arrestati da stoppaccetti di ovatta.

Il modo di decidere la questione era semplice; fatta una misura con aria proveniente dalla soffieria in azione, interrompere la corrente d'aria e ripetere la misura per la solita mezz'ora cimentando così aria proveniente dalla soffieria, ma non rinnovata durante la misura. Il risultato dell'esperienza fu che alla seconda misura, con aria ferma, la conduttività era la medesima come alla prima, o diminuiva in piccola misura; alcune volte fu notato anche un leggero aumento di conduttività (risultato non insolito in questo campo). La conduttività cresciuta è dunque persistente.

Però dobbiamo aggiungere che portando ora le armature del condensatore cilindrico ad una differenza di potenziale costante, durante il passaggio dell'aria proveniente dalla soffieria, l'aria perdeva qualche poco delle sue proprietà conduttici.

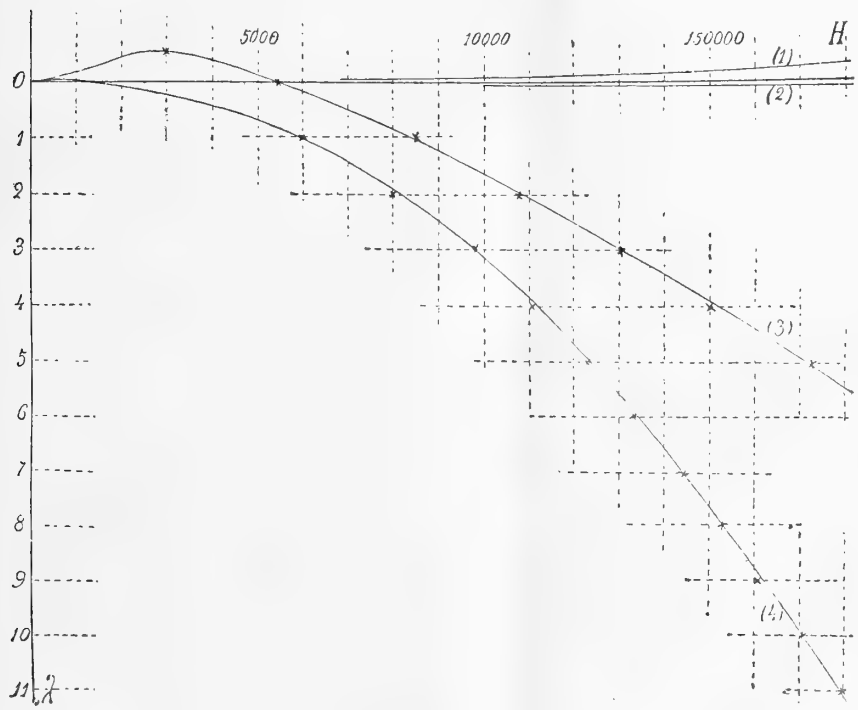
5. L'interpretazione più semplice dei risultati, a cui siamo giunti, sarebbe l'ammettere che l'aria si carichi, nel gorgoglìo entro la soffieria, di un gas, o di una emanazione capace di passare attraverso filtri di ovatta compressa. E parrebbe così che nell'acqua da noi adoperata (Marcia, della condotta della città di Roma) sia contenuta qualche sostanza attiva, essendo conosciuto che l'aria gorgogliata in soluzioni di sali, p. e. di radio, acquista proprietà radioattive. Sarebbe allora molto interessante di provare se l'aria proveniente da una soffieria, in cui l'acqua agente fosse acqua distillata e pura, non cresce in conduttività. L'esperienza non è comoda; e non si può sostituire al trattamento subìto dall'aria nella soffieria un semplice gorgoglìo, quale si produce nelle ordinarie boccie di lavaggio dei gas: un semplice gorgoglio di questa natura non è abbastanza efficace.

Il fatto della diminuzione della conduttività, quando si produca nell'aria una condensazione di vapore acqueo, come abbiamo descritto nella

ricerca citata, non è in disaccordo con questa ipotesi della emanazione; ed il fatto della diminuzione nel passaggio attraverso il condensatore carico, può spiegarsi ammettendo che queste particelle costituenti l'emanazione abbiano una leggera carica propria, proprietà, anche questa, comune ad emanazioni consimili.

Fisica. — *Sulla birifrangenza magnetica e su altri fenomeni che l'accompagnano.* Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Espongo in questa Nota le principali misure eseguite, studiando la birifrangenza magnetica di campioni di ferro dializzato. Il metodo fu già da me descritto nella Nota precedente, e per maggior chiarezza ricordo che esso



consiste nel far sparire, mediante compressione di una lastra di vetro, interposta insieme con la vaschetta contenente il liquido, tra due nicol incrociati, la luce apparsa per l'azione del campo magnetico di senso arbitrario, quando i due nicol hanno le sezioni principali a 45° sulle linee di forza. Una graduazione precedente permette di conoscere immediatamente il valore, espresso in frazione di lunghezza d'onda (differenza di cammino dei raggi ordinario

e straordinario) della birifrangenza generata dal campo. Essendo il vetro adoperato *negativo per compressione*, una compensazione prodotta da compressione parallela alle linee di forza indica birifrangenza positiva, mentre quella normale indica la negativa. A meno che venga detto esplicitamente il contrario, si intende che le misure riportate si riferiscono alla lunghezza della vaschetta V (v. figura della Nota precedente), e cioè a 7 cm. Variando la intensità del campo sino ad un valore massimo di 18000 u., si sono costruite le curve della birifrangenza, di cui qualcuna è riportata nella annessa figura.

Ferro dializzato poco attivo. — Come ebbi già occasione di dire, campioni recenti di ferro dializzato, o non presentano la birifrangenza magnetica, o ne dànno solo una traccia positiva. Per cui tutte le preparazioni da me eseguite (dens. 1,002) non hanno mai birifrangenza superiore a 0,1 λ pel rosso, in un campo di 18000 u. Il fenomeno è poi quasi sempre inosservabile con 10000 u. Ferro dializzato appartenente al *primo tipo*, ma proveniente dal commercio, dà frequentemente fenomeni alquanto più accentuati. La curva (1) fornisce un esempio di ciò; a 18000 u. la birifrangenza ha un valore positivo di 0,33 λ (colore rosso); essa decresce col campo, e a 5 o 6 mila u. è pressochè inosservabile. Tra i ferri del primo tipo da me studiati, questo è il più attivo. È per tal ragione, e perchè i casi di birifrangenza negativa sono senza confronto più accentuati, che le curve della figura si svolgono principalmente dalla parte negativa. Ciò non pertanto è difficile trovare ferro dializzato del secondo tipo (semplice birifrangenza negativa). Solo due campioni fornirono esempio di esso (ferro Bravais di 1 o 2 anni), e la birifrangenza massima negativa, per la densità 1,002, arriva appena a 0,1 λ. Il fenomeno, rappresentato dalla curva (2) è dunque pochissimo accentuato, e per dippiù questi campioni dopo due giorni dalla diluizione (onde portarli alla densità 1,002) diventano positivi. Sicchè tralascio di occuparmi di fenomeni così deboli, giacchè, come si vede, alla difficoltà di misura, si aggiunge la instabilità del prodotto.

Ferro dializzato molto attivo. — È sempre, almeno per i casi da me studiati, quello del terzo tipo; per campi deboli si ha birifrangenza positiva, che si trasforma in fortemente negativa per campi più intensi. Un ferro Bravais vecchio, diluito a 1,001 perchè molto assorbente, mi ha dato la curva (3). Al crescere del campo cresce in principio la birifrangenza positiva; a 3000 u. essa arriva al massimo (0,6 λ), e successivamente decresce; a 5450 u. si ha il punto di inversione. Per cui, sottoponendo questo ferro all'azione di 5450 u., nel breve tempo che il campo impiega per raggiungere un tal valore, si vede apparire la luce attraverso i nicol incrociati, e successivamente sparire.

Continuando a far crescere il campo, incomincia il periodo negativo. A tal punto il metodo di misura, fondato sull'uso del compensatore a vetro compresso, non è più buono. E infatti già ad 8500 u., la birifrangenza ha un valore di una lunghezza d'onda nel rosso. Sarebbe difficile operare com-

pressioni così forti, da compensare tale birifrangenza; e a queste difficoltà si aggiunge il fatto che, trattandosi di valori considerevoli, si fanno sentire notevoli differenze tra le birifrangenze dei diversi colori. Per cui, abbandonando il compensatore, ho adoperato uno spettroscopio, posto tra l'occhio dell'osservatore ed il nicol analizzatore. Con questo istrumento si poteva constatare, per una data regione dello spettro, quando la birifrangenza valeva un numero intero di lunghezze d'onda, avendosi allora il campo oscuro. È così che a 8500 u., limitando una piccola regione intorno alla linea C, si vede comparire, eccitando il campo, due volte la luce, ottenendo infine oscurità. Il primo sprazzo luminoso corrisponde alla parte positiva della birifrangenza, il secondo al primo tratto della parte negativa; e, avendosi per quella intensità di campo una differenza di cammino di una lunghezza d'onda, si intende perchè si ottenga infine l'oscurità. Facendo crescere ancora il campo, ricomparisce la luce, e ogni volta che il valore della birifrangenza passa per un numero intero di lunghezze d'onda, si ha l'oscurità.

I valori del campo, ricavati dall'esperienza, che corrispondono alle successive sparizioni della luce, sono:

Campo	0	5450	8500	10725	13075	15000	17250
Birifr.	0	0	λ	2λ	3λ	4λ	5λ

La curva (3) è stata costruita servendosi di questi dati.

Tutti i ferri dializzati che ho studiato, all'infuori di quelli del quarto tipo (v. Nota prec.), e di cui non ci vogliamo occupare, offrono, sotto l'azione del campo magnetico, andamenti che si possono rappresentare con curve simili a qualcuna delle tre indicate. Volendo ricondurre tutti questi tipi al medesimo, e cioè con birifrangenza positiva per campi deboli, negativa per campi intensi, si potrebbero fare con ragione le seguenti asserzioni. Ferro dializzato recente dà debole birifrangenza positiva, e forse questa diventerebbe negativa, passando pel punto di inversione, se si disponesse di campi magnetici molto più intensi di quelli che nella pratica si possono raggiungere. Ferro dializzato non molto recente (2 anni) presenta birifrangenza negativa, e non è da escludersi che pei campi deboli possa presentare debolissimo fenomeno positivo, in misura da sfuggire alle più accurate osservazioni. Ferro dializzato molto vecchio (più di 10 anni) presenta punto di inversione, dando in principio notevole birifrangenza positiva e poi negativa. Un fatto interessante è l'invariabilità del punto di inversione; giacchè ho constatato che per lo stesso campione, comunque diluito, l'inversione corrisponde sempre ad una medesima intensità del campo, pur variando i valori della birifrangenza per una stessa intensità del campo.

Il fenomeno dell'inversione rende lo studio delle leggi della birifrangenza magnetica, abbastanza difficile. Non sarebbe così, se si potesse disporre d'un liquido tanto attivo come quello della curva (3), ma senza inver-

sione. Tale liquido non è stato da me rinvenuto, e forse esso non può esistere (almeno fra i ferri dializzati); ma trovai invece del ferro Bravais vecchissimo, il quale offre in principio solo una traccia di birifrangenza positiva, e relativamente, un punto basso di inversione. Diluito alla densità 1,001, esso fornisce la curva (4); e questa si riferisce ai valori della birifrangenza nel colore giallo (linea D). Si intende che il tratto positivo è stato studiato col compensatore a vetro compresso, e il resto collo spettroscopio, osservando le successive sparizioni della luce. La birifrangenza positiva massima si ha a 750 u. (0,02 λ), e il punto di inversione a 1550. Ecco i numeri relativi alle successive osservazioni:

Campo	0	1550	6000 (5430)	8000 (7670)	9800 (9400)	11100 (10860)	12250 (12140)
Birifr.	0	0	λ	2λ	3λ	4λ	5λ

Campo	13300 (13290)	14400 (14360)	15300 (15390)	16100 (16280)	17100 (17160)	18000 (18000)
Birifr.	6λ	7λ	8λ	9λ	10λ	11λ

Il fenomeno, indicato graficamente dalla curva (4), soddisfa con qualche approssimazione alla legge $\beta = a\,H^2$, essendo β la birifrangenza espressa in numero di lunghezze d'onda, a una costante, ed H l'intensità del campo. Calcolando il valore di a per $H = 18000$ e $\beta = 11$, si trova il numero -34.10^{-9}; ed in base a questa grandezza si sono determinati i valori che il campo dovrebbe avere, se la relazione suddetta fosse veramente sodisfatta. La serie così calcolata (quella tra parentesi) è abbastanza prossima all'osservata, e gli scartamenti, piccoli per i valori grandi di H, sono alquanto più grandi pei campi deboli. Ciò è dovuto evidentemente al fatto dell'inversione della birifrangenza; per cui qui posso concludere che: *Se il ferro dializzato appartiene al terzo tipo, e se esso ha il punto di inversione molto basso, i valori della birifrangenza negativa, sono sensibilmente proporzionali al quadrato dell'intensità del campo.* Questa legge vale, ma con minor sicurezza, anche pel ferro dializzato del primo e del secondo tipo; e infatti si è visto che mentre a 18000 u. il fenomeno è osservabile, spesso con un campo metà non lo è più. Ciò è spiegabile ammettendo una proporzionalità con una potenza del campo superiore alla prima.

Il ferro Bravais che ha servito per la costruzione della curva (4), ha anche fornito la verifica di altre leggi semplici, di cui ora dirò. Era ovvio anzitutto che i valori di β dovessero essere *proporzionali allo spessore del liquido, normalmente alle linee di forza.* Ciò fu infatti verificato, costruendo vaschette di lunghezze inferiori ai 7 cm. A parte errori provenienti dalla non assoluta uniformità del campo, in tutta la sua lunghezza, le cifre ottenute, e che per brevità non riporto, confermarono quella veduta.

Procedendo a varie diluizioni dello stesso campione di ferro dializzato, è anche facile constatare che: *la birifrangenza magnetica è direttamente proporzionale alla concentrazione;* o più semplicemente a $\delta - 1$, essendo δ la densità del liquido, riferita all'acqua.

Un'ultima legge era facile prevedere, pensando alle analogie col fenomeno Kerr elettrostatico. Ho già accennato al fatto che per forti valori della birifrangenza, si rendono palesi differenze notevoli del fenomeno per i varî colori. E anzitutto, senza far misure, il ferro Bravais della curva (4) e molti altri (fra cui anche campioni di ferro Erba) permettono immediatamente di verificare, che certamente la birifrangenza magnetica cresce col diminuire della lunghezza d'onda. Si osservi tutto lo spettro di assorbimento del liquido sottoposto all'azione del campo, invece di una semplice zona; la sua parte luminosa va dal rosso sino al verde. Orbene, quando si è ottenuto al crescere del campo l'oscurità in una data regione, non si può dire lo stesso delle altre. Chè anzi osservando il fenomeno dal suo inizio (dopo il punto di inversione), per intensità deboli del campo si comincia ad avere l'oscurità verso la regione più refrangibile, e successivamente si stacca una banda di assorbimento, che avanzandosi verso il rosso, vi si perde. Sicchè si intende come una stessa intensità del campo, mentre ha prodotto l'oscurità p. es. nel verde, non l'ha ancora prodotta nel rosso. Crescendo ancora il campo, una seconda banda si stacca dal verde e, come la prima, si va a perdere nel rosso; indi una terza ecc. Man mano che l'azione magnetica si fa più intensa, le bande di assorbimento si fanno ciascuna più stretta, e tutte più serrate l'una contro l'altra. In sostanza il fenomeno finale è analogo a quello che si osserverebbe, ponendo tra due nicol incrociati una lamina birifrangente, con l'asse convenientemente disposto; le bande di assorbimento corrispondono a quelle regioni dello spettro, per cui si hanno valori interi della birifrangenza.

Osservando ora lo spettro del ferro Bravais che ha fornito la curva (4), sotto l'azione del campo di 17300 u., in esso si notano quattro bande di assorbimento. Dalla scala dello spettroscopio si deducono i valori delle lunghezze d'onda, corrispondenti alle regioni medie di ciascuna banda andando dal rosso verso il verde:

$\lambda =$ micron	0,670	0,630	0,595	0,565

La prima di queste bande, quella che si trova sull'estremo rosso, è l'ottava tra tutte quelle che, per l'azione crescente del campo, sono passate su quel colore. Ciò è facile constatare, facendo crescere gradualmente l'azione magnetica. Per cui è chiaro che, per le superiori lunghezze d'onda, nelle condizioni indicate si hanno come valori di β, rispettivamente i numeri:

$\beta =$	8	9	10	11

Si facciano i prodotti di ciascuno di questi, per i corrispondenti quadrati di λ, si ha:

$$\beta\lambda^2 = \quad 3{,}59 \qquad 3{,}57 \qquad 3{,}54 \qquad 3{,}51$$

Questi prodotti sono tra loro abbastanza prossimi, perchè si possa ritenere come verosimile la legge che: *i valori della birifrangenza, per i diversi colori, a parità di altre condizioni, sono in ragione inversa dei quadrati delle lunghezze d'onda.* In complesso il fenomeno della birifrangenza, in un liquido magnetico, si può dunque rappresentare con la formula:

$$\beta = \mathrm{K}\,\frac{l(\delta - 1)\,\mathrm{H}^2\,\lambda^2_{Na}}{\lambda^2}\ ,$$

dove K è una costante, l la lunghezza della vaschetta, δ la densità del liquido, H l'intensità del campo, λ la lunghezza d'onda del colore che si studia, e λ_{Na} quella della linea D. Con ciò le birifrangenze osservate, vengono sempre riferite a quelle che si osserverebbero pel colore giallo. La superiore relazione, per le ragioni viste, è soltanto approssimata, e lo è tanto più quanto più basso è il punto di inversione. In ogni modo essa non può applicarsi che ai tratti del fenomeno molto al di là di questo punto, qualora esso esista. Così, sostituendo i valori ottenuti dall'esperienza pel caso del ferro Bravais (4) nel campo di 18000 u., si ha $\mathrm{K} = 0{,}0000048$. Tra tutti i campioni studiati, questo è il più attivo, sicchè è quello il valore massimo di K, almeno sinora. Per liquidi poco attivi (ferri dializzati recenti), K è in valore assoluto inferiore ad $^1/_{100}$ della grandezza riportata; e le esperienze da me istituite mi hanno fatto classificare come inattivi, quei liquidi per cui K è in valore assoluto inferiore a 2.10^{-8} circa.

Modificazioni dell'assorbimento luminoso sotto l'azione magnetica. — Si osservi lo spettro della luce proveniente da un arco voltaico, che riesce a traversare la vaschetta, posta tra le espansioni polari dell'elettromagnete. Se il liquido è discretamente concentrato, la sua parte visibile abbraccia principalmente la regione rossa, la gialla e una porzione della verde, e ciò in maniera continua, senza che si scorga nella parte luminosa alcuna banda di assorbimento. I bordi dello spettro, specie quello nel verde, sono spesso abbastanza netti. Se si esperimenta con liquidi così attivi come quelli delle curve (3) e (4) si osservano, eccitando il campo, importanti cambiamenti, sia dell'intensità che dell'estensione di quello spettro, le quali facilmente si riattaccano ai fenomeni di birifrangenza descritti. Altri campioni non danno fatti osservabili. Le esperienze seguenti possono ripetersi disponendo di un liquido simile a quello della curva (3), che presenti cioè in principio notevole bifrangenza positiva, e successivamente negativa.

1. Se il raggio luminoso traversa come nelle esperienze di birifrangenza, il liquido normalmente alle linee di forza, osservando lo spettro, senza l'uso

di alcun nicol, la sua parte luminosa diventa, eccitando il campo, più brillante e più larga. Ciò accade sempre, fuorchè in vicinanza del punto di inversione. Il fenomeno è molto marcato pel campo di 18000 u.

2. Si osservi la luce emessa dalla vaschetta attraverso un nicol, la cui sezione principale sia *parallela* alle linee di forza. Eccitando il campo sino a 3000 u. (birifrangenza positiva massima), essa diminuisce alquanto, e adoprando lo spettroscopio si vede restringere la parte luminosa dello spettro. Questo fenomeno non è molto marcato, giacchè corrisponde al valore $\beta = 0{,}6\lambda$, ma con molta accuratezza si riesce a constatarlo. Per campi maggiori di quello corrispondente al punto di inversione (birifrangenza negativa), e meglio pel campo massimo (18000 u.), la parte luminosa dello spettro si schiarisce in misura marcatissima, e si allarga.

3. Si proceda come in 2, ma ponendo la sezione principale del nicol normalmente alle linee di forza. Per 3000 u. si osserva aumento di luce, ed allargamento della parte luminosa dello spettro. Pel campo di 18000 u. si constata il contrario: diminuzione di luce, e restringimento. Anche qui la prime parte del fenomeno è poco visibile, la seconda è nettissima.

4. Le esperienze 1, 2, 3 lasciano prevedere che anche parallelamente alle linee di forza, si debbano osservare cambiamenti dei valori dell'assorbimento. Si sostituiscano alle espansioni lineari dell'elettromagnete, delle altre coniche forate. La vaschetta è anch'essa cambiata in altra quadrata di 1 cm. di lato, le cui quattro facce verticali di vetro sieno egualmente buone. Con essa si possono dunque fare osservazioni sia normalmente, che parallelamente al campo. Essendo più corto lo spessore del liquido, questo (è sempre quello della curva 3) è adoperato con concentrazione 7 volte maggiore. Studiando con tal disposizione l'assorbimento parallelamente al campo, e senza uso di nicol, inutile per ragioni di simmetria, si osservano fenomeni più semplici di quelli in direzione normale. Per birifrangenza positiva (3000 u.) si ha aumento dell'intensità luminosa, ed allargamento dello spettro visibile; per birifrangenza negativa (18000 u.) accade il contrario. In entrambi questi casi la luce che esce dal liquido, sottoposto all'azione del campo, è *luce comune*.

Incidentalmente osservo che, con questa disposizione alla quale si aggiungono due nicol, e adoperando luce leggermente convergente, è facilissimo osservare, eccitando il campo, la croce caratteristica dei cristalli ad un asse ottico.

Dall'esperienza 3 si deduce che i bordi dello spettro luminoso, della luce traversante un liquido con birifrangenza positiva, sotto l'azione del campo, e normalmente a questo, *sono nettamente polarizzati nel piano delle linee di forza;* infatti quello spettro si allarga, e l'allargamento, se osservato con un nicol, persiste solo se la sezione principale di questo è normale al campo. Per birifrangenza negativa, l'esp. 2 ci dice che i bordi predetti

sono invece polarizzati nel piano *normale* alle linee di forza. Dal confronto delle esperienze 4 con 2 e 3 si deduce infine che: *per birifrangenze positive l'assorbimento osservato parallelamente alle linee di forza, è minore di quello subìto da un raggio il cui piano di polarizzazione sia normale alle linee di forza. Per birifrangenze negative esso è maggiore.* A questa conclusione va aggiunta l'altra, dedotta da misure quantitative, di cui ora dirò.

In sostanza si vede che il comportamento di questi liquidi attivi, in un campo magnetico, è del tutto simile a quello di cristalli ad un asse, dotati di dicroismo. Le variazioni dell'assorbimento che si osservano in questi nelle diverse direzioni, corrispondono perfettamente a quelle ora studiate; e per dippiù è da osservarsi, che le attuali esperienze dicono che tanto nel caso di birifrangenza positiva che di negativa, *nella propagazione normale, l'onda più lenta è sempre la più assorbita.*

Se il liquido presenta forte birifrangenza, e propriamente se esso è simile a quello della curva (4), sotto l'azione di 18000 u. si possono eseguire misure abbastanza precise degli accennati fenomeni di assorbimento. Per cui esse non sono possibili che nei soli casi di forte birifrangenza negativa. Alla disposizione dell'esp. 4, si aggiunge un fotometro Lummer che serve a misurare l'intensità complessiva della luce traversante il liquido normalmente o parallelamente al campo; lo spettroscopio è dunque eliminato. La sorgente di luce campione è costituita da una fiamma costante, velata da un vetro rosso, onde eguagliare possibilmente le tinte delle due luci. Il liquido adoprato presenta, secondo precedenti osservazioni, una birifrangenza $\beta = 12\lambda$, col campo 18000. Detta 1 l'intensità luminosa senza il campo, facendo intervenire l'azione magnetica si ha:

normalmente al campo,	senza nicol	intens. 1,62
» »	con nicol con sez. princ. ∥ al campo .	» 2,74
» »	» » ⊥ » .	» 0,54
parallelamente »	senza nicol	» 0,56

Sicchè: *l'assorbimento subìto da vibrazioni propagantisi parallelamente alle linee di forza, è lo stesso di quello che subiscono vibrazioni propagantisi normalmente, il cui piano di polarizzazione sia parallelo al campo.* Ciò fu constatato per birifrangenze negative, ma secondo ogni probabilità vale anche per birifrangenze positive, benchè in questo caso non si abbiano osservazioni *quantitative* del fenomeno.

Le precedenti misure fotometriche, confermano molto bene il fatto che i fenomeni presentati da cristalli assorbenti, vengono descritti nel modo più semplice, supponendo ne sia caratteristico il solo vettore normale al piano di polarizzazione (1).

(1) Drude, Lehrbuch der Optik, 1900, pag. 233.

Molte delle esperienze e delle misure eseguite, che sono state riportate in questa Nota, furono già da me comunicate al prof. Voigt. Il quale, interessandosene, ha voluto iniziare lo svolgimento di una trattazione teorica, che è riportata in altra parte di questo Rendiconto.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche fatte sul monte Cimone nell'estate del 1901.* Nota II di CIRO CHISTONI, presentata dal Socio BLASERNA.

II. *Risultati delle misure.* — Ai risultati delle misure pireliometriche fatte al Cimone nel 1901, credo conveniente fare precedere i risultati dei confronti fatti a Sestola fra l'attinometro Violle (che poi si usò al Cimone) ed il pireliometro di Ångström (1). Come avvertii, per il termometro Ducretet 566 è $c = 1{,}111$ e l'apertura del foro di entrata dei raggi avendo per diametro cent. 1,489, si ha $\log s = 0{,}24088$; $\log \frac{c}{s} = \bar{1}{,}80483$.

Le misure si condussero così da avere sempre $t' = t_3$ e $t'' = t_1$. I valori della colonna intestata Q sono i risultati ottenuti col pireliometro Ångström, e quelli della colonna q sono i risultati ottenuti contemporaneamente coll'attinometro Violle, usato nelle condizioni suindicate.

TAVOLA A.

Giorno	Ora	t	t_1	t_3	θ_1	θ_3	τ	q	Q	$\frac{Q}{q}$
	h m									
15 luglio	10,0	24,40	25,98	28,40	1,58	4,00	3,7	1,235	1,319	1,068
»	10,22	23,60	25,62	28,39	2,02	4,79	5,0	1,268	1,453	1,146
»	12,21	25,30	27,39	30,39	2,09	5,09	5,0	1,374	1,581	1,151
17 luglio	9,22	22,45	24,15	26,70	1,70	4,25	4,5	1,213	1,332	1,098
»	10,22	23,80	25,40	28,15	1,60	4,35	4,8	1,285	1,416	1,102
»	11,22	24,40	26,15	28,80	1,75	4,40	4,4	1,269	1,426	1,124
»	12,22	24,80	26,45	29,40	1,65	4,60	4,0	1,472	1,645	1,117
»	14,30	24,35	26,15	28,75	1,80	4,40	4,8	1,208	1,350	1,117
»	15,22	25,50	27,15	29,65	1,65	4,15	5,3	1,127	1,211	1,074
18 luglio	9,22	23,30	25,05	27,45	1,75	4,15	4,4	1,144	1,322	1,156
»	11,22	24,65	26,40	29,00	1,75	4,35	3,9	1,299	1,497	1,152
»	15,22	26,05	27,80	30,10	1,75	4,05	3,5	1,191	1,256	1,055

Media di $\frac{Q}{q} = 1{,}1133$

(1) Veggasi: C. Chistoni, *Misure pireliometriche fatte a Sestola nell'estate del 1901.* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XI della serie 5ª, gennaio 1902, pag. 77 e segg.).

Nella seguente tavola stanno riuniti i risultati delle misure pireliometriche fatte al Cimone (lat. bor. 44°, 12′; long. E da Gr. 10°, 42′; 2165 metri sul mare). L'ora è espressa in tempo medio dell'Europa centrale; h indica (con due decimi di grado di approssimazione) l'altezza del Sole al momento dell'osservazione; B esprime la pressione atmosferica in millimetri di mercurio a 0°; t la temperatura dell'aria; f la forza elastica del vapore acqueo ed u l'umidità relativa nell'atmosfera.

La colonna intestata q contiene i risultati ottenuti direttamente coll'attino metro Violle, e quella intestata Q i risultati ridotti al pireliometro di Ångström.

Lo stato del cielo in prossimità del disco solare, si osservò mediante adatti vetri colorati.

Cimone 1901. TAVOLA B.

Giorno	Ora	h	q	Q	B	t	f	u	Note
	h m	°							
24 luglio	8,22	35,1	1,303	1,451	584,9	6.2	5,2	70	Nebbia e Cu all'orizzonte
»	9,22	45,6	1,454	1,619	585,1	7,5	5,9	75	Nubi sempre più alte
25 luglio	9,22	45,5	1,427	1,589	587,5	10,0	5,9	62	Aureola intorno al ⊙
7 agosto	9,22	43,2	1,318	1,467	586,3	10,1	7,9	84	Veli vaganti; aureola intorno ⊙
9 agosto	8,22	32,5	1,280	1,425	592,5	7,6	5,8	72	Limpido
»	9,22	42,8	1,330	1,481	592,6	9,3	5,7	64	Id.
»	10,22	52,1	1,414	1,574	592,8	10,3	6,4	66	Veli vaganti
»	12,22	61,8	1,421	1,582	593,1	11,1	6,2	61	Qualche Cu
»	13,22	59,1	1,397	1,555	592,7	11,9	6,5	61	Cu
»	14,22	52,1	1,516	1,688	592,3	12,5	6,8	61	Cu e veli sparsi
»	15,22	42,8	1,509	1,680	591,8	13,1	7,1	61	Id.
10 agosto	8,21	32,3	1,261	1,404	592,1	10,7	6,2	63	Cu e nebbia all'orizzonte
»	9,21	42,6	1,271	1,415	592.0	11,2	6.4	62	Cu e veli
»	10,21	51,8	1,468	1,634	592,0	11,6	6,5	62	Id.
»	15,21	42,6	1,427	1,589	591,9	13,6	8,5	72	Cu sparsi
»	17, 0	25,4	1,328	1,479	591,8	11,5	7,7	74	Id.
11 agosto	9,21	42,4	1,426	1,588	591,8	10,9	6,5	66	Nebbia all'orizzonte veli vaganti
12 agosto	8,21	31,9	1,089	1,212	588,9	11,7	5,8	55	Cu vaganti
»	9,21	42,2	1,325	1,475	589,0	12,0	6,0	56	Cu e veli sparsi
»	12,21	60,9	1,360	1,514	589,3	13,6	7,0	58	Id.
13 agosto	8,21	31,7	1,534	1,708	588,0	12,3	5,6	51	Cu e veli all'orizzonte; ⊙ chiaro
17 agosto	11,20	56,8	1,394	1,552	590,3	6,7	5,1	68	Cu all'orizzonte
»	12,20	59,4	1,479	1,647	590,0	7,0	6,1	70	Cu sparsi
»	15,20	41,0	1,494	1,663	590,8	7,1	5,7	74	Id.
18 agosto	9,20	40,8	1,434	1,597	591,7	7,7	7,3	90	Id.

Cimone 1901. TAVOLA B.

Giorno	Ora	h	q	Q	B	t	f	w	Note
	h m	o							
20 agosto	7,20	19,5	1,136	1,265	592,5	10,1	6,8	72	Limpido
»	8,20	30,1	1,429	1,591	592,7	10,9	4,2	43	⊙ bianchiccio
»	9,20	40,3	1,631	1,816	592,9	11,0	3,8	38	⊙ chiaro
»	10,20	49,3	1,509	1,680	593,1	12,7	5,5	48	Id.
»	11,20	55,8	1,401	1,560	593,0	11,3	8,4	83	Veli e Cu sparsi
21 agosto	8,19	29,9	1,318	1,467	593,0	11,3	6,9	68	⊙ chiaro
»	9,19	40,1	1,403	1,562	593,0	11,5	6,4	62	Cu sparsi ⊙ chiaro
»	10,19	49,0	1,372	1,527	593,0	11,7	7,4	71	Id.
»	11,19	55,6	1,322	1,472	593,0	12,0	8,5	80	Id.
23 agosto	8,19	29,4	1,345	1,497	593,5	9,2	8,9	77	Nebbia all'orizzonte
24 agosto	8,19	29,2	1,105	1,230	592,3	11,0	7,4	74	Nebbioso
»	9,19	39,3	1,130	1,258	592,8	10,5	7,9	82	Id. ⊙ bianchiccio
»	10,19	48,2	1,165	1,297	593,1	11,0	7,4	74	Veli sparsi
25 agosto	8,18	28,9	1,320	1,470	591,0	11,9	7,8	74	Nebbia all'orizzonte; veli sparsi
»	9,18	39,0	1,109	1,235	591,0	12,0	8,0	74	Cu all'orizzonte; veli vicini al ⊙
»	10,18	47,9	1,310	1,458	591,1	12,3	8,1	75	Id.
28 agosto	8,17	28,2	1,313	1,462	587,8	7,0	3,5	45	Veli sparsi; ⊙ bianchiccio
»	9,17	38,2	1,165	1,297	588,0	7,1	4,5	57	Cu da nord-ovest a sud-est.
»	10,17	47,0	1,342	1,494	588,1	7,2	4,4	55	Veli sparsi
29 agosto	9,17	38,0	1,427	1,589	587,8	5,1	4,3	63	⊙ chiaro; nebbia all'orizzonte
»	10,17	46,7	0,603	0,671	588,2	5,7	5,2	74	Veli sparsi e densi anche intorno ⊙
30 agosto	8,17	27,7	1,313	1,462	591,2	7,1	4,3	41	⊙ limpido
»	9,17	37,7	1,644	1,830	591,6	7,3	4,5	45	Id.
»	10,17	46,4	1,239	1,379	591,8	7,8	4,8	59	Cu e veli; ⊙ bianchiccio
»	11,17	52,2	1,572	1,750	592,0	8,3	5,8	70	Cu; ⊙ chiaro assai
31 agosto	8,17	27,5	1,105	1,230	591,0	9,7	7,2	79	Aureola intorno al ⊙
»	9,17	37,5	1,193	1,328	592,1	9,7	5,7	62	Veli sparsi
»	10,17	46,3	1,376	1,532	592,6	10,1	5,5	58	Id.
»	11,17	52,3	1,503	1,673	592,6	10,0	7,8	71	Cu e veli sparsi
»	12,17	54,6	1,491	1,660	592,7	10,0	7,3	78	Id.

Mineralogia. — *La Prehnite ed altre zeoliti nelle granuliti di Cala Francese* (1) (Isola della Maddalena — Sardegna). Nota del dott. C. Rimatori, presentata dal Socio Struever.

In una mia Nota precedente sulle Cabasiti di Sardegna (2) feci notare la grande analogia che passa fra le granuliti dell'isola della Maddalena e quelle di Striegau nella Slesia, analogia che riguarda non solo l'aspetto della roccia, la disposizione e relativa quantità de' componeuti principali, ma si estende anche ad alcuni minerali accessori. Allo scopo di confermare vieppiù la somiglianza fra queste due formazioni granitoidi, ho continuato ad esaminare i numerosi campioni, che in più escursioni il prof. Lovisato ha raccolto specialmente alle Cave di Cala Francese all'isola della Maddalena, nella speranza di trovare in essi la fluorina come si riscontra nella granulite di Striegau.

Tutte le ricerche che ho fatto a tale riguardo sono riuscite infruttuose, ma, sebbene non possa presentare alcun nuovo fatto che renda più evidente l'analogia suddetta, le ulteriori osservazioni non furono inutili, poichè mi permettono di ritornare ancora sulla granulite della Maddalena e portare nuovo contributo alla conoscenza de' minerali accessorî che l'accompagnano. Ed invero, oltre a quelli citati nella mia Nota e nel lavoro pubblicato dal dott. Riva (3), questa granulite presenta, sebbene raramente, due varietà di Prehnite, di cui l'una verdognola e l'altra, assai più scarsa, quasi bianca.

La Prehnite verdognola, a differenza di molti altri minerali accessorî, non si presenta nelle fenditure o cavità, ma è in massa intercalata fra gli elementi feldspatici, il quarzo e l'epidoto. Dai primi nettamente si differenzia, non così avviene a contatto dell'epidoto, nel qual caso appare quasi come una graduale trasformazione di questo.

È una massa cristallina con individui indistinti, che presentano però evidenti le faccie di sfaldatura distinte parallelamente alla base ed altre meno nette secondo le faccie del prisma. La frattura è ineguale, subtrasparente, di durezza considerevole e polvere bianca. Dà acqua nel tubo chiuso, però in piccola quantità; dall'acido cloridrico, anche dopo prolungata ebollizione, appare intaccata soltanto parzialmente con separazione di silice gelatinosa. Non essendo perciò sicuro di poterla decomporre completamente per

(1) Lavoro eseguito nel Museo di Mineralogia e Geologia della R. Università di Cagliari.

(2) Rend. Acc. Lincei, agosto 1900.

(3) *I Feldspati del granito di Cala Francese ed alcuni minerali che li accompagnano.* R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano 1901.

la sola azione di quell'acido anche molto prolungata, ho preferito effettuare la determinazione delle basi intaccando la sostanza con acido fluoridrico e solforico, e quella della silice mediante la fusione con i carbonati alcalini.

I risultati dell'analisi sono i seguenti:

Densità a 25°,8 = 2,908	Durezza = 6,5
SiO^2	42,59
Al^2O^3	22,76
Fe^2O^3	3,02
CaO	27,02
MgO	tracce
Na^2O	1,06
H^2O	2,66
	99,11

Confrontando fra loro i rapporti tra le percentuali trovate ed i pesi molecolari de' costituenti, e facendo astrazione delle piccole frazioni (circa 1 decimo), si deduce la formola che segue:

$$3\,SiO^2.\ Al^2O^3.\ 2\,(CaO.\,{}^1/_{10}\,FeO).\,{}^2/_3H^2O$$

nella quale le quantità dell'ossigeno per RO, R^2O^3, SiO^2, H^2O stanno fra loro come:

$$2 : 3 : 6 : {}^2/_3$$

rapporti, i quali, ad eccezione di quello per l'acqua, che è minore, sono eguali a quelli citati dal Dana ([1]) per la composizione della *Prehnite* tipica e corrispondono inoltre alla formola:

$$2\,CaSiO^3.\ SiAl^2O^5.\ Aq.$$

secondo il Bombicci ([2]).

Non rimane perciò alcun dubbio sulla natura della specie mineralogica esaminata, poichè sia l'aspetto esterno, come la durezza, la densità, la natura e proporzione de' componenti concordemente conducono alla conclusione medesima..

L'altra varietà di Prehnite fu riscontrata finora in un solo nido; fatta astrazione del colore, che è quasi bianco, per il suo aspetto e le sue proprietà non devo che ripetere quanto ho detto per l'altra.

([1]) *A System of Mineralogy* 1893, pag. 531.
([2]) *Corso di mineralogia*, vol. II, parte 2ª, pag. 814.

Densità a 26°,2 = 2,924 Durezza 6,5.

Composizione centesimale	
SiO^2	43,01
Al^2O^3	28,77
CaO	25,26
MgO	0,88
Alcali	tracce
H^2O	2,08
	100,00

Per insufficienza di sostanza la silice fu dedotta per differenza. Questi dati sono molto vicini a quelli risultanti dall'analisi precedente, epperciò ancor essi corrispondono alla composizione tipica della *Prehnite*.

Questa specie mineralogica, che da alcuni viene considerata come una zeolite, mi richiama alla mente le altre zeoliti che compariscono nella granulite di Cala Francese. Esse, che, ad eccezione della Cabasite, furono da me solamente accennate, secondo lo studio posteriore del Riva ([1]) devonsi ritenere per *Stilbite* e *Laumontite*. Quest'autore fonda tali determinazioni sulle proprietà ottiche e, per l'ultima zeolite, anche su un semplice saggio qualitativo.

Ho creduto perciò opportuno sottoporre all'analisi quantitativa tutte le zeoliti che ho potuto riscontrare in quelle granuliti, per vedere se i risultati confermassero l'esistenza delle specie suddette, oppure ne dimostrassero ancora delle nuove.

Alcune fratture della roccia sono coperte da un'incrostazione talvolta spessa alcuni millimetri, costituite da un impasto di minuti cristalli tabulari poco distinti, che talvolta s'intarsiano, di color giallo-chiaro a splendore perlaceo tendente al resinoso. La sua separazione dagli altri elementi della roccia ha presentato difficoltà non lievi, ma, sebbene non possa asserire di avere operato su un materiale del grado di purezza richiesto per un'analisi esatta ed i valori trovati possano deviare da' veri più che ne' casi ordinarî, pure credo di poterli presentare perchè le cause d'errore non sono state tali da mascherare la vera composizione e da condurre ad una formula incerta.

Densità a 23°,6 = 2,27 ([2]).

Composizione centesimale	
SiO^2	56,40
$Al^2O^3 + Fe^2O^3$	15,97
CaO	5,87
Na^2O	2,28
H^2O	17,76
	98,28

([1]) Loc. cit.

([2]) La durezza di questa zeolite come delle seguenti, non si è potuta determinare perchè la sostanza non si presta a tale determinazione.

Da questi valori risulta la seguente formola:

$$6\,SiO^2\,.\,Al^2O^3\,.\,C^2/_3\,CaO\,.\,{}^1/_4\,Na^2O).\,6{,}3\,H_2O$$

in cui i rapporti fra le quantità dell'ossigeno dell'acido, delle basi e dell'acqua sono:

$$\frac{11}{12} : 3 : 12 : 6{,}3$$

molto vicini a questi:

$$1 : 3 : 12 : 6$$

citati dal Dana (1) per la composizione tipica della *Stilbite*.

Nel lavoro del Riva viene citata la Stilbite come un aggregato fibroso-raggiato di color giallo pallido, cioè con un aspetto assai diverso da quello ora descritto. Probabilmente la Stilbite da lui esaminata è un'altra varietà più rara della precedente e che possiede i caratteri descritti dal Riva. Di questa ho potuto separare una quantità assai limitata, circa 9 centigrammi; ciò nondimeno, essendo pura, ne ho potuto determinare la composizione seguente:

Densità a 24°,2 = 2,27.

SiO^2	54,16
$Al^2O^3 + Fe^2O^3$	15,17
CaO	8,04
Alcali	2,87
H^2O e perdite	19,76
	100,00

Dati che conducono alla formola:

$$6\,SiO^2\,.\,Al^2O^3\,.\,\frac{24}{25}\,CaO\,.\,7{,}8\,H^2O$$

in cui i rapporti dell'ossigeno per RO, R^2O^3, SiO^2, H^2O sono.

$$\frac{24}{25} : 3 : 12 : 7{,}8$$

rapporti molto vicini ai precedenti specialmente per l'acido e le basi e tanto gli uni come gli altri non deviano di molto da quelli tipici per la *Stilbite*. Se si tien conto poi che, operando su piccola quantità di sostanza, come in quest'ultimo caso, oppure su sostanza non perfettamente pura, come nell'altro, gli errori sperimentali possono avere un'influenza più o meno sensibile, possiamo benissimo giustificare le deviazioni dalla formola teorica, ed eliminare ogni dubbio intorno alla natura di queste due varietà di *Stilbite*.

(1) Loc. cit., pag. 587.

Nel campione contenente la Prehnite verdognola ho riscontrato un piccolo nido d'un'altra zeolite finamente fibrosa, facilmente friabile, bianca ed a splendore sericeo, la quale ricorda per questi caratteri la Laumontite citata dal Riva. Questa zeolite, a differenza dell'altra mescolata all' epidoto, trovasi a ridosso della Perthite ed appare come un prodotto di alterazione di questa. Ciò risulta ancora più evidente in un campione ove il feldspato roseo trovasi in uno stato di avanzata trasformazione e nel quale, in alcuni punti, si osserva la zeolite fibrosa aderente alla Perthite in modo però che fra le due sostanze non v'è netta distinzione, ma come un graduale passaggio, nel quale il feldspato accenna ad una struttura finamente fibrosa. Questa zeolite è ancor più rara delle altre, ma, sebbene anche in questo caso la sostanza sia stata in piccola quantità, per la sua purezza, non ho trovato difficoltà nell'esecuzione dell'analisi che ha dato questi valori:

SiO^2	52,42
Al^2O^3	21,44
CaO	13,23
H^2O	14,42
	101,51

Ai quali corrisponde la formola:

$$4{,}1\ SiO^2 . Al^2O^3 . 1{,}1\ CaO . 3{,}8\ H^2O$$

con i seguenti rapporti per l'ossigeno:

$$1{,}1 : 3 : 8{,}2 : 3{,}8$$

molto vicini a questi:

$$1 : 3 : 8 : 4$$

che spettano alla *Laumontite* tipica. Così per altra via, posso confermare le determinazioni del Riva, sicuro anche, per i caratteri citati, che le sostanze da lui esaminate siano identiche a quelle che sono passate per le mie mani.

A queste zeoliti posso aggiungere un'altra specie, nuova finora per la Sardegna. Essa è di color giallo-chiaro a cristalli aciculari raggiati, che somiglia a prima vista alla Stilbite; all'analisi però è risultata diversa. Trovasi in piccoli nidi intercalati fra il quarzo ed il feldspato; talvolta è impastata con l'epidoto dal quale con difficoltà si può nettamente separare. Scegliendo le parti di color giallo chiaro omogeneo, ho potuto ricavarne circa due decigrammi contenenti però sostanze estranee in quantità non trascurabile; perciò oltre le difficoltà inerenti all'esiguo peso di sostanza disponibile, ho dovuto tener conto ancora delle impurezze. Fondandomi sul fatto che queste non vengono intaccate dall'acido cloridrico e che rimangono indietro con la silice, ho sottoposto questa a triplice trattamento a caldo con soluzione sa-

tura di carbonato sodico in modo che tutta la silice passasse in soluzione; ho potuto allora determinare la quantità del residuo e riferire quindi il peso dell'acido, delle basi e dell'acqua a quello della sostanza impiegata, meno le impurità trovate.

Dopo questi opportuni schiarimenti, espongo i risultati ottenuti:

Densità a 18°,5 = 2,52.

Composizione centesimale.

SiO^2	47,83
Al^2O^3	22,16
Fe^2O^3	5,22
CaO	15,92
Alcali	tracce
H^2O	10,70
	101,83

Da' quali si deduce la formola:

$$3{,}2\ SiO^2 . (^{87}/_{100}\ Al^2O^3 . {}^{13}/_{100}\ Fe^2O^3) . 1{,}1\ CaO . 2{,}4\ H^2O$$

con questi rapporti per le quantità dell'ossigeno:

$$1{,}1 : 3 : 6{,}4 : 2{,}4$$

i quali si accostano a quelli della *Scolecite*

$$1 : 3 : 6 : 3$$

più che ai rapporti riferentisi alle altre zeoliti calciche.

Riassumendo, dirò che questo studio ulteriore delle granuliti di Cala Francese mi ha condotto a confermare la presenza della Stilbite e Laumontite, date dal Riva, a constatare una seconda varietà di Stilbite, due varietà di Prehnite ed infine a segnalare una specie mineralogica, nuova per l'isola, la Scolecite.

Quindi nella roccia suddetta sinora sono state riscontrate cinque specie minerali appartenenti al gruppo delle zeoliti, comprendendo fra queste anche la Prehnite.

Anche questa volta sento il dovere di esprimere la mia gratitudine verso il prof. Lovisato che mi fornì il materiale necessario e che mi fu prodigo di consigli durante queste ricerche.

Mineralogia. — *Appunti sopra alcuni minerali di Casal di Pari.* (Comune *Campagnatico*, provincia *Grosseto*). Nota di G. DE ANGELIS d'OSSAT, presentata dal Socio G. STRÜWER.

Nella provincia di Grosseto, nel comune di Campagnatico e presso la frazione di Casal di Pari e più precisamente fra questa e Pari, già da tempi remoti (1), era conosciuto un giacimento minerario. In questo ora sono attivate tre ricerche di minerali, cioè: antimonio, piombo e mercurio. Le tre località non sono molto lontane fra di loro ed appartengono a tre concessioni limitrofe. Dirò partitamente di ciascuna ricerca dopo aver abbozzato rapidamente la geologia della regione circostante.

I terreni geologici che affiorano presso Casal di Pari sono poco svariati e pochissimo conosciuti. Tuttavia, tenendo conto dei tipici caratteri litologici comuni alle altre rocce coeve della Toscana, non è difficile orientarsi nella geologia della regione. La maggior parte delle rocce, per la scarsezza o mancanza assoluta di fossili, non hanno un riferimento accertato; quindi anche io riporterò i valori cronologici con molte riserve.

Le rocce più antiche sono le permo-carbonifere; esse risultano di quegli stessi scisti ed anageniti (*Verrucano*), che affiorano largamente per tutto l'altipiano bagnato dall'Ombrone e dalla Merse. È l'identico tipo litologico che s'incontra nella Montagnola senese ed in molte altre località della Toscana.

Sopra le rocce del permo-carbonifero, con discordanza, si adagiano generalmente i calcari cavernosi, più o meno dolomitici, che i geologi toscani riportano al retico. Presso però la ricerca di galena, a s. Antonio, trovasi un calcare oscuro, con molte vene spatiche, ricco di residui di crinoidi. I fossili raccolti dal Novarese (2) e determinati dal di Stefano sono:

Encrinus liliiformis Bronn,
» cfr. *silesiacus* Beyr.,
Cidaris transversa Mayer.

Gasteropodi pochi, riconoscibile solo una specie di *Natica*,

Le due forme sicuramente determinate permettono di riferire al triasico medio (*Muschelkalk*) il calcare in parola: quindi esso si troverebbe sotto al calcare retico e fisserebbe la trasgressione sopra al verrucano al tempo del triasico medio.

(1) In un pozzo scavato anticamente fu rinvenuta una medaglia del 900.
(2) Novarese V., Boll. Soc. geol. ital., vol. XIII (1894), pagg. 15-17.

Anche io potei facilmente raccogliere parecchio materiale paleontologico, essendo i fossili isolati dalla erosione; ma ben poco avrei ora da aggiungere a ciò che è noto.

Sopra le rocce del retico, con chiara discordanza, poggiano quelle dell'eocene, anzi della parte più elevata di questo sistema. Sono calcari del più tipico alberese, intercalati con i soliti scisti.

Poco o punto importanti sono le rocce dei tempi più recenti.

La mineralizzazione è circoscritta specialmente nelle rocce del permo-carbonifero e del triasico.

Il giacimento più anticamente conosciuto è quello denominato *Selva* (antimonio), posto a 2 Km. a nord dell'abitato di Casal di Pari.

Il secondo è quello di s. Antonio e Val d'Aspra (galena), che si trova a 3 Km. dal caseggiato di Casal di Pari, misurati in direzione di Poggio Ornate.

Il terzo poi, chiamato la Miniera di Casale (cinabro), è situato a 2 Km. dallo stesso paese, in direzione nord-ovest e proprio all' incontro dei fossi della Riluccia e del Canneto.

Selva.

Le notizie storiche della miniera della Selva (*Rel. Camera Commercio Siena*) rimontano ad epoca antica. Le prime informazioni scientifiche le apprendiamo dalla *Relazione del servizio minerario del 1880* e dal Lattes [1]. Questi elogia la Ditta Scaniglia Carlo e C. di Siena per essere stata nel 1876 la promotrice della ripresa della lavorazione dell'antimonio.

Il minerale che si estrasse dopo il 1889 alla Selva non venne più spedito a Marsiglia ed a Newcastle, ma fu trattato in apposita fonderia impiantata dalla Ditta stessa presso Siena. Belli campioni del minerale figuravano all'esposizione industriale italiana 1881 in Milano. Molti dati tecnici si rilevano dalle relazioni del servizio minerario degli anni seguenti.

Ben presto però la lavorazione cessò a causa della scarsezza dei nuclei di minerale. Ora sono stati ripresi i lavori specialmente per riconoscere il giacimento verso il contatto fra gli scisti permo-carboniferi ed il retico, ritenendosi questo contatto come più ricco di minerale. Similmente si praticarono altri lavori a discreta distanza dall'abbattimento a giorno per riconoscere la vastità del giacimento.

Il minerale di antimonio si trova entro una roccia profondamente alterata presso al contatto delle rocce triasiche ed eoceniche e non lontano dalle rocce del permo-carbonifero.

La roccia alterata però pare che appartenga al triasico. Entro la terra giallastra o rossastra si rinvengono, insieme a frammenti di calcare retico

[1] Lattes O., *Le miniere*. Esposiz. ind. ital. 1881 Milano. Milano 1884.

e di scisti del paleozoico, noduli di minerale, impaniati od in una massa silicea od in un'argilla che proviene dall'alterazione degli scisti nominati. I noduli raggiungono talvolta notevoli dimensioni; il minerale è spesso alterato e trasformato in altri prodotti.

La stessa erosione meteorica mette a giorno parecchi blocchi di minerale, anzi in tempi passati gli indigeni si servirono di questi nella costruzione di un piccolo fabbricato, che poi naturalmente venne abbattuto.

Nella mia fugace escursione potei raccogliere alcuni minerali in questo e negli altri giacimenti. La cortesia poi del signor Ernesto Scaniglia mi rese possessore di altro materiale, di che vivamentre ringrazio l'egregio direttore.

Ora riferisco intorno ai minerali della Selva.

1. *Stibina.* — È il minerale industrialmente importante. Si trova in nuclei, talvolta notevoli, impaniati o in una massa quarzosa o nell'argilla o fra un materiale terroso diversamente colorato. Il minerale è spesso profondamente alterato e si presenta in varî aspetti:

a) in aggruppamenti di cristalli disposti a struttura fibroso-raggiata. Le dimensioni degli elementi variano di molto, dai più piccoli si arriva a quelli che misurano una lunghezza, sull'asse della z, di cm. 12 ed una larghezza di mm. 8. Spesso i cristalli sono ricoperti di una patina giallastra o rossastra. La sfaldatura è evidentissima ed i piani che si ottengono mostrano una lucentezza metallica vivissima.

b) in cristalli aciculari disseminati nella massa terrosa ed argillosa. Essi sono ben formati, con facce nitide e talvolta riuniti. Si potrebbero ripetere sopra di essi le stesse osservazioni che già l'Artini [1] fece sopra i cristalli di Stibina della non lontana miniera delle Cetine di Cotorniano e che poi confermarono il Pelloux [2] ed il d'Achiardi G. [3].

c) in cristalli prismatici trasformati superficialmente in *Cervantite*, trasformazione che talvolta si addentra sino a modificare tutto l'individuo.

d) in cristalli alterati e ricoperti di zolfo.

Debbo alla cortesia ed alla perizia del signor Romeo Mirolli le analisi chimiche quantitative di questo minerale, come tutte le altre che riporterò in seguito.

L'analisi (I) riguarda i cristalli più grandi e più inalterati di Stibina. Essi provengono dalla Galleria di s. Luisa.

[1] Artini E., *Appunti di mineralogia italiana. Antimonite di Cetine.* Rend. R. Accad. Lincei, vol. III, 2° sem., ser. 5ª, Roma 1894.

[2] Pelloux A., *Appunti sopra alcuni minerali delle Cetine di Cotorniano presso Rosia.* Rend. R. Accad. Lincei, vol. X, sem. 2°, ser. 5ª, Roma 1901.

[3] D'Achiardi G., *Cenni sui minerali delle miniere di antimonio delle Cetine di Cotorniano.* Atti Soc. tosc. sc. nat. Proc. verb., vol XII, pag. 232, 1901.

La (II) spetta ai cristalli più piccoli e superficialmente alterati, provenienti dalla stessa Galleria.

Finalmente fu sottoposta all' analisi (III) la Stibina profondamente alterata in un materiale terroso rosso-giallastro.

Dalle analisi che ora riporto si possono riconoscere alcuni fatti che indicano gli stadî diversi di alterazione della Stibina.

	I	II	III	
Sb.	68.000	52.0612	48.02	
S.	31.020	27.6360	43.05	
Fe.	0.002	0.0718	0.65	
Ca.	—	3.9270	1.42	
Al.	—	4.7360	—	
Res. ins.	1,030	9.4500	6.00	
	100.052	97.8820	99.14	C. 100°

(I) Anche la più pura Stibina presenta le alterazioni; invero essa contiene più zolfo del teorico (28,8 %); inoltre ferro e parte insolubile.

(II) La parte del materiale di alterazione aumenta con l' intervento dell' argilla ocracea e calcarea.

(III) Lo zolfo raggiunge quasi il doppio del teorico; il residuo si arricchisce di ferro; è presente il calcio.

Sono questi gli stadî che conducono la Stibina ai suoi naturali derivati. È da segnalarsi l' assenza dell' arsenico e del piombo, elementi che non furono rintracciati neppure con una analisi qualitativa; tale mancanza costituisce un pregio industriale della Stibina della Selva.

2. *Cervantite.* — È un prodotto di alterazione della Stibina, della quale spesso conserva la forma esterna. Frequentemente però si presenta come una massa più o meno compatta di color giallo-ruggine a giallo-chiaro. Corrisponde perfettamente a quella descritta dal Pelloux proveniente dalle Cetine di Cotorniano.

3. *Stibiconite* o *antimonocra.* — Anche questo minerale è molto abbondante e deriva dalla Stibina. Cristalli interi hanno subìto questa alterazione. Spesso è una massa bianco-giallastra mista a calcite. Invero ottenni viva effervescenza con l' acido cloridrico diluito e dalla soluzione la reazione evidente del calcio. Al tubo poi ebbi notevole svolgimento di acqua.

4. *Zolfo.* — Questo minerale si mostra specialmente in piccoli cristallini di cui alcuno raggiunge i tre mm. Essi si trovano specialmente nelle cavità lasciate dai diversi gruppi di cristalli di Stibina o sulla superficie di questi. Lo zolfo è di color giallo citrino; i cristallini sono nitidi. L' abito cristallino somiglia molto a quello descritto dal Pelloux per lo zolfo delle Cetine, invero la zona delle protopiramidi è la più ricca.

5. *Pirite.* — Vi sono piccole lenti di questo minerale che va ossidandosi ed inalzando la temperatura dei tratti di galleria che la tagliano. Un campione mi mostra una massa bollosa, entro la quale spiccano piccoli ottaedri che raggiungono anche 4 mm. di diametro. L'analisi ha dato:

Fe	47.10	
S.	52.97	
	100.07	C. 100°.

7. *Ematite.* — Spesso i cristalli di Stibina sono ricoperti da macchie rosse di questo minerale. Non ci meraviglia la presenza dell'Ematite avendo l'analisi della Stibina constatata sempre la presenza del ferro.

7. *Gesso.*

8. *Quarzo.* — I due ultimi minerali quantunque abbastanza diffusi pure non presentano nulla d'interessante, come gli altri di rame che raramente si trovano alla Selva.

S. Antonio e Val d'Aspra.

Anche la ricerca della galena nella località s. Antonio rimonta ad epoca antica. Ora è stata ripresa la lavorazione con qualche alacrità.

Sopra gli scisti permo-carboniferi giace un piccolo lembo di calcare magnesiaco, compatto, retico, con vene di galena senza alcuna direzione. Le vene sono sempre piccole. Nell'interno della massa calcarea si trovano non raramente cavità riempite di detriti e di argilla; fra questo materiale caoticamente ammassato si rinvengono grossi blocchi e noduli di galena, spesso rivestiti di cinabro. Altre piccole cavità sono tappezzate di belli cristalli di quarzo. Vicino a questa località giace il piccolo lembo di calcare del triasico medio. Interessanti sono le parole che scrive il d'Achiardi intorno a questo giacimento e che riferirò in seguito.

In due anni, con pochi operai, si estrassero circa 50 ton. di minerale che venne spedito a Pertusola.

1. *Galena.* — Si trova in blocchi più o meno vistosi, formati da cristalli cubici di discrete dimensioni. I noduli fra l'argilla mostrano anche esternamente i cubi ben formati e rivestiti di solfuro di mercurio e da ossidi di ferro.

Per escludere che la Galena potesse appartenere a quella varietà che il Bechi chiamò *Targionite*, e per riconoscere la presenza e la quantità dell'argento, ho fatto eseguire dal nominato analista lo studio chimico di un campione di minerale molto puro.

Pb.	85.76	
S.	12.95	
Fe.	0.50	
	99.21	C. 100°.

Da questo risultato appare che il minerale è una vera e propria Galena e che non contiene: argento, antimonio, zinco e rame.

La roccia incassante, presa a centim. 5 dal minerale, mostra i fossili presumibilmente identici a quelli menzionati. L'analisi di questa ha dato:

Fe.	4.155	
CaO.	28.790	
MgO.	16.421	
CO^2.	45.620	
H^2O.	0.145	
Res. ins.	4.713	
	99.844	C. 100°.

L'analisi fa ascrivere la roccia ad una vera dolomite,

2. *Cinabro.* — Riveste frequentemente, con sottili veli, i blocchi di Galena: il minerale però non può finora dar luogo ad una utile escavazione.

3. *Pirite.* — Entro la dolomite si trovano bei cristalli di Pirite (Mineralizzazione *a punteggiature*). Ne raccolsi un esemplare che rappresenta un caratteristico pentagonododecaedro. L'analisi qualitativa non vi ha svelato la preseza del rame.

4. *Calcopirite.* — In un campione di Quarzo, di Galena e di carbonati idrati di rame ho potuto riconoscere due piccole masserelle di Calcopirite.

5. *Fluorite.* — Misti al Quarzo si trovano cubi quasi incolori di Fluorite.

6. *Quarzo.* — Si hanno dentro la cavità del calcare bellissime cristallizzazioni di questo minerale. Si presenta con le forme caratteristiche e quasi sempre impiantato. Le dimensioni variano: vi sono cristalli che passano i centim. 10 di lunghezza. Raramente è trasparente, comunemente latteo. All'analisi si mostrò puro e con sole tracce di ferro.

7. *Limonite.* — Questo minerale riempie talvolta le fessure; non è mai puro.

8. *Azzurrite.* — In venuzze accompagna la Limonite ed il Quarzo, questo spesso ne è compenetrato.

9. *Malachite.* — Nella stessa giacitura del precedente. L'analisi della malachite tolta sopra una crosta di Limonite ha dato:

Cu.	40.00	
Fe.	38.00	
CO^2	17.70	
H^2O.	1.90	
Res. insol.	2.20	
	99.88	C. 100°.

Evidentemente non si riuscì a separare la Malachite dalla Limonite.

10. *Calcite.*

11. *Gesso.* — I due ultimi minerali e qualche altro ancora offrono poco o punto importanza al mineralista.

Miniera di Casale.

In una diga di quarzo, fra gli scisti permo-carboniferi, si trova il Cinabro che tappezza i frammenti silicei. La roccia è tutta intimamente fratturata e localmente dà luogo a vene di argilla; in questa si rinviene il Cinabro, sotto forma di venuzze, con qualche frequenza. Le ricerche finora sono poco fruttuose. Nella Quarzite vi sono anche lenti di Pirite che si vanno ossidando.

1. *Quarzo.* — Costituisce la quarzite della diga.

2. *Pirite.* — Vene nella Quarzite.

3. *Zolfo.* Con la Pirite.

4. *Cinabro.* — In sottili veli di colore caratteristico. In un campione di argilla, infarcita da minuti frammenti di quarzo, fu trovato il 2,35 % di mercurio metallico. È questa una quantità più che sufficiente per il trattamento del materiale, posto che si rinvenisse in grande quantità e che si potesse estrarre con relativa tenue spesa. Il trattamento dovrebbe essere eseguito con i forni a caduta automatica Cermak-Spirek.

Poco ed incerto è ciò che possiamo dire intorno all'origine dei citati giacimenti.

Il d'Achiardi A. (1) scrisse intorno al giacimento di Val d'Aspra nei seguenti termini: « Singolarissima è questa giacitura della Galena in una cal- « caria cavernosa, che ha tutto l'aspetto di una massa eruttiva. I cristalli « cubici di Galena insieme a quelli di Blenda (2) gialla come l'ambra, sono « tenacissimamente impastati nella sostanza calcare, quasi che questa erom- « pendo, in quale stato ed in quale modo non so, abbia svelto e trasportato « includendoli in se medesima i minerali cristallizzati di filoni metalliferi « da esse attraversate..... ».

Il Toso (3) invece esprime un altro parere: sembra che egli ritenga lo stesso giacimento come di origine di contatto.

Il Lotti (4) infine, per non citare gli autori che investigarono la origine degli altri analoghi e vicini giacimenti, reputa che vi sia un strettissimo legame fra i nostri giacimenti e le rocce eruttive quaternarie.

(1) D'Achiardi A., *Mineralogia della Toscana*, vol. II, pag. 274, Pisa 1873.

(2) Non ho rinvenuto la *blenda* di cui qui si parla.

(3) Toso P., *Rivista del servizio minerario nel 1899*, pag. 145. Roma 1900.

(4) Lotti B., *Die Zinnober und Antimon führenden Lagerstätten Toscanas, und ihre Beziehungen zu den quartären Eruptivgesteinen.* Zeitsc. f. prakt Geologie. 2. 1901. — (Rassegna mineraria, vol. XIV, 1901).

Io mi limito a ricordare che i nostri giacimenti non sono molto lontani dal Monte Amiata e meno dalle rocce eruttive di Radicofani. Sono ancora da notarsi la vicinanza e l'analogia geologica e mineralogica di altri giacimenti minerari, come: Monte Orsaio, Cetine di Cotorniano ecc. ecc. Finalmente non si deve dimenticare che prossima ai nostri giacimenti è la storica sorgente termale di Petriolo, coronata di putizze, le quali emettono zolfo e silice geyseriana.

Dalle osservazioni esposte ci sembra che, con tutte le riserve del caso, si possa attribuire l'origine delle miniere di antimonio e di galena a *metasomatismo*. Il cinabro poi deve ritenersi come *d'impregnazione metallifera* del filone quarzoso, con analoga formazione, quantunque con ricchezza diversa, dei filoni quarzosi cinabriferi di Almaden.

Chimica. — *Ricerche sopra alcuni acidi idrossammici* [1]. Nota di A. Angeli, F. Angelico e F. Scurti, presentata dal Socio G. Ciamician.

Col nome di acidi idrossammici si indicano comunemente i derivati dell'idrossilammina della forma.

$$R . CO . NH . OH,$$

dove R indica un radicale qualunque; a queste sostanze sotto forma di sali, spetta con tutta probabilità la struttura:

$$R . C\begin{matrix} NOH \\ \diagup\!\!\diagdown \\ OH \end{matrix}$$

nella quale uno o tutti e due gli atomi di idrogeno possono venire rimpiazzati dai metalli. In soluzione alcalina sono molto stabili, mentre i mezzi acidi facilmente li idrolizzano con formazione di idrossilammina e del carboacido. Le ricerche ulteriori hanno dimostrato che anche gli acidi minerali possono fornire con l'idrossilammina composti di struttura analoga; così sono stati preparati l'acido idrossilamminsolfonico, l'acido nitroidrossilamminico e l'acido benzolsolfoidrossammico; anche a queste sostanze allo stato libero, oppure sotto forma di sali spettano strutture analoghe ai derivati dei carboacidi, però, nel loro comportamento differiscono da questi ultimi in modo notevole. L'acido benzolsolfoidrossammico e l'acido idrossilamminsolfonico per azione degli acidi, al pari degli acidi idrossammici del carbonio, si scindono facilmente in idrossi-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

lammina e nel corrispondente acido, solforico o benzolsolfonico; l'acido nitroidrossilamminico invece perde subito una molecola di acqua per dare biossido di azoto. Per azione degli alcali invece tutti e tre si scindono in modo identico: nel residuo NOH che uno di noi ha chiamato *nitrossile* e rispettivamente negli acidi solforoso, benzolsolfinico e nitroso. Queste differenti scissioni operate dai mezzi alcalini, oppure acidi, si possono attribuire alla diversa ripartizione degli elementi dell'acqua:

$$\begin{matrix} R.SO_2.NH.OH \\ \qquad\qquad \longrightarrow R.SO_2H + NH(OH)_2 \longrightarrow R.SO_2H + NOH + H_2O. \\ H \quad OH \end{matrix}$$

ovvero:

$$\begin{matrix} R.SO_2.NH.OH \\ \qquad\qquad \longrightarrow R.SO_3H + NH_2.OH. \\ OH \quad H \end{matrix}$$

Nel primo caso al posto del residuo RSO_2 — *nell'idrossilammina si porta un ossidrile; nel secondo invece va un atomo di idrogeno;* questo fatto importante, come vedremo in seguito, è di indole generale. Come è noto, nelle ordinarie scissioni (catalisi degli eteri, saponificazione delle ammidi, inversione dello zucchero ecc.) i mezzi acidi, oppure alcalini, conducono sempre agli stessi prodotti finali.

Il nitrossile, come uno di noi ha posto recentemente in rilievo, si può riguardare come una anidride della biossiammoniaca (1).

Allo scopo di meglio approfondire il meccanismo secondo cui si compiono queste interessanti trasformazioni, noi abbiamo esteso lo studio degli

(1) Ricordando le analogie che esistono fra molti composti che al posto di un atomo di azoto N contengono il residuo $HC\equiv$ oppure $RC\equiv$, dove R indica un radicale monovalente, si nota che i derivati che l'azoto fornisce con l'idrogeno e con l'ossigeno corrispondono ai prodotti che si ottengono dal carbonio. Ora che Adolfo Baeyer (Berichte XXXIII, 1569) ha completata la serie per i derivati del toluolo si vede subito che a ogni termine dei composti dell'azoto corrisponde un termine analogo per i derivati del carbonio. Prescindendo da ogni formola di struttura, i primi differiscono dai secondi per sostituzione dell'atomo di azoto con il residuo (R.C), dove per brevità R indica C_6H_5.

$R.CH_3$	$R.CH_2.OH$	$R.COH$	$R.CO_2H$	$R.CO_3H$
NH_3	$NH_2.OH$	NOH	NO_2H	NO_3H

Al toluolo corrisponde l'ammoniaca, all'alcool benzilico l'idrossilammina, all'aldeide benzoica il nitrossile, all'acido benzoico l'acido nitroso all'acido perbenzoico di Baeyer l'acido nitrico; oltre alle molte analogie che si osservano fra i termini corrispondenti delle due serie è notevole il fatto che la benzaldeide facilmente si polimerizza per dare il benzoino

$$2R.COH = (R.COH)_2$$

nello stesso modo che il nitrossile

$$2NOH = (NOH)_2$$

si trasforma in acido iponitroso.

acidi idrossammici cercando anche di utilizzare i risultati cui erano pervenuti altri sperimentatori.

Noi abbiamo incominciate le nostre esperienze sopra gli acidi idrossammici dello zolfo, siccome quelli che più facilmente si prestano a queste reazioni. A tale scopo abbiamo preparati gli acidi

$$R . SO_2 . NH . OH$$
$$R . SO_2 . NR_I . OH$$
$$R . SO_2 . NH . OR_I$$
$$R . SO_2 . NR_I . OR_{II}$$

dove R rappresenta un residuo alifatico od aromatico, R_I e R_{II} residui aromatici, alifatici oppure radicali acidi.

Per gli acidi del primo gruppo, analoghi all'acido di Piloty (Berichte XXIX, 1559)

$$C_{10}H_7(\alpha) . SO_2NH . OH$$
$$C_2 H_5 . SO_2NH . OH$$
$$C_6 H_4 . (SO_2NH.OH)_2$$
$$C_{10}H_6 . (SO_2NH.OH)_2 \ (^1).$$

abbiamo potuto constatare che tutti e con eguale facilità subiscono le scissioni perfettamente identiche a quelle presentate dall'acido benzolsolfoidrossammico.

Nella scissione alcalina abbiamo operato in presenza di una aldeide che fissava il nitrossile per trasformarsi nell'acido idrossammico:

$$R . COH + NOH = R . C\begin{matrix} \diagup NOH \\ \diagdown OH \end{matrix} .$$

In modo analogo, operando in presenza di nitrosobenzolo, questo si trasforma nella nitrosofenilidrossilammina:

$$R . NO + NOH = R . N\begin{matrix} \diagup NOH \\ \diagdown O \end{matrix} .$$

Mentre però l'acido benzolsolfoidrossammico viene scisso in acido ben-

(1) Questi acidi si possono quasi tutti preparare secondo il metodo di Piloty; noi però abbiamo trovato più conveniente impiegare invece di una soluzione alcoolica di idrossilammina ed etilato sodico, una base che fosse capace di salificare un acido energico quale il cloridrico che si pone in libertà e d'altra parte forse così debole da non scindere gli acidi solfoidrossammici che si formano. La piridina corrisponde assai bene allo scopo; in tal modo queste preparazioni sono più rapide, meno costose ed i rendimenti molto maggiori.

zolsolfinico e nitrossile, nel caso dell' acido α-naftalinsolfoidrossammico assieme al nitrossile si forma l' acido β-naftalinsolfinico:

$$C_{10}H_7\begin{cases}(\alpha)\ SO_2 . NH . OH\\ \end{cases} = NOH + C_{10}H_7\begin{cases}\\(\beta)\ SO_2H\end{cases}$$

Questa trasposizione del residuo dell' acido solforico è tanto più rimarchevole inquantochè si compie in modo istantaneo, a temperatura ordinaria ed in soluzione acquosa diluitissima. In modo identico, rispetto agli alcali, si comportano gli acidi solfoidrossammici nei quali i due atomi di idrogeno del residuo dell' idrossilammina sono sostituiti con radicali acidi, quali p. e.:

$$C_6H_5 . SO_2 . N\begin{cases}O . CO . CH_3\\ CO . CH_3\end{cases} \quad e \quad C_{10}H_7 . SO_2 . N\begin{cases}O . CO . CH_3\\ CO . CH_3\end{cases}$$

per azione degli alcali queste sostanze vengono dapprima saponificate, si rigenera l' acido solfoidrossammico primitivo, il quale viene tosto scisso nel modo prima accennato. Come è noto, anche l' acido dibenzidrossammico per azione degli alcali viene facilmente saponificato in acido benzoico ed acido benzidrossammico.

Scissioni analoghe presentano anche gli acidi preparati da Piloty:

$$C_6H_5 . SO_2 . N\begin{cases}C_6H_5\\ OH\end{cases} \quad e \quad C_6H_5 . SO_2 . N\begin{cases}CH_2 . C_6H_5\\ OH\end{cases}$$

Il primo fornisce acido benzolsolfinico e nitrosobenzolo, che in questo caso corrisponde al nitrossile:

$$\begin{matrix}C_6H_5 . SO_2 . N(OH)C_6H_5\\ \quad H \quad\ OH\end{matrix} \longrightarrow C_6H_5 . SO_2H + C_6H_5N(OH)_2 \longrightarrow C_6H_5 . NO$$

Il secondo fornisce un nitrosotoluolo, il quale naturalmente tosto si trasforma nell' ossima della belzaldeide:

$$C_6H_5 . CH_2 . NO \longrightarrow C_6H_5 . CH = NOH$$

Tali scissioni si possono anche interpretare ammettendo che tutti questi composti, in soluzione alcalina, reagiscano secondo la forma tautomera:

$$R . SO(OH) = NOH ,$$

un comportamento molto differente si osserva invece per gli acidi idrossammici della forma:

$$R . SO_2 . NH(OR_1) ,$$

dove R_1 indica un residuo alcoolico.

Noi abbiamo preso in esame l'acido

$$C_6H_5 . SO_2 . NH . O . CH_2 . C_6H_5 .$$

Esso si scioglie negli alcali e dalla soluzione si precipita inalterato anche dopo prolungato riscaldamento. Questo fatto dimostra che affinchè gli alcali determinino la scissione è necessario che sia libero l'atomo di idrogeno che nell'idrossilammina appartiene all'ossidrile. Ancora non ci è ben chiaro a qual ragione sia da attribuirsi tale comportamento; non ci sembra però improbabile che l'ossigeno ossimmico, in presenza di alcali, assuma la forma di un ossido:

$$>N(OH) \longrightarrow >N\begin{matrix}\diagup\!\!\!= O \\ \diagdown\ H\end{matrix} \longrightarrow >NH(OH)_2$$

L'idrossilammina stessa, come è noto, in soluzione alcalina si comporta in tutt'altro modo che in soluzione acida; a questo riguardo ci basti ricordare che il cloridrato di idrossilammina riduce a ferroso il cloruro ferrico, mentre invece, in soluzione alcalina ossida l'idrato ferroso a ferrico (Haber, Berichte, XXIX, 2444). Il prodotto si comporta quindi ad un dipresso come una ammide, e le proprietà acide sono senza dubbio dovute all'atomo di idrogeno unito all'azoto, che probabilmente passa al residuo SO_2.

$$C_6H_5 . SO_2 . NH(OCH_2 . C_6H_5) \longrightarrow C_6H_5 . SO(OH) = N(OCH_2 . C_6H_5$$

Per azione ulteriore del cloruro benzolsolfonico sopra l'acido benzolsolfoidrossammico, ovvero per ossidazione moderata di quest'ultimo, Piloty ha preparato l'acido dibenzolsolfoidrossammico.

$$\begin{matrix} C_6H_5 . SO_2 \diagdown \\ \qquad\qquad\quad >N . OH \\ C_6H_5 . SO_2 \diagup \end{matrix}$$

il quale è perfettamente identico ad un acido che Koenigs (1) ha ottenuto facendo reagire l'acido nitroso sopra l'acido benzolsolfinico. Evidentemente in questo caso l'acido nitroso reagisce come triossiammoniaca $N(OH)_3$ e la reazione è analoga a quella che si compie fra solfiti e nitriti.

Siccome le esperienze fatte da Koenigs sopra questo acido interessante sono incomplete, noi abbiamo giudicato opportuno di sottoporlo ad uno studio ulteriore allo scopo di determinare in modo sicuro il suo comportamento e di porre in rilievo le analogie che passano fra esso e l'acido benzolsolfoidrossammico. Koenigs e Piloty assegnano all'acido da loro ottenuto il punto di fusione 109°; noi, invece, sopra un campione purissimo ed analizzato, preparato secondo le loro indicazioni, abbiamo trovato che fonde a 126°; non sappiamo a qual fatto attribuire tale differenza.

(1) Berl. Berichte XI, 615.

Secondo Koenigs, l'acido dibenzolsolfoidrossammico per azione degli alcali si scinde di nuovo in acido benzolsolfinico ed acido nitroso; egli non descrive l'esperienza ma noi abbiamo potuto convincerci in modo diretto trattando la soluzione alcalina dell'acido con cloruro di bario; precipita subito il sale baritico dell'acido benzolsolfinico ed il nitrito rimane in soluzione. Per trattamento con acido solforico Koenigs ottiene un liquido che ha proprietà riducenti; noi abbiamo trovato che tale proprietà è dovuta alla formazione di idrossilammina che noi riuscimmo ad identificare trasformandola nell'ossima del piperonalio. Anche l'acido benzolsolfoidrossammico di Piloty per trattamento con acido fornisce idrossilammina che identificammo del pari convertendola nell'ossima del piperonalio.

Sebbene il comportamento degli acidi benzosolfoidrossammico e dibenzosolfoidrossammico rispetto agli alcali sembri a tutta prima alquanto diverso, esaminando attentamente si osserva che esso presenta la più stretta analogia. E questa analogia si rende ancora più manifesta quando si prenda in esame il corrispondente derivato della naftalina

$$\begin{matrix} C_{10}H_7\,(\alpha)\,SO_2 \\ C_{10}H_7\,(\alpha)\,SO_2 \end{matrix}\!\!>\!\!NOH$$

che preparammo per azione dell'acido nitroso sopra l'acido α-naftalinsolfinico. Il prodotto fonde a 102°. Anche questo acido, al pari dell'acido dibenzosolfoidrossammico, quando venga trattato con alcali si scinde in acido nitroso ed in un acido solfinico; però non si forma l'acido α-naftalinsolfinico da cui si è partiti, ma bensì l'acido β-naftalinsolfinico in modo precisamente identico come dall'acido α-naftalinsolfoidrossammico per azione degli alcali si ottiene acido β-naftalinsolfinico. Acidificando nuovamente il liquido, l'acido β-naftalinsolfinico formatosi reagisce a sua volta con l'acido nitroso per dare origine ad un acido isomero a quello da cui si è partiti, l'acido di-β-naftalinsolfoidrossammico che fonde a 115°:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7\,(\beta)\,.\,SO_2 \\ C_{10}H_7\,(\beta)\,.\,SO_2 \end{matrix}\!\!>\!\!NOH$$

Anche in questo caso, nella scissione alcalina, *all'atomo di azoto per ogni residuo solfonico che si stacca si porta un residuo ossidrile:*

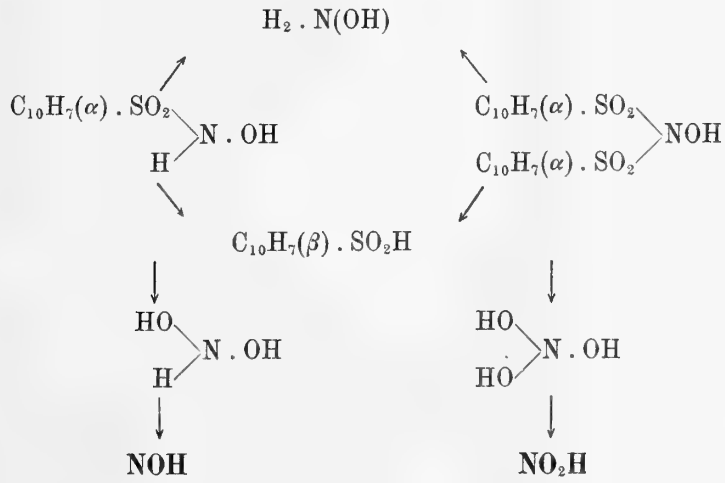
Il seguente schema chiarisce meglio le reazioni:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2H \\ C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2H \end{matrix} + NO_2H = \begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2 \\ C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2 \end{matrix}\!\!>\!\!NOH + H_2O$$

$$\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2 \\ C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2 \end{matrix}\!\!>\!\!NOH + H_2O = \begin{matrix} C_{10}H_7(\beta)\,.\,SO_2H \\ C_{10}H_7(\beta)\,.\,SO_2H \end{matrix} + \begin{matrix} HO \\ HO \end{matrix}\!\!>\!\!N\,.\,OH$$

$$N(OH)_3 = NO_2H + H_2O$$

La stessa reazione e la stessa trasposizione molecolare del residuo solforico avviene come si è detto anche nella scissione dell' acido naftalin-α-solfoidrossammico; il seguente specchietto illustra bene il completo parallelismo che esiste fra queste interessanti trasformazioni:



Il nitrossile (biossiammoniaca) e l' acido nitroso (triossiammoniaca) si formano quindi per mezzo di reazioni analoghe e che si compiono nell' identico modo. Diremo infine che anche la tribenzolsolfoidrossilammina di Koenigs

$$(C_6H_5 . SO_2)_3NO$$

può subire scissioni che con le precedenti presentano grande rassomiglianza.

Per azione degli acidi fornisce idrossilammina che, come nei casi precedenti, noi abbiamo caratterizzata trasformandola nell' ossima del piperonalio:

$$(C_6H_5SO_3)_3NO \longrightarrow H_3NO \longrightarrow H_2N . OH$$

Per azione degli alcali invece fornisce acido nitrico. In questo caso non ci fu possibile isolare l' acido benzolsolfinico che contemporaneamente si forma, giacchè dovendo insistere nell' ebollizione con alcali non si ottengono che i i prodotti di decomposizione. Anche in questa reazione, ad ogni residuo solfinico che si stacca, all' azoto si porta un ossidrile:

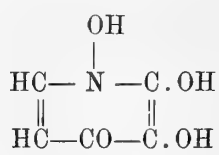
$$(C_6H_5 . SO_2)_3NO \longrightarrow (HO)_3NO \longrightarrow \mathbf{NO_3H}$$

Reciprocamente la tribenzolsolfoidrossilammina si può preparare per azione diretta dell' acido benzolsolfinico sopra l' acido nitrico.

Il nitrossile, l' acido nitroso e l' acido nitrico si formano quindi per mezzo di reazioni analoghe.

Chimica. — *Azione dell'idrossilamina sull'etere dimetil- pirondicarbonico.* Nota del dott. Carlo Palazzo, presentata dal Socio E. Paternò.

Riprendendo lo studio dei derivati azotati dell'acido meconico, la costituzione di taluni dei quali rimaneva oscura, nonostante le diligenti ricerche di Ost (1), il prof. Peratoner si è fermato nel suo ultimo lavoro principalmente all'acido ossi- piromecazonico (2), o tetrossipiridina di Ost, ed, esaminandone il comportamento chimico, studiandone la genesi dall'acido nitroso-piromeconico, di cui con una precedente ricerca aveva chiarito la natura di isonitroso- composto (3), ha attribuito a quell'acido la costituzione



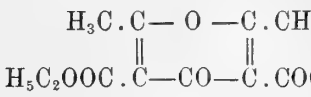
secondo la quale è da riguardarsi come un « ossipiridone » con l'azoto ossimidico nel nucleo.

Questa nuova interpretazione farebbe intravedere la possibilità di passare facilmente, e con una reazione generale, cioè per mezzo dell'idrossilamina, dai composti pironici ad N- ossi- piridoni per sostituzione dell'ossigeno del nucleo mediante il gruppo ossimidico. Però risulta dalla letteratura relativa che l'idrossilamina lascia inalterati parecchi derivati del pirone [acido chelidonico (4), acidi comenico e piromeconico (5), dimetil- γ- pirone (6)] e fu questa appunto la ragione per cui, prima delle sintesi del pirone, si dubitasse della presenza del carbonile nel suo nucleo.

Ad ulteriore conferma della formula soprariferita, ho voluto tentare di preparare composti di costituzione analoga, e per ciò ho ripreso, dietro invito del prof. Peratoner, lo studio della reazione fra idrossilamina e composti

(1) Journal f. prakt. Chemie 19, 177.
(2) Questi Rendiconti, seduta del 20 aprile 1902.
(3) Questi Rendiconti, seduta del 16 marzo 1902.
(4) Be 17, I, 1061.
(5) Be 17, II, 2087.
(6) A. 257, 273.

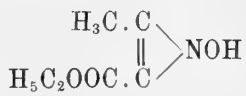
pironici, scegliendo come primo termine l'etere dimetil- piron- dicarbonico, o etere di Conrad e Gushzeit (1):



I risultati di questa ricerca, che comunico brevemente, furono del tutto inattesi.

L'etere cennato reagisce bensì con l'idrossilamina, però deve contemporaneamente subire una scissione. Infatti, come si rileva dai risultati analitici sottoriferiti, al prodotto della reazione si deve attribuire la formula $C_6H_9O_3N$; non è purtroppo altrettanto facile, almeno pel momento, assegnargli invece con tutta sicurezza una formula di struttura.

Dal suo comportamento, specialmente rispetto al permanganato, al bromo, al cloruro ferrico, al nitrato di argento, all'acido jodidrico nella determinazione di ossietile, si sarebbe indotti a preferire la formula seguente che meglio si accorda con i fatti osservati:



Tuttavia dò per ora questa costituzione con riserva e mi propongo di chiarirla con ulteriori ricerche, nelle quali spero di poter rintracciare anche gli altri prodotti che nella scissione dell'etere di Conrad e Gushzeit si devono formare contemporaneamente. Però, richiedendo la preparazione del materiale alquanto tempo, mi preme intanto di prendere data del lavoro.

Il seguente procedimento si mostrò in diverse esperienze il più soddisfacente.

L'etere di Conrad e Gushzeit in fini cristalli, o finamente polverato, si mescola con una soluzione di due molecole di idrossilamina ed una di carbonato sodico, fatta a caldo con una minima quantità di acqua, ed il miscuglio, portato in bagno-maria a 100°, si agita vivamente dall'esterno; in tal modo l'etere si fonde rapidamente e reagisce con l'idrossilamina. Infatti, alcuni minuti dopo, si separano dal liquido delle goccioline oleose, giallo-chiare, che, ben tosto, per il raffreddamento di esso sotto agitazione, si concretano in una massa mammillonare gialla con una tinta rossa. Questa, separata dal liquido, oramai trascurabile, viene lavata su di un filtro con poca acqua, spremuta alla pompa e mantenuta quindi sopra acido solforico — possibilmente al riparo dalla luce — fino a completa secchezza. Si esaurisce allora con benzolo per spogliarla dell'etere eventualmente inalterato ed il residuo

(1) Be 19, I, 22 e Be 20, I, 151.

indisciolto, nuovamente seccato, si cristallizza dall'acetone secco bollente. Si ottiene così una sostanza perfettamente bianca, di splendore sericeo, che nemmeno per ripetute cristallizzazioni dall'acetone o per ripetuti trattamenti con alcool assoluto può aversi assolutamente scevra di residuo.

Delle esperienze poste al fine di averla in uno stato di assoluta purezza e soprattutto esente di residuo fisso, mostrarono che si raggiunge benissimo l'intento quando la si cristallizzi dall'acido cloridrico caldo, di discreta concentrazione; infatti la sostanza vi si scioglie completamente e ne cristallizza per il solo raffreddamento, mentre nelle acque madri rimane disciolta la totalità del sodio. Cosicchè se la sostanza separata da queste si lava sopra un filtro con poca acqua, si ottiene perfettamente pura.

I) gr. 0,1928 di sostanza fornirono cmc. 16,3 di azoto, misurati a 22° ed a 763 mm.

Su 100 parti:

Trovato	Calcolato per le formule		
	$C_{13}H_{17}O_6N$	$C_{13}H_{18}O_6N_2$	$(C_6H_9O_3N)_n$
5,59	4,94	9,39	9,79

II) gr. 0,1925 di sostanza fornirono gr. 0,3523 di anidride carbonica e gr. 0,1224 di acqua.

III) gr. 0,1956 di sostanza fornirono gr. 0,3654 di anidride carbonica e gr. 0,1148 di acqua.

Su 100 parti:

	Trovato		Calcolato per le formule	
	I	II	$C_{13}H_{18}O_6N_2$	$(C_6H_9O_3N)_n$
Carbonio:	49,91	50,09	52,31	50,31
Idrogeno:	7,06	6,52	6,04	6,36

Delle diverse formule imaginabili è da preferirsi evidentemente quella semplice $C_6H_9O_3N$, infatti:

IV) gr. 0,1872 di sostanza abbassarono di 0°,49 il punto di congelamento di gr. 10,503 di acido acetico glaciale, donde, coefficiente di abbassamento = 0,279.

Grandezza molecolare . . . . { Trovata 139
Calcolata per $C_6H_9O_3N$. 142

Allo stato di perfetta purezza il prodotto della reazione fra l'idrossilamina e l'etere dimetil- pirondicarbonico è una sostanza bianca formata da aghetti lucenti che contengono acqua di cristallizzazione. Il soggiorno sopra acido solforico nel vuoto è però sufficiente perchè questa vada perduta; la sostanza si trasforma allora in una massa granulare bianchissima, porosa, friabile. Questa si fonde a 164° colorandosi un poco e, immediatamente dopo la fusione, si decompone tumultuariamente lasciando un abbondante deposito

di carbone, il quale brucia però abbastanza bene. È solubile nell'acqua, nell'acetone, nell'acido cloridrico e nell'acido acetico, soprattutto a caldo; altri solventi non si cercarono per economia di sostanza. La soluzione acquosa ha debole reazione acida, sapore nettamente amaro, di base piridica; si colora in rosso sangue con una traccia di cloruro ferrico. Col nitrato di argento dà un precipitato bianco, voluminoso, insolubile in benzolo, alcool, acetone, etere, acido acetico, anche a caldo, solubilissimo in ammoniaca. Questo precipitato è abbastanza stabile alla luce diffusa e si fa maneggiare comodamente; alla luce diretta, invece, si colora rapidamente in violetto; riscaldato, si decompone tranquillamente senza prima fondere, e, calcinato in crogiuolo di porcellana, lascia una spugna di argento molto lucente.

Gr. 0,1965 di questo composto fornirono gr. 0,0746 di argento metallico.

Su 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_6H_8AgO_3N + 2\,aq$
Argento:	37,96	37,76

Se ne deduce che un solo atomo di idrogeno fu sostituito. La sostanza $C_6H_9O_3N$ decolora il permanganato già a freddo, come l'originario etere, ed in soluzione acetica assorbisce anche bromo.

Trattata a caldo con acido jodidrico, svolge, quasi sull'istante, joduro di etile.

Gr. 0,2500 di sostanza fornirono, alla determinazione dell'ossietile, col metodo di Zeisel, gr. 0,3902 di joduro di argento, corrispondente a gr. 0,0749 di ossietile.

Su 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_4O_2N.OC_3H_5$
Ossitile:	29,96	31,46

Trattata con acido cloridrico, diluito o concentrato, non elimina idrossilamina nemmeno in tubi chiusi.

Chimica fisica. — *Sulla formazione di cristalli misti per sublimazione.* Nota di G. Bruni e M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician [1].

Tutti i cristalli misti che furono fin qui studiati vennero ottenuti da miscele liquide, e cioè o da soluzioni delle due sostanze isomorfe in un terzo corpo che funzioni da solvente, oppure da miscele binarie contenenti soltanto i due componenti allo stato fuso. Sono sopratutto i fenomeni di equilibrio eterogeneo fra queste soluzioni liquide e le soluzioni solide che ne prendono origine, che furono l'oggetto principale delle ricerche fin qui eseguite.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale dell'Università di Bologna.

Che nei casi di isodimorfismo cristalli misti si possano formare da altri cristalli misti senza passare per altri stati d'aggregazione, è noto, ed i fatti relativi vennero studiati da molti autori e sopratutto nel modo più esauriente da Bakhuis Roozeboom. Che però i cristalli misti possano formarsi direttamente dai componenti allo stato solido, è, per quanto teoricamente possibile, reso assai difficile dall'estrema lentezza della diffusione fra corpi solidi.

Resta ancora un terzo modo possibile di produzione delle soluzioni solide, e cioè passando attraverso ad una fase gassosa. Come già ebbe ad osservare uno di noi (1), la formazione di cristalli misti per sublimazione, per quanto debba apparire a priori verosimile e probabile, non venne finora constatata.

Ci è sembrato perciò non privo d'interesse l'eseguire talune ricerche a questo riguardo. È ovvio però come esse presentino varie e non lievi difficoltà. Il sottoporre alla sublimazione una miscela dei due corpi isomorfi e l'analizzare i cristalli sublimati, non può infatti esser ritenuto sufficiente; ma occorre insieme verificare che questi cristalli siano omogenei. Ora trattandosi di corpi aventi la stessa forma cristallina, anche un esame microscopico non può nella massima parte dei casi giovare. Come il mezzo più opportuno per risolvere questa difficoltà, abbiamo pensato di ricorrere all'artificio usato già da I. W. Retgers nello studio dell'isomorfismo, cioè alla formazione di cristalli misti colorati risultanti dall'unione di due sostanze isomorfe, di cui una sola colorata e l'altra incolora. In tal caso può assai bene essere osservato che i cristalli misti sono di un colore omogeneo sempre più pallido di quello del componente colorato puro.

Nelle varie esperienze da noi eseguite (e che ci hanno condotto alla constatazione della formazione di cristalli misti per sublimazione) procedemmo nel modo seguente.

La miscela delle sostanze da studiare veniva sottoposta a fusione; la massa fusa polverizzata era introdotta in un tubo di vetro del diametro di circa 1 $^1/_2$ cm. e terminato da un rigonfiamento sferico, avendo cura che la sostanza stesse tutta in quest'ultimo e non ne rimanesse aderente alle pareti del tubo. In questo recipiente (la cui estremità superiore veniva prima affilata) si provocava mediante una buona pompa ad acqua una forte rarefazione (da 12-14 mm. di mercurio), e quindi lo si chiudeva alla lampada. Il tutto veniva riscaldato in un bagno mantenuto costante ad una temperatura inferiore al punto di fusione più basso possibile per le miscele impiegate. Quando si era raccolta una quantità di cristalli sufficiente, ma non eccessiva, per non alterare troppo sensibilmente la composizione della miscela primitiva, si rompeva il tubo e si raccoglievano i cristalli sublimati che venivano esaminati con la lente ed al microscopio onde constatarne l'omogeneità,

(1) G. Bruni, *Ueber feste Lösungen.* Ahrens's Sammlung. Band VI, Heft 12, pag. 5.

e quindi sottoposti all'analisi. Come sostanze su cui sperimentare scegliemmo dapprima due corpi organici di cui uno di noi mostrò già il completo isomorfismo e la capacità a dare cristalli misti in tutti i rapporti, l'azobenzolo e lo stilbene. Introducemmo perciò in un tubo come quello sopra descritto una miscela di gr. 1,01 di azobenzolo e gr. 1,02 di stilbene, e riscaldammo in bagno d'acqua a 65° (p. fus. dell'azobenzolo 69°, dello stilbene 124°).

I cristalli sublimati avevano un aspetto del tutto omogeneo, ed un colore alquanto più pallido di quello rosso intenso dell'azobenzolo puro. Per la troppo lenta sublimazione dei due corpi, non avemmo cristalli misti in quantità sufficiente per una analisi; però il loro punto di fusione trovato a 75°-76° dimostra che essi contenevano stilbene, per quanto in proporzione notevolmente minore della miscela primitiva.

Volendo però sperimentare su sostanze che sublimassero più facilmente e si prestassero bene ad una analisi, ricorremmo allo studio delle miscele di bromuro e ioduro mercurico. Come è noto, il ioduro mercurico cristallizza in due forme: una rossa stabile a bassa temperatura, ed una gialla che si forma dalla prima a 126°. Il bromuro dà cristalli incolori isomorfi colla modificazione gialla del ioduro. Possono esistere cristalli misti delle due forme, ed i relativi fenomeni di formazione dalle miscele fuse e di trasformazione allotropica furono studiati in modo completo da W. Reinders (1) nel laboratorio di Roozeboom. Dopo esserci assicurati con talune esperienze preliminari qualitative della formazione di cristalli misti per sublimazione, eseguimmo una serie di quattro esperienze su miscele di composizione diversa (dal 20 all'80 % circa di HgI_2). I tubi venivano scaldati in bagno di lega a 150°. La sublimazione avveniva assai rapidamente, e dopo una giornata si poteva raccogliere intorno ad un grammo e mezzo di cristalli misti sublimati. Questi venivano analizzati determinando il mercurio allo stato di solfuro; dalla percentuale di mercurio si calcolava la proporzione di $HgBr_2$ e HgI_2 in essi contenuta. I cristalli ottenuti erano sempre omogonei e colorati in giallo più o meno intenso secondo la quantità di ioduro presenti in essi. Essi restarono gialli anche dopo raffreddamento, e dopo essere stati conservati freddi per tre settimane: ciò che sta in buon accordo colle esperienze di Reinders. Questo fatto dimostra pure all'evidenza trattarsi di cristalli misti e non di miscele meccaniche, poichè i cristalli di ioduro sublimati nelle stesse condizioni, cominciarono a diventare rossi già pochi minuti dopo il raffreddamento. I cristalli misti così ottenuti contenevano sempre meno ioduro che non i primitivi, ciò che corrisponde ad una minore volatilità del ioduro in confronto del bromuro. Il rapporto fra le due concentrazioni ci dà anzi una misura del coefficiente di ripartizione delle sostanze impiegate fra la miscela solida riscaldata e il vapore misto che è con essa in equilibrio.

(1) Zeitschr. fur physik. Chemie XXXII, 494.

Eccone ora i risultati numerici:

I. Si riscaldò una miscela di gr. 9,6040 di $HgBr_2$ e gr. 2,3892 di HgI_2. Si sottoposero all'analisi gr. 0,9564 di cristalli sublimati, da cui si ebbero gr. 0,5932 di HgS.

II. Miscela primitiva: gr. 6,2934 di $HgBr_2$, gr. 4,8084 di HgI_2. Cristalli analizzati gr. 0,9716: HgS ottenuto gr. 0,5796.

III. Miscela primitiva: gr. 5,6452 di $HgBr_2$, gr. 8,4881 di HgI_2. Cristalli analizzati gr. 1,1068; HgS ottenuto gr. 0,6394.

IV. Miscela primitiva: gr. 2,4076 di $HgBr_2$, gr. 9,6492 di HgI_2. Cristalli analizzati gr. 1 0042; HgS ottenuto gr. 0,5519.

Da questi risultati si calcolano le concentrazioni ed i coefficienti di ripartizione esposti nelle tabelle seguenti, che vengono dati riferendoli nella prima a rapporti ponderali, nella seconda a rapporti molecolari.

	Ioduro mercurico in 100 parti in peso		
	della miscela primitiva (C_0)	dei cristalli sublimati (C_1)	Coefficiente di ripartizione $\alpha = \frac{C_1}{C_0}$
I	19,92	18,31	0,92
II	43,31	36,52	0,84
III	60,06	50,44	0,84
IV	80,02	71,74	0,90

	Molecole di ioduro mercurico in 100 molecole		
	della miscela primitiva (C'_0)	dei cristalli sublimati (C'_1)	Coefficiente di ripartizione $\alpha' = \frac{C'_1}{C'_0}$
I	15,89	14,96	0,94
II	37,73	31,35	0,85
III	51,95	44,67	0,86
IV	76,07	69,76	0,92

Oltre a queste esperienze ne abbiamo pure eseguite altre due sottoponendo a sublimazione miscele di ioduro mercurico col corrispondente cloruro, che è pure isomorfo colla modificazione gialla del primo. Abbiamo infatti constatata la formazione di cristalli misti contenenti meno ioduro di primitivi. Siccome però uno studio completo sulla formazione e sui limiti d'esistenza di questi cristalli misti in base alle moderne teorie non fu ancora fatto, ci riserviamo di dare i risultati numerici quando, come ci proponiamo di fare, avremo completamente studiato questo argomento. Vogliamo però fin d'ora far notare che la formazione di cristalli misti di cloruro e ioduro mercurico dalle

loro soluzioni acquose comuni, fu già osservata da varî autori, taluni dei quali considerarono però questi cristalli misti come combinazioni molecolari delle formule $HgI_2 . HgCl_2$ e $HgI_2 . 2HgCl_2$. Invece F. Selmi fino dal 1844, esponeva le sue osservazioni in proposito (1) nel modo seguente: « Disciogliendo il biioduro di mercurio col bicloruro dello stesso metallo in acqua, si ha un liquido il quale concentrato fornisce cristalli colorati in giallo molto disparatamente, e facili in appresso a rosseggiare; le acque madri collo svaporamento danno nuovi cristalli, che sono scoloriti, ma tendenti a farsi rossigni, le ultime acque madri dei quali producono una terza qualità di cristalli, scoloriti ed inetti ad arrossare; negli ultimi cristalli si contiene meno di biioduro di mercurio che nei secondi, ed in questi meno che nei primi ». Riguardo all'interpretazione di questi fenomeni egli osserva più innanzi (pag. 132-133) che non si possono spiegare coll'ammissione di una combinazione chimica fra i due sali, ma che si deve invece ammettere trattarsi di una formazione di cristalli misti fra sostanze isomorfe. E anzi veramente da meravigliarsi come, dopo osservazioni di una precisione e acutezza mirabili per lo stato delle cognizioni di quell'epoca, si trovino in trattati di chimica più moderni (2), ed anche recentissimi (3), riportati i pretesi cloroioduri di mercurio come veri composti chimici.

Questo metodo potrà essere vantaggiosamente impiegato a constatare la formazione di cristalli misti in varî casi in cui altri metodi non possono essere impiegati: così ad esempio, evidentemente per le sostanze che sublimino senza fondere, o che non si sciolgano nei solventi comuni, o lo facciano soltanto alterandosi, e presenta inoltre il vantaggio di poter lavorare con quantità assai piccole di sostanza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Vicepresidente Blaserna presenta il 1° volume delle *Opere matematiche* di Eugenio Beltrami, e dà comunicazione di una lettera del prof. Alberto Tonelli, Preside della Facoltà di scienze dell'Università di Roma, che a nome della Facoltà fa omaggio all'Accademia del volume anzidetto.

Il Vicepresidente Blaserna aggiunge che questo dono riescirà molto gradito all'Accademia, la quale ricorda sempre i grandi meriti scientifici e personali del suo compianto ed illustre Presidente; e fa inoltre notare la grande delicatezza del prof. Tonelli, il quale ha voluto che l'Accademia ricevesse la prima copia edita delle *Opere* del Beltrami.

(1) *Studi sperimentali e teorici di chimica molecolare*. Fascicoli 3° e 4°, pag. 117.
(2) Gmelin Kraut, Anorganische Chemie, 6te Aufl. 1875. Band III, pag. 890.
(3) Dammer, Anorganische Chemie. 2 Band. 2 Theil, pag. 872.

V. C.

INDICE DEL VOLUME XI, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1902 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

Agamennone. « Sopra un sismografo per forti terremoti ». 116.

Amaldi. « Sulle superficie che contengono sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici ». 198; 237.

Angeli, Angelico e Scurti. « Ricerche sopra alcuni acidi idrossamici ». 555.

Angelico. V. *Angeli*.

B

Bellucci. « Sul tetrajoduro di platino ». 8.

Bertolo. « Riduzione dell'artemisina con cloruro stannoso » 439; 486.

Betocchi. Fa omaggio di alcune pubblicazioni del prof. *Berchet* e ne parla. 298.

Bianchi. « Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann ». 3.

— « Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie ». 265.

— « Sulla deformazione delle superficie di rotazione ». 453.

Blaserna (Vicepresidente). Annuncia che alla seduta assistono i Socî stranieri *Lepsius* e *Sabatier*. 347; *Newcomb*. 441.

— Partecipa un invito dell'« Owens College » di Manchester. 45.

Blaserna (Vicepresidente). Partecipa un invito per la celebrazione del 3° centenario della Biblioteca Bodleiana dell'Università di Oxford. 263.

— Aggiunge alcune notizie a quelle date dal Socio *Mosso* sul Laboratorio di Fisiologia annesso all'Osservatorio Margherita sul Monte Rosa, e propone che il Laboratorio sia raccomandato all'Associazione internazionale delle Accademie. 400.

— Dà comunicazione dei lavori presentati per concorrere ai premi Reali per la *Mineralogia e Geologia*, e per la *Matematica*, e a quelli del Ministero della Pubblica Istruzione per le *Scienze matematiche*, del 1901. 42; 103.

— Comunica il programma d'un concorso a premio fondato da *A. Carnegie*. 45.

— « Commemorazione del Socio straniero *A. Cornu* » 347.

Boggio. « Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poliarmoniche nell'area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno ». 285; 303.

— « Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a due variabili indipendenti ». 513.

Bortolotti. « Nota preventiva sulla funzione delle cellule cloralogene nei gen.

Lumbricus ed Allolobophora ». 449.

Bruni. « Sulla distinzione fra polimorfismo ed isomeria chimica ». 386.

— e Meyerhoffer. « Sugli equilibrî eterogenei fra cristalli misti di idrati salini isomorfi ». 185.

— e Padoa. « Sull'esistenza di corpi racemici in soluzione ». 212.

— « Sulla formazione di cristalli misti per sublimazione ». 565.

Burgatti. « Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema hamiltoniano ». 309.

C

Capellini. Fa omaggio di una sua pubblicazione. 499.

Carpini. « Determinazione del potenziale elettro-statico mediante la deformazione di una superficie liquida ». 65.

Celoria. « Considerazioni sull'insegnamento dell'Astronomia nelle Università italiane ». 351.

Cerruti (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti. 137; 220; 299; 401; 499.

— Presenta le pubblicazioni dei Socî: *Abetti.* 137; *Borzì.* 297; *D'Achiardi.* 499; *Celoria.* 398; *Fischer.* 297; *Foà, Gaudry, Helmert.* 220; *Klein,* 297; *Lapparent, Lockyer.* 398; *Maffucci.* 297; *Pflueger.* 220, 297; *Pickering.* 499; *Righi.* 138; *Rosenbusch.* 297; *Taramelli.* 220, 297; *Virchow.* 297; *Weingarten, Wild.* 220; e una pubblicazione del prof. *G. Loria.* 137.

— Presenta il vol. III degli « Atti della Società per gli studî della malaria ». 297; un volume pubblicato in onore del Corrisp. *Albertoni.* 398; gli Atti dell'Associazione britannica per il progresso della scienza, e del Congresso internazionale degli Ingegneri, del 1901. 398; un volume pubblicato in onore del Socio straniero *Berthelot.* 499.

— Presenta un piego suggellato del sig. *Sauve.* 190.

Cerruti (Segretario). « Commemorazione del Socio straniero *E. L. Fuchs* ». 397.

Chistoni. « Misure pireliometriche fatte a Sestola nell'estate del 1901 ». 77.

— « Misure pireliometriche fatte sul monte Cimone nell'estate del 1901 ». 479. 539.

Ciamician e Silber. « Azioni chimiche della luce ». 277.

Coggi. « Nuove ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini ». 289; 338.

Contarini. « Sul problema generale della sismografia ». 380; 433; 472; 519.

Cornu. Annuncio della sua morte e sua commemorazione. 347.

D

D'Achiardi. « Thomsonite e apofillite di Schiket nella Colonia Eritrea ». 251.

Dainelli. « Stato attuale dei ghiacciai del Monte Rosa ». 24.

Daniele. « Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano ». 285; 362; 427.

— « Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie » 519.

De Angelis d'Ossat. « Appunti sopra alcuni minerali di Casal di Pari (Comune *Campagnatico,* provincia *Grosseto* ». 548.

De Stefani. « I terreni terziarî della provincia di Roma. I. Eocene ». 463; 508.

— e Dainelli. « I terreni eocenici presso Bribir in Croazia ». 105; 154.

Dini. « Una estensione del metodo di Eulero-Laplace per l'integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali del secondo ordine ». 105.

E

Emery « La Zoologia secondo il nuovo regolamento delle facoltà di scienze ». 503.

Engelmann. « Micro-fotografie di fibre muscolari a luce semplice e polarizzata, allo stato di riposo e di contrazione ». 284.

Enriques. « Ricerche osmotiche sugli Infusorii ». 289; 340.
— « Ricerche osmotiche sui Protozoi delle infusioni ». 392.
— « Ricerche osmotiche sulla Limnaea stagnalis ». 440.
— « Osmosi ed assorbimento nelle reazioni a soluzioni anisotoniche (Protozoi e Limnaea stagnalis) ». 495.

F

Ferrero. Offre una pubblicazione della R. Commissione geodetica italiana e ne discorre. 298.
Fubini. « Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razicnali » 113.
Fuchs. Annuncio della sua morte e sua commemorazione. 397.

G

Gemmellaro. « Sul rinvenimento di un teschio di Squalodontide nel calcare bituminifero di Ragusa in Sicilia ». 462.
Gosio. « Sulla trasmissibilità della peste bubbonica ai pipistrelli ». 397; 448.
Grablovitz. « Propagazione dei terremoti ». 122; 177.
Grassi (Segretario agg.). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti. 45.
— Presenta le pubblicazioni dei Socî: *Berthelot, Langley, Lockyer, Pflueger*. 39; e quelle dei signori: *Bigourdan* e *Goppelsroeder*. 39.
— Fa particolare menzione del vol. XII delle « Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy ». 39.
Guglielmo. « Sulla misura delle variazioni e del valore assoluto della pressione atmosferica mediante il ludione ». 70.

L

Lepsius. Assiste alla seduta accademica. 347.
Levi-Civita. « Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo ». 163; 191; 228.
Lo Monaco e Panichi L. « Sul fenomeno dell'agglutinazione nel sangue dei malarici ». 30; 91.

M

Majorana. « Su due nuovi fenomeni magneto-ottici osservati normalmente alle linee di forza ». 374.
— « Sul metodo e sulle sostanze da adoperarsi, per osservare la birifrangenza magnetica ». 463.
— « Sulla birifrangenza magnesiaca e su altri fenomeni che l'accompagnano ». 531.
Manasse. « Rocce trachitiche del cratere di Fondo Niccio nei campi Flegrei. I. Jalotrachite nera ad augite ed egirina ». 85.
— « II. Jalotrachite rossa e grigio-cinerea ad augite ed egirina e tufo giallo ». 125.
— « III. Inclusi nel tufo e nelle scorie ». 208.
Marcacci. « Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua ». 286; 324.
Marcolongo. « Le deformazioni del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti ». 286; 318.
Martelli. « I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia ». 289; 334.
Meyerhoffer. V. *Bruni*.
Millosevich. Offre, a nome del Socio *Tacchini*, il volume delle « Memorie del R. Osservatorio del Collegio Romano » e ne parla. 220.
— « Osservazioni del nuovo pianetino HU 1902, fatte coll'equatoriale di 38 cm. ». 276.
Mingazzini. « Il mollusco contagioso negli Anfibi ». 258.
Montesano. « Su alcune alterazioni dei gangli linfatici delle dermopatie distrofiche ». 38; 97.
Morera. « Stabilità delle configurazioni d'equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione attorno ad un asse verticale ». 223.

Mosso. Presenta gli Atti del Congresso internazionale di Fisiologia, del 1901, e dà notizie sul laboratorio di Fisiologia annesso all'Osservatorio Margherita sul Monte Rosa. 399.

N

Newcomb. Assiste alla seduta accademica. 451.

O

Oddo. « Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento dell'iodio ». 12.

— « Comportamento di alcune cloroanidridi inorganiche. 130.

P

Padoa. V. *Bruni.*

Palazzo. « Azione dell' idrossilamnia sull'etere dimetil-pirondicarbonico ». 562.

Palatini. « L'ordine della varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico ». 315.

Panichi L. Vedi *Lo Monaco.*

Panichi U. Si approva la stampa della sua Memoria: « Influenza della variazione della temperatura e più specialmente dai forti raffreddamenti, sul comportamento ottico di alcuni minerali ». 38.

Peglion. « La peronospora del frumento (Sclerospora graminicola) nel Ferrarese ». 389.

— « Intorno ad un caso speciale di deperimento primaverile del frumento ed ai mezzi di ovviarvi ». 439; 492.

Peratoner. « Sulla tautomeria dell'acido piromeconico ». 212; 246.

— « Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine ». 289; 327.

Pieri. « Sul modo di trasmissione dell'Anchilostoma duodenale ». 217.

Pincherle. « Sulle serie di fattoriali ». 139; 417.

Pirotta. « Origine e differenziazione degli elementi vascolari primari nella radice delle Monocotiledoni ». 8; 49; 158.

Pochettino. « Sull' influenza di basse temperature sulla variazione di resistenza del selenio per effetto della luce ». 286.

— « Sull' influenza dell' elettrizzazione sulla velocità di evaporazione ». 327; 376.

— e Sella. « Conduttività elettrica acquistata dall'aria proveniente da una soffieria ad acqua ». 527.

R

Reina. « Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite a Roma (S. Pietro in Vincoli), a M. Cimino e a M. Peglia negli anni 1900 e 1901 ». 431.

Ricci. « Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura ». 303; 355.

Righi. « Sulla produzione di suoni per mezzo delle scariche nei tubi a gas rarefatto o nelle fiamme », 352; 457.

Rimatori. « La Prehnite ed altre zeoliti nelle granuliti di Cala Francese (Isola della Maddalena-Sardegna) ». 492; 542.

Ròiti. Fa parte della commissione esaminatrice di una Memoria del dott. *U. Panichi.* 38.

S

Sabatier. Assiste alla seduta accademica. 347.

Sauve. Invia un piego suggellato da conservarsi negli Archivi dell'Accademia. 190.

Scurti. V. *Angeli.*

Sella. « Ricerche di radioattività indotta ». 57; 242; 369.

— V. *Pochettino.*

Severi. « Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi ». 8; 52.

— « Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre ». 105.

Silber. V. *Ciamician.*

Somigliana. « Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni dell'elasticità ». 145.

Straneo. « Misura della diffusione elettrolitica, dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni » 58; 171.

Strüver. Riferisce su di una Memoria del dott. *U. Panichi.* 38.

T

Tacchini. Ringrazia l'Accademia per il voto di plauso inviatogli. 45.

— Presenta varie pubblicazioni del comandante *Cattolica,* dandone un cenno bibliografico. 297; 398.

Taramelli. « Sulla probabile tectonica del gruppo del Sempione ». 462.

Todaro. Presenta il vol. VIII delle « Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia Normale della R. Università di Roma » discorrendo dei lavori contenuti nel volume stesso. 39.

— « Sopra gli organi renali delle Salpidi ». 284; 405.

Trotter. « Di una nuova specie di Pinipide galligeno e della sua galla già nota a Teofrasto ». 254.

V

Villari P. È eletto presidente dell'Accademia. 499.

Voigt. « Dispersione rotatoria magnetica nell'interno delle righe di assorbimento ». 459.

— « Sul fenomeno Majorana ». 505.

Volterra. Presenta un'opera del prof. *Calderera.* 298.

Z

Zambonini. « Wavellite di Manziana (Provincia di Roma) ». 123.

— « Sul glaucofane di Chateyroux (valle di Gressoney) ». 204.

Zeeman. « Osservazioni sulla rotazione magnetica del piano di polarizzazione nell'interno di una riga di assorbimento ». 470.

INDICE PER MATERIE

A

Anatomia. « Sopra gli organi renali delle Salpidi ». *F. Todaro.* 284; 405.

Astronomia. « Considerazioni sull'insegnamento dell'Astronomia nelle Università italiane ». *G. Celoria.* 351.

— « Osservazioni del nuovo pianetino HU 1902, fatte coll'equatoriale di 38 cm. ». *E. Millosevich.* 276.

B

Biologia. « Nuove ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini ». *A. Coggi.* 289; 338.

Botanica. « Origine e differenziazione degli elementi vascolari primari nella radice delle Monocotiledoni ». *R. Pirotta.* 8; 49; 158.

C

Cecidologia. « Di una nuova specie di Pinipide galligeno e della sua galla già nota a Teofrasto ». *A. Trotter.* 254.

Chimica. « Ricerche sopra alcuni acidi idrossamici ». *A. Angeli, F. Angelico* e *F. Scurti.* 555.

— « Sul tetrajoduro di platino ». *I. Bellucci.* 8.

— « Riduzione dell'artemisina con cloruro stannoso ». *P. Bertolo.* 439; 486.

— « Sulla distinzione fra polimorfismo ed isomeria chimica ». *G. Bruni.* 386.

— « Sugli equilibrî eterogenei fra cristalli misti di idrati salini isomorfi ». *Id.* e *W. Meyerhoffer.* 185.

Chimica. « Sull'esistenza di corpi racemici in soluzione ». *Id.* e *M. Padoa.* 212.

— « Sulla formazione di cristalli misti per sublimazione ». *Id. Id.* 565.

— « Azioni chimiche della luce ». *G. Ciamician* e *P. Silber.* 277.

— « Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento dell'iodio ». *G. Oddo.* 12.

— « Comportamento di alcune cloroanidridi inorganiche ». *Id.* 130.

— « Azione dell'idrossilammina sull'etere dimetil-pirondicarbonico ». *I. Palazzo.* 562.

— « Sulla tautomeria dell'acido piromeconico ». *A. Peratoner.* 212; 246.

— « Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine ». *Id.* 289; 327.

Concorsi a premî. Elenchi dei lavori presentati per concorrere ai premî Reali per la *Mineralogia e Geologia,* e a quelli del Ministero della Pubblica Istruzione per le *Scienze matematiche,* del 1901. 42; 103.

— Programma del concorso *Carnegie.* 45.

E

Elettrochimica. « Misura della diffusione elettrolitica, dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni ». *P. Straneo.* 58; 171.

Elezioni. Elezione del Socio P. Villari a Presidente dell'Accademia. 499.

F

Fisica. « Determinazione del potenziale elettro-statico mediante la deformazione di una superficie liquida ». *C. Carpini.* 65.

— « Misure pireliometriche fatte a Sestola nell'estate del 1901 ». *C. Chistoni.* 77.

— « Misure pireliometriche fatte sul monte Cimone nell' estate del 1901 ». *Id.* 479; 539.

— « Sulla misura delle variazioni e del valore assoluto della pressione atmosferica mediante il ludione ». *G. Guglielmo.* 70.

— « Su due nuovi fenomeni magneto-ottici osservati normalmente alle linee di forza ». *Q. Majorana.* 374.

— « Sul metodo e sulle sostanze da adoperarsi, per osservare la birifrangenza magnetica ». *Id.* 463.

— « Sulla birifrangenza magnetica e su altri fenomeni che l'accompagnano ». *Id.* 531.

— « Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua ». *A. Marcacci.* 286; 324.

— « Sull'influenza di basse temperature sulla variazione di resistenza del selenio per effetto della luce ». *A. Pochettino.* 286.

— « Sull'influenza dell'elettrizzazione sulla velocità di evaporazione ». *Id.* 327; 376.

— « Conduttività elettrica acquistata dall'aria proveniente da una soffieria ad acqua ». *Id.* e *A. Sella.* 527.

— « Sulla produzione di suoni per mezzo delle scariche nei tubi a gas rarefatto o nelle fiamme ». *A. Righi.* 352; 457.

— « Ricerche di radioattività indotta ». *A. Sella.* 57; 242; 369.

— « Dispersione rotatoria magnetica nell'interno delle righe d'assorbimento ». *W. Voigt.* 459.

— « Sul fenomeno Majorana ». *Id.* 505.

— « Osservazioni sulla rotazione magnetica del piano di polarizzazione nell'interno di una riga di assorbimento ». *P. Zeeman.* 470.

Fisica matematica. « Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettromagnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo ». *T. Levi-Civita.* 163; 191; 228.

— « Stabilità delle configurazioni d'equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione attorno ad un asse verticale ». *G. Morera.* 223.

Fisica terrestre. « Sopra un sismografo per forti terremoti ». *G. Agamennone.* 116.

— « Propagazione dei terremoti ». *G. Grablovitz.* 122; 177.

Fisiologia. « Micro-fotografie di fibre muscolari a luce semplice e polarizzata, allo stato di riposo e di contrazione ». *Th. W. Engelmann.* 284.

— « Su alcune alterazioni dei gangli linfatici delle dermopatie distrofiche ». *V. Montesano.* 38; 97.

G

Geodesia. « Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite a Roma (S. Pietro in Vincoli), a M. Cimino e a M. Peglia negli anni 1900 e 1901 ». *V. Reina.* 431.

Geologia. « Stato attuale dei ghiacciai del Monte Rosa ». *G. Dainelli.* 24.

— « I terreni terziarî della provincia di Roma. I. Eocene ». *C. De Stefani.* 463; 508.

— « I terreni eocenici presso Bribir in Croazia ». *Id.* e *G. Dainelli.* 105; 154.

— « Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei. I. Jalotrachite nera ad augite ed egirina ». *E. Manasse.* 85.

— « II. Jalotrachite rossa e grigio-cinerea ad augite ed egirina e tufo giallo ». *Id.* 125.

— « III. Inclusi nel tufo e nelle scorie ». *Id.* 208.

— « I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia ». *A. Martelli.* 289; 334.

— « Sulla probabile tectonica del gruppo del Sempione ». *T. Taramelli.* 462.

M

Matematica. « Sulle superficie che contengono sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici ». *U. Amaldi.* 198; 237.

— « Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann ». *L. Bianchi.* 3.

— « Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie ». *Id.* 265.

— « Sulla deformazione delle superficie di rotazione ». *Id.* 453.

— « Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poliarmoniche nell' area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno ». *I. Boggio.* 285; 303.

— « Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a due variabili indipendenti ». *Id.* 513.

— Una estensione del metodo di Eulero-Laplace per l'integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali del secondo ordine ». *U. Dini.* 105.

— « Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali ». *G. Fubini.* 113.

— « L'ordine della varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico ». *F. Palatini.* 315.

— « Sulla serie di fattoriali ». *S. Pincherle.* 139; 417.

— « Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura ». *G. Ricci.* 303; 355.

— « Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi ». *F. Severi.* 8; 52.

— « Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre ». *Id.* 105.

Meccanica. « Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema hamiltoniano ». *P. Burgatti.* 309.

— « Sul problema generale della sismografia ». *M. Contarini.* 380; 433; 472; 519.

Meccanica. « Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano ». *E. Daniele.* 285; 362; 427.

— « Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie ». *Id.* 519.

— « Le deformazioni del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti ». *R. Marcolongo.* 286; 318.

— « Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni dell'elasticità ». *C. Somigliana.* 145.

Mineralogia. « Thomsonite e apofillite di Schiket nella Colonia Eritrea ». *G. D'Achiardi.* 251.

— « Appunti sopra alcuni minerali di Casal di Pari (Comune di *Campagnatico*, provincia di *Grosseto*) ». *G. de Angelis D'Ossat.* 548.

— « La Prehnite ed altre zeoliti nelle granuliti di Cala Francese (Isola della Maddalena-Sardegna) ». *C. Rimatori.* 492; 542.

— « Wavellite di Manziana (Provincia di Roma) ». *F. Zambonini.* 123.

— « Sul glaucofane di Chateyroux (valle di Gressoney) ». *Id.* 204.

N

Necrologie. Annuncio della morte del Socio straniero *A. Cornu*, e sua commemorazione. 347; id. del Socio *E. L. Fuchs*, e sua commemorazione. 397.

P

Paleontologia. « Sul rinvenimento di un teschio di Squalodontide nel calcare bituminifero di Ragusa in Sicilia ». *G. G. Gemmellaro.* 462.

Parassitologia. « Sul modo di trasmissione dell'Anchilostoma duodenale ». *G. Pieri.* 217.

— « Sulla trasmissibilità della peste bubbonica ai pipistrelli ». *B. Gosio.* 397; 448.

Patologia. « Sul fenomeno dell'agglutinazione nel sangue dei malarici ». *D. Lo Monaco* e *L. Panichi.* 30; 91.

Patologia vegetale. « La peronospora del frumento (Sclerospora graminicola) nel Ferrarese ». *V. Peglion.* 389.

— « Intorno ad un caso speciale di deperimento primaverile del frumento ed ai mezzi di ovviarvi ». *Id.* 439; 492.

R

Regolamenti Universitarî. Deliberazione della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. 401.

Z

Zoologia. « Nota preventiva sulla funzione delle cellule cloralogene nei gen. Lumbricus ed Allolobophora ». *C. Bortolotti.* 449.

Zoologia. « La Zoologia secondo il nuovo regolamento delle facoltà di scienze ». *C. Emery.* 503.

— « Ricerche osmotiche sugli Infusorii ». *P. Enriques.* 289; 340.

— « Ricerche osmotiche sui Protozoi delle infusioni ». *Id.* 392.

— « Ricerche osmotiche sulla Limnaea stagnalis ». *Id.* 440.

— « Osmosi ed assorbimento nelle reazioni a soluzioni anisotoniche (Protozoi e Limnaea stagnalis) ». *Id.* 495.

— « Il mollusco contagioso negli Anfibi ». *P. Mingazzini.* 258.

Pubblicazione bimensile. *Roma 15 giugno 1902.* **N. 12.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 giugno 1902.

Volume XI.° — Fascicolo 12°

e Indice del volume.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei, qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posto a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto è messa a carico degli autori.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76): Parte 1ª TRANSUNTI
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. (1892-1902) 1° Sem. Fasc. 12°
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X. (1892-1902) Fasc. 3°-4°
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-III.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

— — —

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 giugno 1902.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Emery. La Zoologia secondo il nuovo regolamento delle facolta di scienze . . . . Pag. 503
Voigt. Sul fenomeno Majorana . . . . . » 505
De Stefani. I terreni terziarî della Provincia di Roma. I. Eocene . . . . . » 508
Boggio. Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali con due variabili indipendenti (pres. dal Socio *Bianchi*) . . . . . » 51
Daniele. Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie (pres. dal Socio *Volterra*) (*) . . . . . » 519
Contarini. Sul problema generale della sismografia (pres. dal Socio *Cerruti*) . . . . . » »
Pochettino e Sella. Conduttività elettrica acquistata dall'aria proveniente da una soffieria ad acqua (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . . » 527
Majorana. Sulla birifrangenza magnetica e su altri fenomeni che l'accompagnano (pres. *Id.*) » 531
Chistoni. Misure pireliometriche fatte sul monte Cimone nell'estate del 1901 (pres. *Id.*) . » 539
Rimatori. La Prehnite ed altre zeoliti nelle granuliti di Cala Francese (Isola della Maddalena-Sardegna) (pres. dal Socio *Strüver*) . . . . . » 542
De Angelis d'Ossat. Appunti sopra alcuni minerali di Casal di Pari. Comune Campagnatico, provincia Grosseto (pres. *Id.*) . . . . . » 548
Angeli, Angelico e Scurti. Ricerche sopra alcuni acidi idrossammici (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . . » 555
Palazzo. Azione dell'idrossilamina sull'etere dimetil-pirondicarbonico (pres. dal Socio *Paternò*) » 562
Bruni e Padoa. Sulla formazione di cristalli misti per sublimazione (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . . » 565

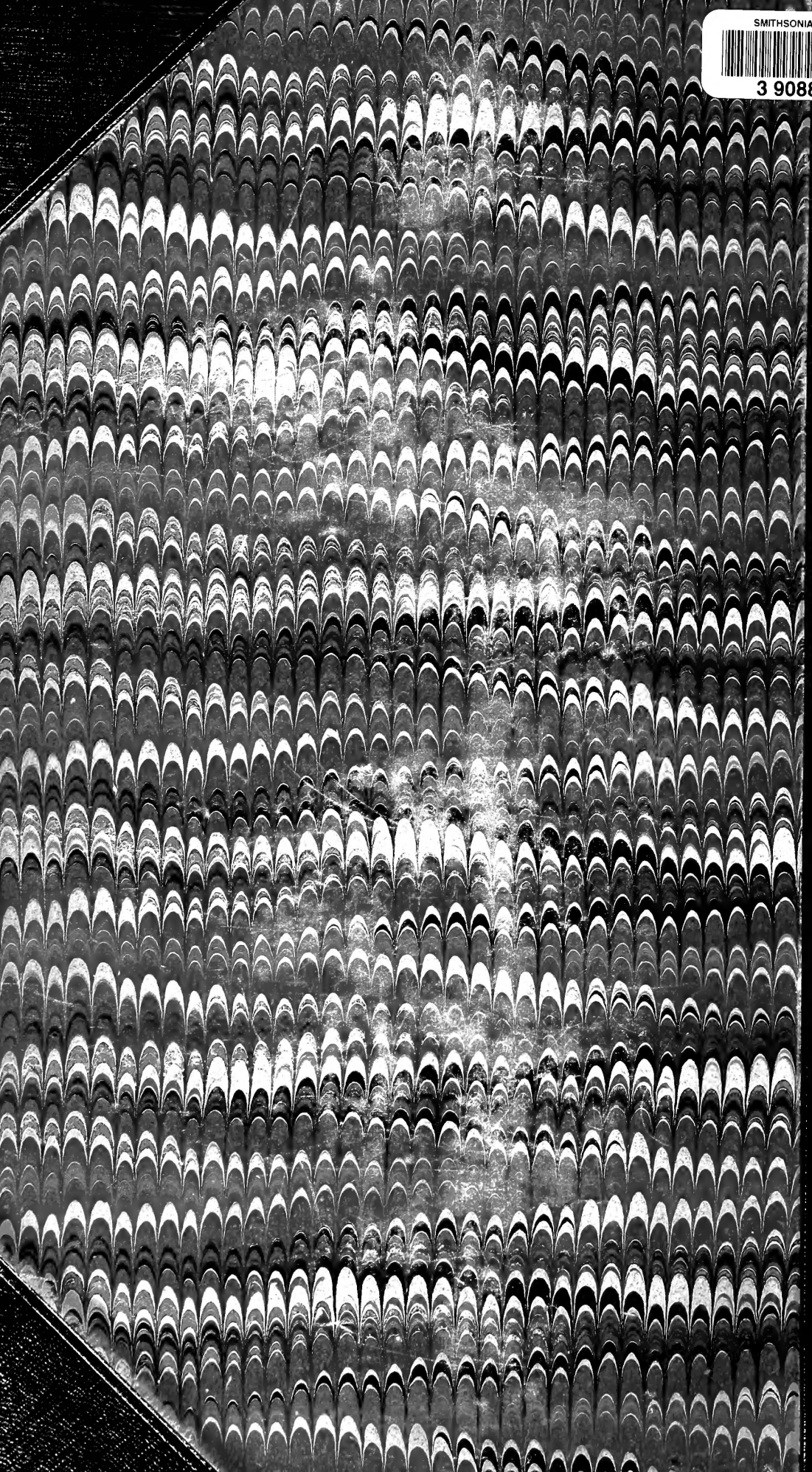
PRESENTAZIONE DI LIBRI

Blaserna (Vicepresidente). Presenta il 1° volume delle « Opere matematiche » di *E. Beltrami*, e dà comunicazione di una lettera del prof. *Tonelli*, preside della Facoltà di scienze dell'Università di Roma, che a nome della Facoltà fa omaggio all'Accademia del volume anzidetto . . . . . »

Indice del vol. XI, 1° semestre 1902 . . . . . » 571

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

V. Cerruti *Segretario responsabile.*


SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01356 8720